МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет
економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

А.О. Возняк, С.О. Тернов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Кривий Ріг
2016

ЗМІСТ

Вступ 3

Тема 1.Визначники. Елементи теорії матриць. 4

Тема 2. Загальна теорія систем лінійних рівнянь. 17

Тема 3. Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії . 23

Тема 4. Границя числової послідовності та функції. Неперервність функції 35

Тема 5. Похідна функції. Диференціал функції однієї змінної. Основні теореми диференціального числення. Диференційованість функції багатьох змінних. 45

Тема 6. Дослідження функції однієї змінної та побудова її графіку. Знаходження найбільших (найменших) значень функції. 58

Тема 7. Первісна. Невизначений інтеграл. Його властивості. 68

Тема 8. Визначений інтеграл. Його властивості. 75

Тема 9. Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтеграла 79

Тема 10. Методи інтегрування

Тема 11. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття. Диференціальні рівняння І порядку: з розподіленими змінними, однорідні, лінійні. 87

Тема 12. Диференціальні рівняння ІІ порядку. Диференціальні рівнян-ня ІІ порядку, що допускають зниження порядку. 95

Тема 13. Числові ряди. Необхідна ознака збіжності. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів. Знакопочережні числові ряди. Умовна і абсолютна збіжність. Степеневі ряди. Область збіжності. 99

Список рекомендованих джерел 104

ВСТУП

В сучасному інформаційному суспільстві спеціаліст повинен відповідати певним вимогам, а також розвивати наявність таких умінь, як виділяти з інформації головне і другорядне; бачити інформацію в цілому, а не фрагментарно; встановлювати асоціативні зв'язки між інформаційними повідомленнями; інтерпретувати інформацію, отримані результати, передбачати і прогнозувати наслідки прийнятих рішень. Завдання підвищення рівня самостійної навчальної діяльності студентів є одним із пріоритетів Болонського процесу. Ринок праці висуває вимоги не тільки до рівня фундаментальних знань потенційного працівника взагалі, а й до рівня його професійної компетенції. Наявність “чистих” математичних знань не є кінцевою вимогою до підготовки фахівців. Цінність математичних знань, в першу чергу, у тому, що вони є базою для інших, насамперед спеціальних предметів. Тому важливо розділяти базові (породжені логікою самої науки, яка відповідає сучасним уявленням) та варіативні (скориговані вимогами до професійних знань) елементи математичної освіти. Варіативні доцільно формувати на основі інтеграції математики та спеціальних дисциплін. У професійній підготовці фахівців математика є базовою дисципліною, свого роду міждисциплінарною мовою.

Даний конспект лекцій націлений на стимулювання та організацію систематичної самостійної роботи студентів денної та заочної форми навчання. Усі теми викладаються за єдиним методичним принципом. Спочатку подаються основні означення, формулюються теореми, далі – детально розбираються типові приклади, які ілюструють конкретні застосування теоретичного матеріалу. Краще розібратися в теоретичному матеріалі й перевірити рівень його засвоєння допомагають численні приклади розв'язування задач, наведені до кожної теми.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ І.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 1. Елементи теорії матриць. Визначники.

План:

1. *Основні поняття*
2. *Дії над матрицями*
3. *Властивості множення матриць*
4. *Визначники матриць*
5. *Властивості визначників*
6. *Деякі правила обчислення визначників*
7. *Ранг матриці*
8. *Обернена матриця*

Список рекомендованої літератури: [1], [2],[3].

1. Основні поняття

Дуже часто для розв'язання економічних задач використовують поняття „матриця": технологічна матриця, матриця попиту, матриця пропозиції та інші. У багатьох прикладних задачах доводиться зводити числові дані в таблиці і тоді їх математична обробка значно спрощується.

Означення. Прямокутна таблиця чисел, яка містить m рядків та n стовпців, називається числовою *матрицею* розміру $m \times n$ (або порядку $m \times n$).

Матриці позначаються великими літерами латинського алфавіту, наприклад $A, B, C, D, ...$. Числа, які складають матрицю, називаються *елементами* матриці. Для позначення елементів матриці використовуються малі літери з подвійною індексацією a_{ij} , де i – номер рядка, j – номер стовпця.

У загальному вигляді матрицю розміру $m \times n$ можна записати так:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.1)$$

Скорочений запис матриці має вигляд $A = (a_{ij})$, де $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$.

Розміри матриць можуть бути різними.

Означення. Матриця називається *матрицею-рядком*, якщо вона складається з одного рядка. Наприклад,

$$A_{1\times 4} = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}). \qquad (1.1.2)$$

Означення. Матриця називається *матрицею-стовпцем*, якщо вона складається з одного стовпця. Наприклад,

$$A_{3\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}. \qquad (1.1.3)$$

Означення. Матриця називається *квадратною* n-го порядку, якщо число її рядків співпадає з числом стовпців і дорівнює n.

Елементи квадратної матриці, у яких номер рядка дорівнює номеру стовпця, називається *діагональними* та утворюють головну діагональ матриці: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$. Побічну діагональ цієї матриці утворюють елементи $a_{n1}, a_{n-1,2}, a_{n-2,3}, ..., a_{1n}$.

Означення. Квадратна матриця, у якої елементи, що розташовані вище або нижче головної діагоналі дорівнюють нулю, називається *трикутною* матрицею, наприклад:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Квадратна матриця, у якої всі недіагональні елементи дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею, наприклад:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.1.4)$$

Означення. Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці n-го порядку дорівнюють одиниці, то вона називається *одиничною* матрицею n-го порядку і позначається літерою E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.1.5)$$

Означення. Матриця, в якій всі елементи дорівнюють нулю, називається *нульовою* і позначається літерою O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.1.6)$$

Існують і інші види матриць, наприклад, симетрична (якщо $a_{ij} = a_{ji}$) тощо.

2. Дії над матрицями

Над матрицями, як і над числами, можна робити такі алгебраїчні дії, як додавання, множення матриць, множення матриці на число. Матриці можна також транспонувати.

Означення. *Добутком матриці A на число λ* називається матриця $B = \lambda A$, елементи якої для всіх де $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$ є

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}. \qquad (1.1.7)$$

Наприклад, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то $2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Означення. *Сумою двох матриць* однакового розміру A і B називається матриця $C = A + B$, елементами якої обчислюються за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \qquad (1.1.8)$$

Для довільних матриць A, B і C однакового розміру та будь-яких чисел α, β справедливі співвідношення:

1. $A + O = A$;
2. $A + B = B + A$;
3. $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$;
4. $A + (-A) = O$;
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$;
6. $(\alpha \pm \beta) \cdot A = \alpha \cdot A \pm \beta \cdot A$;
7. $\alpha \cdot (A \pm B) = \alpha \cdot A \pm \alpha \cdot B$;
8. $E \cdot A = A$.

Приклад 1.1.1. Знайти матрицю $C = 3A + 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$3A + 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 6 & -15 & -9 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 8 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 4 \\ 12 & -7 & -13 \\ -2 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Означення. *Добутком двох матриць* A і B називається матриця C, елементи якої визначаються за формулою

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1,\dots,m; \quad j = 1,\dots,p \qquad (1.1.9)$$

Зауваження. Множення матриці A на матрицю B визначено тільки тоді, коли число стовпців матриці $A_{m \times n}$ (першого співмножника) дорівнює числу рядків матриці $B_{n \times p}$ (другого співмножника). Матриця C має розмір $(m \times p)$.

Зауваження. Добуток матриці-рядка A розміру $(1\times n)$ на матрицю-стовпець B розміру $(n\times 1)$ називається скалярним добутком.

3. Властивості множення матриць

1. $(AB)C = A(BC)$; 3. $(A+B)C = AC+BC$;
2. $\alpha\cdot(AB) = (\alpha\cdot A)B = A(\alpha\cdot B)$; 4. $A(B+C) = AB+AC$.

Приклад 1.2.1. Обчислити добуток матриць $A_{3\times 2}$ і $B_{2\times 4}$, де $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\\ 0 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4 & 5\\ 3 & 0 & -1 & 8\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Множення цих матриць визначено, тому що число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B (дорівнює 2). Відповідно до формули (1.1.9) обчислимо елементи першого рядка матриці C:

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 4\cdot(-2) + 1\cdot 3 = -8+3 = -5;$

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 4\cdot 1 + 1\cdot 0 = 4+0 = 4;$

$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 4\cdot 4 + 1\cdot(-1) = 16-1 = 15;$

$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} = 4\cdot 5 + 1\cdot 8 = 20+8 = 28.$

Аналогічно обчислюються елементи другого та третього рядків матриці C, яка в результаті отримає вигляд (перевірити самостійно)

$$C_{3\times 4} = A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 4} = \begin{pmatrix}-5 & 4 & 15 & 28\\ 9 & 3 & 7 & 55\\ 21 & 0 & -7 & 56\end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця A^n $(n>1)$ називається цілим додатним *степенем квадратної матриці* A, яку отримують добутком n матриць, рівних A, тобто

$$A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot A\ldots\cdot A}_{n\ \text{разів}} \qquad (1.1.10)$$

Означення. Матриця A^T називається *транспонованою* до матриці A, якщо рядки однієї матриці замінити стовпцями другої, тобто

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm}\end{pmatrix} \qquad (1.1.11)$$

4. Визначники матриць

Визначники матриць часто вживаються при розв'язанні задач у багатьох розділах вищої математики, наприклад, в лінійній алгебрі при розв'язанні систем лінійних рівнянь, в аналітичній геометрії при обчисленні площі трикутника в декартовій системі координат і так далі.

Означення. *Визначник* – це число, яке обчислюється за певним правилом. Визначник матриці A називають також *детермінантом* і позначають ΔA, або $\det A$, а замість круглих дужок використовують вертикальні лінії, наприклад:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \Delta A = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.2.1)$$

Означення. *Визначником матриці першого порядку* $A = (a_{11})$ називається число, яке дорівнює елементу a_{11}:

$$\Delta_1 = a_{11}.$$

Наприклад, для матриці $A = (9)$ визначник дорівнює $\Delta A = 9$.

Означення. *Визначником матриці другого порядку* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, яке обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.2.2)$$

Означення. *Визначником матриці третього порядку* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число, яке обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \qquad (1.2.3)$$

Приклад 1.2.1. Обчислити визначник матриці другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26.$

Приклад 1.2.2. Обчислити визначник матриці третього порядку

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 5 + 1\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot 2 = 11.$$

5. Властивості визначників

1. При транспортуванні матриці значення її визначника не змінюється.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний, а його абсолютне значення не змінюється.

3. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці містять загальний множник, то його можна виносити за знак визначника.

4. Визначник, що має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) матриці дорівнюють нулю, то її визначник дорівнює нулю.

6. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) матриці є сумою двох доданків, то її визначник можна обчислити, як суму

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

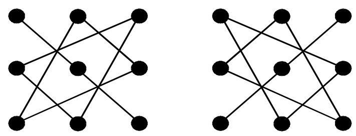
7. Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця) помножені на деяке число.

8. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць.

6. Деякі правила обчислення визначників

1. ***Правило трикутника.***

Наведене правило обчислення визначників третього порядку (1.2.3) називається правилом трикутника. Його можна представити наступною схемою:



(1.2.4)

Необхідно запам’ятати, що для добутків елементів, які розташовані на головній діагоналі та на паралелях до головної діагоналі, з додаванням третього множника з протилежного кута таблиці, знак не змінюється; для добутків елементів, які розташовані на побічній діагоналі та на паралелях до побічної діагоналі, з додаванням третього множника з протилежного кута таблиці, знак змінюється на протилежний.

2. ***Правило Сарюса.***

Перший та другий стовпці треба виписати праворуч від визначника і перемножити елементи, що стоять на головних і побічних діагоналях:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ - \quad - \quad - \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \qquad (1.2.5)$$

3. ***Обчислення визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця.***

Теорема Лапласа. Визначник n - го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots a_{in}A_{in},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n - го порядку A називається число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}, \qquad (1.2.6)$$

де M_{ij} – мінор елемента a_{ij}.

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n - го порядку називається визначник матриці $n-1$-го порядку, отриманий з матриці A після викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Зауваження. Алгебраїчне доповнення збігається з мінором, коли сума номерів рядка та стовпця ($i+j$) є парним числом, і відрізняється від мінору знаком, коли сума ($i+j$) є непарним числом.

Зауваження. Якщо всі елементи i-го рядка (j-го стовпця) визначника матриці A, крім одного a_{ij}, дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку цього ненульового елемента a_{ij} на його алгебраїчне доповнення A_{ij}, тобто $\Delta=a_{ij}\cdot A_{ij}$. Це важливе зауваження використовують при обчисленні визначників.

Приклад 1.2.3. Обчислити визначник матриці третього порядку, використовуючи: а) правило трикутника; б) правило Сарюса; в) за елементами першого стовпця.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

а) $$\Delta A=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix}=5\cdot(-1)\cdot 7+3\cdot 4\cdot 6+0\cdot(-2)\cdot 2-$$

$$-2\cdot(-1)\cdot 6-5\cdot 4\cdot(-2)-3\cdot 0\cdot 7=89;$$

б) $\Delta A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \\ 6 & -2 \end{matrix} = 5\cdot(-1)\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 6 + 0\cdot(-2)\cdot 2 -$

$$-2\cdot(-1)\cdot 6 - 5\cdot 4\cdot(-2) - 3\cdot 0\cdot 7 = 89;$$

в) $\Delta A = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 5(-7+8) + 0 + 6(12+2) = 5\cdot 1 + 6\cdot 14 = 5 + 84 = 89.$$

Приклад 1.2.4. Знайти мінори та алгебраїчні доповнення елементів a_{11}, a_{23}, a_{32} визначника $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За визначенням мінору елемента a_{ij}, маємо

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 1 = 13,\ M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,\ M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8.$$

За визначенням алгебраїчного доповнення

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 13,\ A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 2,\ A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -8.$$

7. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірності $m \times n$ (1.1.1). Якщо в цій матриці викреслити довільно k стовпців і k рядків, то елементи які розташовані на перетині виділених стовпців і рядків, утворюють квадратну матрицю k - го порядку. Визначник цієї матриці називається мінором k - го порядку матриці A. Отже, матриця A має мінори будь-якого порядку від 1 до найменшого з чисел m і n. Серед всіх відмінних від нуля мінорів матриці A найдеться, принаймні, один мінор, порядок якого буде найбільшим.

Означення. *Рангом матриці* A називається найвищий порядок її мінорів, відмінних від нуля.

Якщо всі елементи матриці A дорівнюють нулю, то говорять, що ранг матриці A дорівнює нулю. Якщо ранг матриці A дорівнює r, то це означає, що в матриці A є, принаймні, один, відмінний від нуля мінор порядку r, а всі мінори порядку, більшого ніж r , дорівнюють нулю. Ранг матриці позначається: $r(A)$ або $rang(A)$. Завжди справедлива нерівність

$$0 \le r(A) \le \min(m, n).$$

Властивості рангу матриці

1. При транспонуванні ранг матриці не змінюється.
2. Ранг матриці не змінюється при перестановці її стовпців (рядків).
3. Ранг матриці не змінюється при множенні всіх елементів її стовпця (рядка) на ненульове число.
4. Ранг матриці не змінюється, якщо до одного із її стовпців (рядків) додати інший стовпець (рядок), помножений на ненульове число.

5. Ранг матриці не змінюється, якщо убрати з неї нульовий стовпець (рядок).

6. Ранг матриці не змінюється, якщо убрати з неї стовпець (рядок), який є лінійною комбінацією інших стовпців (рядків).

Методи обчислення рангу матриці

Метод обвідних мінорів. Ранг матриці визначається в наступній послідовності:

1. Якщо серед елементів матриці є хоча б один відмінний від нуля елемент, то знаходимо ненульовий мінор другого порядку. Коли всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, тоді ранг матриці дорівнює одиниці, тобто $r(A)=1$.

2. Якщо серед мінорів другого порядку є хоча б один відмінний від нуля, то складаємо всі обвідні його мінори третього порядку. Коли всі обвідні мінори третього порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A)=2$.

3. Якщо хоча б один з обвідних мінорів третього порядку відмінний від нуля, то складаємо всі обвідні його мінори четвертого порядку. Коли всі обвідні мінори четвертого порядку дорівнюють нулю, тоді $r(A)=3$. У протилежному випадку процедура повторюється.

Метод обвідних мінорів вимагає обчислення дуже великого числа мінорів матриці. Це є суттєвим його недоліком.

Існує більш удосконалений метод обчислення рангу матриць. Він не потребує обчислення визначників. Він використовує елементарні перетворення матриці.

Метод елементарних перетворень. Суть цього методу полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень матрицю спрощують, а потім визначають її ранг.

Елементарними називаються наступні перетворення матриць:

1) перестановка двох будь-яких стовпців (рядків);

2) множення елементів будь-якого стовпця (рядка) на ненульове число;

3) додавання до одного стовпця (рядка) лінійної комбінації інших стовпців (рядків).

Із розглянутих властивостей рангу матриці, витікає, що при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється.

Означення. Дві матриці називаються *еквівалентними*, якщо одна з них отримується із іншої за допомогою скінченого числа елементарних перетворень.

Еквівалентні матриці не є рівними, але їх ранги рівні. Якщо матриці A і B еквівалентні, то це позначається так: $A \sim B$.

Тобто, якщо $A \sim B$, то $rangA = rangB$.

Приклад 1.3.1. Визначити ранг матриці методом елементарних перетворень

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За допомогою елементарних перетворень спрощуємо дану матрицю. Для цього знайдемо суму відповідних елементів першого і третього рядків:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}4 & 8 & 12\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Поділимо на 4 елементи першого рядка:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Знайдемо різницю елементів першого рядка і відповідних елементів другого рядка:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Викреслимо перший рядок:

$$\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці дорівнює 2 тому, що існує ненульовий мінор другого порядку, наприклад:

$$M=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=10-9=1\neq 0.$$

Отже, $r(A)=2$.

8. Обернена матриця

Означення. Матриця A^{-1} називається *оберненою* для квадратної матриці A, якщо при множенні цієї матриці на матрицю A як праворуч, так і ліворуч, утворюється одинична матриця:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E \qquad (1.4.1)$$

Теорема. Кожна квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю, має обернену матрицю і при тому тільки одну.

Для матриці (1.1.1) обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}\ \ (|A|\neq 0), \qquad (1.4.2)$$

де $\tilde{A}$ - транспонована матриця, яка складається із алгебраїчних доповнень.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.4.2')$$

Властивості оберненої матриці:

1) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3) $(\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$, де λ - число;

4) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$;

5) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

Приклад 4.1.1. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то можна побудувати обернену матрицю. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \; A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4; \; A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

За формулою (1.4.2′) обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи вірно знайдена обернена матриця. Для цього обчислимо добуток A на A^{-1} :

$$A^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2\cdot1+(-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot1; & 2\cdot3+(-4)\cdot1+(-2)\cdot1; & 2\cdot2+(-4)\cdot0+(-2)\cdot2 \\ 4\cdot1+0\cdot(-2)+(-4)\cdot1; & 4\cdot3+0\cdot1+(-4)\cdot1; & 4\cdot2+0\cdot0+(-4)\cdot2 \\ -3\cdot1+2\cdot(-2)+7\cdot1; & -3\cdot3+2\cdot1+7\cdot1; & -3\cdot2+2\cdot0+7\cdot2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E,$$

тобто за означенням, матриця

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

є оберненою для матриці A.

Матричні рівняння.

Означення. *Матричними рівняннями* називаються рівняння виду:

$$AX=B,\ \text{або}\ XA=B, \qquad (1.5.1)$$

де A та B – задані квадратні матриці n-го порядку, а X - невідома матриця того ж порядку.

Означення. Розв'язком матричного рівняння називається всяка матриця відповідного порядку, яка після підставлення в матричне рівняння замість матриці X, оберне рівняння в тотожність.

Матричні рівняння (1.5.1) мають єдиний розв'язок, якщо $|A|\neq 0$.

$$X=A^{-1}B,\ \text{або}\ X=BA^{-1}. \qquad (1.5.2)$$

Приклад 1.5.1. Розв'язати матричне рівняння $AX=B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знайдемо визначник матриці A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}=16-15=1\neq 0,$$

тому існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11}=8;\ A_{12}=-5;\ A_{21}=-3;\ A_{22}=2.$$

Тоді $A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Отже, невідома матриця

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8\cdot1+(-3)\cdot3 & 8\cdot2+(-3)\cdot(-1) \\ -5\cdot1+2\cdot3 & -5\cdot2+2\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8-9 & 16+3 \\ -5+6 & -10-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 19 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо матриця A вироджена, то цей метод не можливо використовувати, так як матриця A^{-1} не існує. В цьому випадку матричне рівняння має або нескінченну множину рішень, або не має розв'язків взагалі.

Приклад 1.5.2. Розв'язати матричне рівняння $A\cdot X\cdot B=C$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. З рівняння $A\cdot X\cdot B=C$ знаходимо, що $X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$. Знайдемо визначники матриць A і B:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=7\neq 0,\ |B|=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Тому існують обернені матриці A^{-1} і B^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриць A і B:

$$A_{11}=3;\ A_{12}=-2;A_{21}=2;A_{22}=1,\ B_{11}=1;\ B_{12}=4;B_{21}=-3;B_{22}=-2.$$

Тоді $A^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ та $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Отже, невідома матриця

$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 25 & -25 \\ -26 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Загальна теорія систем лінійних рівнянь

План:

1. *Основні поняття*
2. *Теорема Кронекера-Капеллі*
3. *Правило Крамера*
4. *Метод оберненої матриці*
5. *Метод Гаусса*

Список рекомендованої літератури: [1], [2],[3].

1. Основні поняття

Означення. Рівняння відносно невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *лінійним*, якщо його можна записати у вигляді:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – деякі числа, які називають коефіцієнтами рівняння, а b – довільне число, яке називають довільним членом рівняння.

Означення. *Системою m лінійних рівнянь із n невідомими*, або *лінійною системою*, називають систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.6.1)$$

в якій кожне рівняння є лінійним.

Числа a_{ij} називають коефіцієнтами, а числа b_i – вільними членами системи (1.6.1). Коефіцієнти при невідомих мають два індекси, з яких перший індекс вказує номер рівняння, якому належить даний коефіцієнт, а другий – номер невідомої, при якій цей коефіцієнт стоїть.

Означення. Лінійну систему рівнянь називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю. Якщо ж серед вільних членів є ненульові, то лінійну систему називають *неоднорідною*.

Означення. *Розв'язком системи лінійних рівнянь* (1.6.1) називають упорядковану сукупність чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$, підставлення яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, перетворює кожне з рівнянь системи (1.6.1) на тотожність.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Система рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок.

Система рівнянь називається *невизначеною*, якщо вона має нескінчену множину розв'язків.

Дві системи вважають *еквівалентними*, якщо множини їхніх розв'язків однакові.

Зокрема, дві несумісні системи еквівалентні.

Подамо систему (1.6.1) у матричному вигляді.

Матрицю, елементами якої є коефіцієнти при невідомих $A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$ – називають основною матрицею, а матрицю, доповнену вільними членами $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ – розширеною матрицею системи.

Позначимо через X та B матриці-стовпці $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, складені з невідомих і вільних членів. Тоді систему (1.6.1) можна записати у вигляді

$$AX = B \tag{1.6.2}$$

Такий запис системи називають матричним.

При розв'язанні системи рівнянь, як правило, насамперед з'ясовують, чи сумісна вона, й потім вже знаходять усі її розв'язки. Питання про сумісність системи вирішується за допомоги наступної теореми.

2. Теорема Кронекера-Капеллі.

Система лінійних рівнянь сумісна тоді й лише тоді, коли ранг r основної матриці системи дорівнює рангу r' розширеної матриці цієї системи.

Якщо ранг основної та розширеної матриць не рівні, то система несумісна й немає сенсу її розв'язувати. Якщо ранги матриць рівні, то система сумісна.

Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі такі випадки:

- якщо ранг матриці сумісної системи дорівнює числу невідомих, тобто $r = n$, то система (1.6.1) має єдиний розв'язок;
- якщо ранг матриці сумісної системи менший від числа невідомих, тобто $r < n$, то система невизначена й має нескінчену кількість розв'язків.

Розв'язати систему рівнянь (1.6.1) можна різними методами. Розглянемо деякі з них на прикладі стандартної лінійної системи трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1.6.3)$$

3. Правило Крамера.

Нехай Δ – визначник матриці A, яка складається з коефіцієнтів при змінних, а Δ_j – визначник матриці, який отримано з матриці A заміною j-го стовпця на стовпець вільних членів. Тоді, якщо $\Delta \neq 0$, тоді система (1.6.1) має єдине рішення, яке визначається за формулами:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,2,...n) \qquad (1.6.4)$$

Зауваження. У разі, коли $\Delta = 0$, а серед Δ_j є ненульові визначники, система (1.6.1) несумісна. В разі однорідної системи і $\Delta \neq 0$, вона має лише нульовий розв'язок; якщо ж $\Delta = 0$, то система, крім нульового, має також інші розв'язки.

Приклад 1.6.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера.

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо визначник системи за формулою (1.2.3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 7 + 9\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot 3\cdot 3 - 9\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 7 = 3.$$

Система має єдине рішення, тому що $\Delta \neq 0$.

Обчислимо додаткові визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 15 & 3 & 4 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 13\cdot 3\cdot 3 + 15\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 14 - 14\cdot 3\cdot 3 - 15\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 13 = 6,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 3 \\ 9 & 15 & 4 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 15\cdot 3 + 9\cdot 14\cdot 3 + 13\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot 15\cdot 3 - 9\cdot 13\cdot 3 - 14\cdot 4\cdot 7 = -15,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 9 & 3 & 15 \\ 5 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 7\cdot 3\cdot 14 + 9\cdot 1\cdot 13 + 2\cdot 15\cdot 5 - 5\cdot 3\cdot 13 - 9\cdot 2\cdot 14 - 1\cdot 15\cdot 7 = 9.$$

Отже, за формулами Крамера (1.6.4), маємо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-15}{3} = -5; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

Після відшукання розв'язку системи рекомендується зробити перевірку, підставивши добуті значення змінних у рівняння системи, й переконатися, що вони перетворюються на правильні рівності.

4. Метод оберненої матриці.

Для того, щоб розв'язати систему лінійних рівнянь (1.6.3) методом оберненої матриці, необхідно:

1. Знайти визначник ΔA матриці коефіцієнтів при змінних.
2. Якщо $\Delta A \neq 0$, знайти обернену матрицю A^{-1}.
3. Використовуючи правило множення матриць, помножити обернену матрицю справа на стовпець вільних членів:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{1.6.5}$$

де матриця-стовпець X є рішенням системи лінійних рівнянь.

Приклад 1.6.2. Розв'язати методом оберненої матриці систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язання Для розв'язання системи методом оберненої матриці позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Тоді в матричній формі система має вид: $AX = B$.

Знайдемо визначник матриці A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 7 + 9 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 9 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 7 = 3.$$

Матриця A має обернену матрицю A^{-1}, тому що $\Delta \neq 0$.

Знаходимо обернену матрицю A^{-1} за формулою (1.4.2$'$), обчисливши попередньо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \; ; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(27 - 20) = -7 \; ; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 15 = -6 \; ;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 15 = 6; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(7 - 10) = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -(28 - 27) = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою (1.6.5) знаходимо розв'язок системи:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{3}\cdot 13 & -1\cdot 15 & -\frac{1}{3}\cdot 14 \\ -\frac{7}{3}\cdot 13 & 2\cdot 15 & -\frac{1}{3}\cdot 14 \\ 2\cdot 13 & 1\cdot 15 & 1\cdot 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=2$; $x_2=-5$; $x_3=3$.

Недоліком розв'язання системи n лінійних рівнянь з n змінними за формулами Крамера та матричним способом є незручність і велика трудомісткість їх використання у випадку, коли система має більше трьох невідомих, що пов'язано з обчисленням визначників четвертого і більшого порядків.

5. Метод Гаусса.

Розглянемо систему (1.6.1) m лінійних рівнянь з n невідомими в загальному випадку. Як вже було зауважено, що метод Крамера й метод оберненої матриці пов'язані з великою обчислювальною роботою. Існують більш економічні методи розв'язування систем лінійних рівнянь, що ґрунтуються на попередньому перетворенні системи.

Елементарними перетвореннями системи (1.6.1) називаються наступні перетворення:

1) перестановка двох довільних рівнянь системи;
2) множення обох частин рівняння на відмінне від нуля число;
3) додавання до обох частин рівняння відповідних частин другого, помножених на одне і теж саме число.

Елементарні перетворення переводять дану систему рівнянь у еквівалентну систему. Дві системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними, якщо кожне рішення однієї системи, якщо воно існує, є рішенням другої, та навпаки.

Метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих – полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи трикутного виду, з якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) невідомих, знаходять всі інші невідомі.

Метод Гаусса успішно застосовується для будь-якої кількості невідомих в лінійної системи.

Приклад 6.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

Розв'язання

Виключимо невідому x_1 із усіх рівнянь, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на 3 і віднімемо отримане рівняння від другого; потім помножимо перше рівняння на 5 і віднімемо від третього; помножимо перше рівняння на 4 і віднімемо від четвертого. Отримана система має вигляд:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ \quad 18x_2 - 11x_3 - 7x_4 = -13 \\ \quad 18x_2 - 18x_3 - 12x_4 = -12 \\ \quad 18x_2 - 11x_3 - 5x_4 = -19. \end{cases}$$

Щоб виключити невідому x_2 із усіх рівнянь, крім першого і другого, віднімемо друге рівняння від третього і четвертого. Отримана система має трикутний вигляд.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ \quad 18x_2 - 11x_3 - 7x_4 = -13 \\ \quad\quad -7x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad\quad\quad 2x_4 = -6. \end{cases}$$

З четвертого рівняння знайдемо невідому $x_4 : x_4 = -\frac{6}{2} = -3.$

Підставимо x_4 у трете рівняння і знайдемо $x_3 = 2$. Потім, підставивши в друге рівняння значення x_3 і x_4, одержимо:

$$x_2 = \frac{-13 + 7 \cdot (-3) + 11 \cdot 2}{18} = \frac{-13 - 21 + 22}{18} = \frac{-12}{18} = -\frac{2}{3}.$$

Аналогічно, з першого рівняння знайдемо $x_1 = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; 2; -3)$ – рішення даної системи.

Тема 3. Елементи векторної алгебри. Елементи аналітичної геометрії

План:

1. *Основні поняття*
2. *Основні лінійні операції над векторами*
3. *Рівняння прямої на площині*
4. *Рівняння площини і прямої в просторі*

Список рекомендованої літератури: [1], [2],[3], [6].

1. Основні поняття

Означення. *Радіус-вектором точки* A називається вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, початок якого співпадає з початком координат, а кінець знаходиться в точці A (рис. 1.1).

Означення. *Декартовими прямокутними координатами* x, y, z *вектора* $\vec{r} = (x; y; z)$ називаються його проекції на координатні осі Ox, Oy, Oz: $x = \text{пр}_{Ox}\vec{r}$; $y = \text{пр}_{Oy}\vec{r}$; $z = \text{пр}_{Oz}\vec{r}$.

Означення. *Одиничні вектори координатних осей* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 1.1) - взаємно перпендикулярні ($\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$) і їх довжини дорівнюють одиниці ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$), їх називають *ортами*. В координатній формі їх можна записати у вигляді :

$$\vec{i} = (1;0;0);\ \vec{j} = (0;1;0);\ \vec{k} = (0;0;1).$$

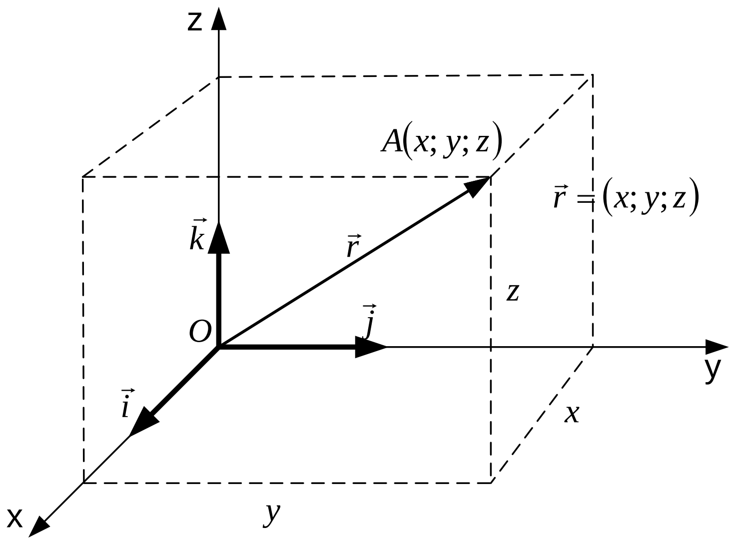


Рис. 1.1 - Одиничні вектори декартових прямокутних координатних осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Вектор $\vec{r}$ можна виразити через вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ за правилом паралелепіпеда, як показано на рис. 1.1:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1.8.1)$$

Довжину вектора можна виразити через його координати за формулою

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,. \qquad (1.8.2)$$

Щоб знайти *координати довільного вектора* $\overrightarrow{AB}$, потрібно із координат його кінця $B(x_B, y_B, z_B)$ відняти координати початку $A(x_A, y_A, z_A)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A), \qquad (1.8.3)$$

Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ можна знайти за формулою

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \,. \qquad (1.8.4)$$

Відстань між точками завжди більше нуля. При цьому $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$.

2. Основні лінійні операції над векторами.

1. Якщо вектор $\vec{a} = (x; y; z)$ помножити на число λ, то отримаємо вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ з координатами $\vec{b} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.

Таким чином, якщо вектори $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ колінеарні, то їх координати зв'язані співвідношеннями

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda \,. \qquad (1.8.5)$$

2. Якщо додати вектор $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ до $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то отримаємо вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ з координатами $\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$.

3. Якщо від вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ відняти вектор $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то отримаємо вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ з координатами $\vec{c} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Приклад 1.8.1. В трикутнику ABC з вершинами $A(1;2;4)$, $B(3;5;2)$ і $C(6;3;5)$ знайти: а) довжини сторін трикутника; б) використовуючи координатне представлення векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$, перевірити правильність співвідношень: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Розв'язання. а) Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ за формулою (1.8.3):

$$\overrightarrow{AB} = (3-1; 5-2; 2-4) = (2;3;-2);\ \overrightarrow{BC} = (6-3; 3-5; 5-2) = (3;-2;3);$$

$$\overrightarrow{AC} = (6-1; 3-2; 5-4) = (5;1;1).$$

За формулою (1.8.4) знайдемо довжини цих векторів:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17};\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27}\,.$$

Справедлива нерівність $\left|\overrightarrow{AB}\right| \le \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{CB}\right|$: $\sqrt{27} \le \sqrt{17} + \sqrt{22}$.

б) За правилом додавання векторів:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (2+3; 3-2; -2+3) = (5;1;1) = \overrightarrow{AC}\,.$$

За правилом віднімання векторів:

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(5-2;1-3;1+2)=(3;-2;3)=\overrightarrow{BC}.$$

Таким чином, обидва співвідношення (правила додавання і віднімання векторів) вірні.

Означення. *Скалярним добутком двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається як $\vec{a}\cdot\vec{b}$ і згідно означення

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \qquad (1.8.6)$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, заданих у координатній формі, дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (1.8.7)$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (1.8.8)$$

Необхідна і достатня ***умова перпендикулярності двох векторів*** $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \qquad (1.8.9)$$

Приклад 1.8.2. Знайти кути трикутника з вершинами, $A(1;1;1)$, $B(1;-2;3)$ і $C(2;1;4)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, що виходять з вершини A: $\overrightarrow{AB}=(0;-3;2)$ і $\overrightarrow{AC}=(1;0;3)$.

Тоді $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\cdot1+(-3)\cdot0+2\cdot3=6$; $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+0^2+3^2}=\sqrt{10}$. За формулою (1.8.9) знайдемо

$$\cos\hat{A}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6}{\sqrt{130}} \quad \text{і} \quad \hat{A}=\arccos\frac{6}{\sqrt{130}}.$$

Відповідно: $\hat{B}=\arccos\frac{7}{\sqrt{143}}$ і $C=\arccos\frac{4}{\sqrt{110}}$.

Приклад 1.8.3. Знайти параметр λ, при якому вектори $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ і $\vec{b}=\lambda\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{k}$ перпендикулярні.

Розв'язання. За умовою вектори перпендикулярні, тому з формули (1.8.7) отримаємо

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}\right)\cdot\left(\lambda\vec{i}+\vec{j}+\lambda\vec{k}\right)=1\cdot\lambda+2\cdot1+3\cdot\lambda=4\lambda+2=0\Rightarrow\ \lambda=-\frac{1}{2}.$$

Приклад 1.8.4. Вектор $\overrightarrow{AB}$ виходить з точки $A(1;-2;5)$. Знайти координати точки $B(x;y;7)$, якщо відомо, що вектор $\overrightarrow{AB}$ паралельний вектору $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

Розв'язання. Так як $\overrightarrow{AB}=(x-1;y+2;2)$, то за умовою колінеарності векторів (1.8.5) отримаємо

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=-2 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=-2, \\ \dfrac{y+2}{3}=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=-8. \end{cases}$$

Таким чином, координати точки $B(-3;-8;7)$.

Означення. *Векторним добутком* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається як $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє умовам:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (рис. 1.2).

Векторний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, які задані в координатній формі, обчислюється за формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (1.8.10)$$

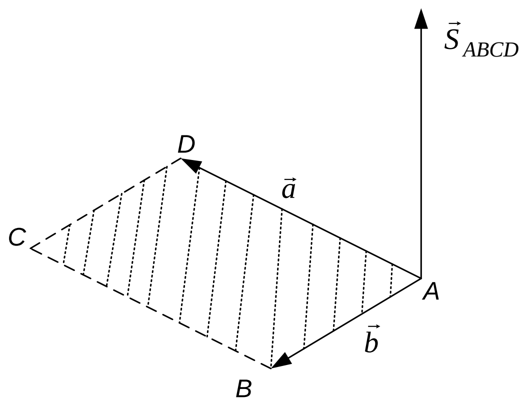


Рис. 1.2 - Геометричний зміст векторного добутку векторів

Приклад 1.8.5. Знайти векторний добуток векторів: $\vec{a}=\vec{j}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$.

Розв'язання. За формулою (1.8.10):

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}=-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}.$$

Приклад 1.8.6. Знайти площу трикутника ABC з вершинами $A(1;1;-1)$, $B(1;2;3)$ і $C(2;1;2)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, що мають спільну вершину A: $\overrightarrow{AB}=(0;1;4)$ і $\overrightarrow{AC}=(1;0;3)$. Тоді площу трикутника можна знайти за формулою $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Знайдемо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}.$$

Тоді площа трикутника $S_{ABC}=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Означення. Якщо вектор $\vec{a}$ помножити векторно на $\vec{b}$ та векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на $\vec{c}$, то в результаті отримаємо число, яке називається *мішаним добутком* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. При цьому справедлива рівність $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Мішаний добуток трьох векторів $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ і $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$, які задані в координатній формі, обчислюється за формулою

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \qquad (1.8.11)$$

3. Рівняння прямої на площині

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом – це рівняння виду

$$y=kx+b, \qquad (1.9.1)$$

де k – кутовий коефіцієнт, який визначається як $k=tg\alpha$, де α – кут між прямою і додатним напрямом осі Ox, b – величина відрізка, що відсікається прямою на осі Oy: – якщо $b>0$, то пряма перетинає вісь ординат вище початку координат; – якщо $b<0$, то – нижче початку координат; – якщо $b=0$, то пряма проходить через початок координат; – якщо $b=0$ і $k=0$, то отримаємо рівняння прямої $y=0$; якщо $k=0$, то $y=b$ – рівняння прямої паралельної осі абсцис, що проходить через точку $(0;b)$). $x=a$ – рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $(a;0)$.

Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1;y_1)$ ***в заданому напрямі*** (який визначається кутовим коефіцієнтом k), має вигляд

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (1.9.2)$$

Рівняння (1.9.2) ще називається *рівнянням пучка прямих*.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1,y_1)$ і

$M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (1.9.3)$$

Параметричне рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\cdot t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\cdot t, \end{cases} \qquad (1.9.4)$$

де t – параметр, що змінюється в межах $(-\infty;\infty)$. При $t = 0$ одержуємо координати точки $M_1(x_1; y_1)$, а при $t = 1$ – координати точки $M_2(x_2; y_2)$.

Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1, \qquad (1.9.5)$$

де a – величина відрізка, що відсікається прямою від осі Ox, а b – від осі Oy.

Загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1.9.6)$$

де A і B – числа, які одночасно не дорівнюють нулю.

Кожна пряма, яка задана рівнянням (1.9.6), ділить координатну площину на дві півплощини: точки першої півплощини є розв'язком нерівності $Ax + By + C > 0$, точки другої півплощини є розв'язком нерівності $Ax + By + C < 0$. Щоб визначити, яка з півплощин задовольняє нерівності $Ax + By + C > 0$, необхідно узяти координати будь-якої точки півплощини і перевірити знак нерівності. Якщо координати точки задовольняють нерівності, то і всі точки цієї півплощини є розв'язком нерівності.

Приклад 1.9.1. Знайти рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1;2)$ і $B(3;5)$. Визначити її кутовий коефіцієнт.

Розв'язання. Підставимо координати точок в рівняння (1.9.3):

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{3-1} \Rightarrow \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{2}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $\frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{2}$.

$$2y - 4 = 3x - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \to k = \frac{3}{2}.$$

Кут θ між прямими $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$ визначається за формулою

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}, \qquad (1.9.7)$$

де θ – кут, на який потрібно повернути першу пряму проти годинникової стрілки, щоб вона збіглася з другою прямою.

Умова паралельності прямих

$$k_2 = k_1. \qquad (1.9.8)$$

Умова перпендикулярності прямих

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (1.9.9)$$

Якщо прямі задати у загальному вигляді $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то:

- умова паралельності прямих заданих в загальному вигляді

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1}{B_1} \text{ або } A_1B_2 - B_1A_2 = 0; \qquad (1.9.10)$$

- умова перпендикулярності прямих заданих в загальному вигляді

$$\frac{A_2}{B_2} = -\frac{B_1}{A_1} \text{ або } A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (1.9.11)$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (1.9.12)$$

де $C = -(Ax + By)$.

Приклад 1.9.2. Відомі координати вершин трикутника ABC: $A(1;1)$, $B(5;2)$, $C(3;4)$. Знайти: а) рівняння прямої, що проходить через висоту, опущену з вершини A; б) рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB; в) знайти довжини висот трикутника, опущених з вершин A і C.

Розв'язання. а) Висота, опущена з вершини A, перпендикулярна стороні BC трикутника. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки B і C: $\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-5}{3-5} \Rightarrow \frac{y-2}{2} = \frac{x-5}{-2} \Rightarrow y = -x + 7 \Rightarrow k_1 = -1.$

Висота перпендикулярна цій прямій, а значить кутовий коефіцієнт висоти $k_2 = -\frac{1}{k_1} = 1$. За формулою (1.9.2) запишемо рівняння висоти. Оскільки пряма проходить через точку $A(1;1)$, то $(y-1) = 1 \cdot (x-1) \Rightarrow y = x$.

б) Побудуємо рівняння прямої, що проходить через точки A і B: $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{5-1} \Rightarrow -x + 4y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{4}$.

Оскільки пряма, що проходить через точку C, паралельна прямій AB, то $k_2 = k_1 = \frac{1}{4}$. За формулою (1.9.2) запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k_2 = \frac{1}{4}$, яка проходить через точку $C(3;4)$:

$$\left(y-4\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(x-3\right)\ \rightarrow\ y=\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}.$$

в) Знайти довжину висоти, опущеної з вершини A на сторону BC трикутника – це значить знайти відстань від точки A до прямої BC.

Так як координати точки $A(1;1)$, а пряма BC описується рівнянням $y+x-7=0$, то за формулою (1.9.12) отримаємо $h_{A;BC}=\frac{\left|1\cdot 1+1\cdot 1-7\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Аналогічно, $h_{C;AB}=\frac{\left|4\cdot 4-1\cdot 3-3\right|}{\sqrt{4^2+\left(-1\right)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$.

Приклад 1.9.3. Знайти кут між прямими $2x+3y+4=0$ і $-3x+2y+1=0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння: $2x+3y+4=0\ \rightarrow\ y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$ $\rightarrow\ k_1=-\frac{2}{3}$ і $-3x+2y+1=0\ \rightarrow\ y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ k_2=\frac{3}{2}$.

Так як $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{3}{2}$, то ці прямі перпендикулярні, а значить $\theta=90^\circ$.

4. Рівняння площини і прямої в просторі

Параметричне рівняння прямої в просторі, що проходить через точку $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ і має напрямний вектор $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$:

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t, \end{cases} \tag{1.10.1}$$

де параметр t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$.

Канонічне рівняння прямої в просторі:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}, \tag{1.10.2}$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ і $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{1.10.3}$$

При цьому $x_2\neq x_1$, $y_2\neq y_1$, $z_2\neq z_1$. Якщо, наприклад, $x_2=x_1$ для всіх точок прямої, то маємо пряму перпендикулярну осі Ox, яка перетинає її в точці $x=x_1$.

Приклад 1.10.1. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(1;2;3)$ і $B(2;3;1)$, в канонічній і параметричній формі.

Розв'язання. *За* формулою (1.10.3) отримаємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{3-2}=\frac{z-3}{1-3} \to \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2}.$$

Запишемо параметричні рівняння прямої. Нехай $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-2}=t$

, тоді $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2+t, \\ z=3-2t, \end{cases}$ де параметр $t\in(-\infty;\infty)$.

Загальне рівняння площини в просторі

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{1.10.4}$$

де $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, якщо площина проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Розглянемо окремі випадки, коли коефіцієнти рівняння (1.10.4) дорівнюють нулю:

1. $D=0$. Рівняння $Ax+By+Cz=0$ визначає площину, що проходить через початок координат.

2. $C=0$. Рівняння $Ax+By+D=0$ визначає площину, паралельну осі Oz, її нормаль $\vec{n}=(A;B;0)$ перпендикулярна осі Oz.

3. $C=0$ і $D=0$. Рівняння $Ax+By=0$ визначає площину, що проходить через вісь Oz.

4. $B=0$ і $C=0$. Рівняння $Ax+D=0$ визначає площину, паралельну координатній площині yOz, її нормаль $\vec{n}=(A;0;0)$ перпендикулярна як осі Oz, так і осі Oy, а значить і площині. Площина перетинає координатну вісь Ox у точці $x=-\frac{D}{A}$.

5. $B=0$, $C=0$ і $D=0$. Рівняння $Ax=0$ або $x=0$ визначає координатну площину yOz, з нормаллю $\vec{n}=(1;0;0)$.

Аналогічно визначаються і площини, в рівняннях яких є інші коефіцієнти, які дорівнюють нулю.

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{1.10.5}$$

Рівняння площини у відрізках, що перетинає осі координат в точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{1.10.6}$$

де a,b і c – відрізки, які площина відсікає від координатних осей Ox, Oy і Oz, відповідно.

Приклад 1.10.2. Знайти рівняння прямих – перетинів площини $2x+y-2z+2=0$ з координатною площиною xOy і координати точок перетину площини з координатною віссю Oy.

Розв'язання. Перетин з координатною площиною xOy: покладемо $z=0$ і підставимо в рівняння площини, тоді $2x+y+2=0$ – рівняння прямої перетину координатної площини xOy з площиною.

Перетин з координатною віссю Oy: покладемо $z=0$, $x=0$ і підставимо в рівняння площини, отримаємо $y=-2$. $A(0;-2;0)$ – точка перетину координатної осі Oy з площиною.

Приклад 1.10.3. Укласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;1;-1)$, $B(1;-2;3)$ и $C(1;1;2)$. Записати рівняння цієї площини у відрізках.

Розв'язання. За формулою (1.10.5) отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 1-2 & -2-1 & 3-(-1) \\ 1-2 & 1-1 & 2-(-1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\cdot\begin{vmatrix} y-1 & z+1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\big(4(y-1)+3(z+1)\big)+3\big(-3(x-2)+y-1\big)=0 \Rightarrow 9x+y+3z-16=0.$$

Запишемо рівняння цієї площини у відрізках. Розділимо рівняння на 16 і отримаємо: $\dfrac{x}{16/9}+\dfrac{y}{16}+\dfrac{z}{16/3}=1$. Ця площина перетинає осі координат Ox, Oy, Oz відповідно в точках: $P_1\left(\dfrac{16}{9};0;0\right)$, $P_2(0;16;0)$, $P_3\left(0;0;\dfrac{16}{3}\right)$.

Кут φ між прямими $\begin{cases} x=x_1+a_1t, \\ y=y_1+a_2t, \\ z=z_1+a_3t \end{cases}$ і $\begin{cases} x=x_2+b_1t, \\ y=y_2+b_2t, \\ z=z_2+b_3t, \end{cases}$ визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (1.10.7)$$

Умова перпендикулярності прямих:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \qquad (1.10.8)$$

Умова паралельності прямих:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}. \qquad (1.10.9)$$

Кут φ між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (1.10.10)$$

Умова перпендикулярності площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (1.10.11)$$

Умова паралельності площин

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}. \qquad (1.10.12)$$

Якщо площини не паралельні, то вони перетинаються, їх перетином буде пряма.

Приклад 1.10.4. Визначити взаємне розташування двох площин, знайшовши кут між ними: $x - 2y + 3z + 1 = 0$ і $2x + 4y + 2z - 4 = 0$. Якщо площини перетинаються, то знайти рівняння прямої їх перетину.

Розв'язання. За умовою задачі $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) = (1;-2;3)$ і $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) = (2;4;2)$, тоді за формулою (1.10.11): $1\cdot 2 - 2\cdot 4 + 3\cdot 2 = 0$, тому площини перпендикулярні.

Знайдемо рівняння прямої – перетину цих площин:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + 4y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 2z, \\ y = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}z. \end{cases} \text{ Нехай } z = 0\text{, тоді } \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Таким чином, одна з точок прямої перетину площин має координати $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};0\right)$.

Знайдемо напрямний вектор прямої $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

.

Тоді параметричне рівняння прямої (1.10.1) має вид:

$$x = \frac{1}{2} - 16t,\ y = \frac{3}{4} + 4t,\ z = 8t.$$

Кут φ ***між прямою*** заданою параметрично $\begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t, \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ ***і площиною*** $Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \qquad (1.10.13)$$

Відстань d ***від довільної точки*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***до площини***

$Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (1.10.14)$$

Приклад 1.10.5. Знайти кут між прямою і площиною: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ і $2x - y + z + 2 = 0$. Якщо вони перетинаються, то знайти координати точки перетину.

Розв'язання. Запишемо параметричне рівняння прямої. Нехай $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = t$, тоді $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$

Маємо $\vec{a} = (1;2;3)$ і $\vec{n} = (2;-1;1)$. Оскільки $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3}$, то пряма і площина перетинаються. За формулою (1.10.13) знайдемо кут між прямою і площиною:

$$\sin\varphi = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{51}} \text{ і } \varphi = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{51}}\right).$$

Знайдемо координати точки перетину прямої і площини:

$$2 \cdot (1 + t) - 1 \cdot (2 + 2t) + 1 \cdot (3 + 3t) + 2 = 0 \ \rightarrow \ 5 + 3t = 0 \ \rightarrow \ t = -\frac{5}{3}.$$

Підставимо значення параметра t в рівняння прямої і отримаємо

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{5}{3}, \\ y = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right), \\ z = 3 + 3 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}, \\ y = -\frac{4}{3}, \\ z = -2. \end{cases}$$

Точка перетину прямої і площини має такі координати $M\left(-\frac{2}{3};-\frac{4}{3};-2\right)$.

Приклад 1.10.6. Обчислити відстань від точки $A(1;1;2)$ до площини $2x - y + 3z + 1 = 0$.

Розв'язання. За формулою (1.10.14) отримаємо

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Тема 4. Границя числової послідовності та функції. Неперервність функції

План:

1. *Поняття границі послідовності і границі функції, властивості*
2. *Арифметичні дії над границями*
3. *Розкриття деяких видів невизначеностей*
4. *Неперервність функцій*
5. *Класифікація точок розривів функцій*

Список рекомендованої літератури: [1], [2],[3], [10].

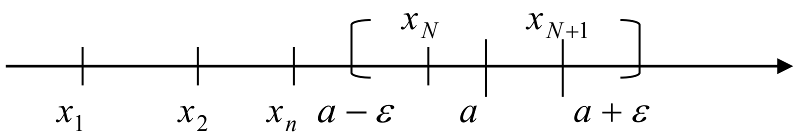
1. Поняття границі послідовності і границі функції, властивості

Означення. Нехай кожному $n \in N$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n, тобто розглядається функція натурального аргументу. У цьому випадку говорять, що задана *послідовність* дійсних чисел, яку записують у рядок у порядку зростання номерів $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$або коротко: $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, ...$

Означення. Число a називається *границею послідовності* $\{x_n\}, n = 1, 2, 3, ...$, якщо для кожного (навіть як завгодно малого) $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що при всіх $n \geq N$ виконується нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon .$$

Геометрично визначення границі означає, що починаючи з деякого номера, всі члени послідовності опиняться в інтервалі $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.



Якщо послідовність має границю, то говорять, що вона збігається, у противному випадку – розбігається.

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, то величина x_n називається нескінченно малою.

Величина, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty .$$

Властивості:

1. Алгебраїчна сума скінченого числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.
2. Добуток нескінченно малої на обмежену величину буде нескінченно малим.

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a; b)$.

Означення. Число A називається *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in (a; b)$, що задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$ виконується: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Означення. Число A називається *правобічною (лівобічною) границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що для кожного $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $(x \in (x_0, x_0 + \delta))$ виконується:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ (лівобічна границя);
- $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ (правобічна границя).

Теорема. Функція $f(x)$ має в точці x_0 границю тоді і тільки тоді, коли в цій точці існують правобічна і лівобічна границі і вони співпадають. У цьому випадку границя функції дорівнює однобічним границям.

2. Арифметичні дії над границями:

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то справедливі твердження:

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, за умови, що $B \neq 0$.

Перша визначна границя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1.11.1)$$

Друга визначна границя:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{або} \quad \lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e. \qquad (1.11.2)$$

3. Розкриття деяких видів невизначеностей

Починати знаходження границі треба з підстановки у функцію граничного значення аргументу. При цьому можемо одержати невизначеності виду:

$$\left\{\frac{0}{0}\right\};\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\};\ \{0 \cdot \infty\};\ \{\infty - \infty\};\ \{1^\infty\}.$$

Невизначеність виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ (у чисельнику і знаменнику – багаточлени). Приклади такого виду розв'язуються шляхом ділення чисельника і знаменника на старшу степінь змінної, при цьому:

а) якщо старша степінь чисельника дорівнює старшій степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях;

б) якщо старша степінь чисельника більше старшої степені знаменника, то границя дорівнює нескінченності;

в) якщо старша степінь чисельника менше старшої степені знаменника, то границя дорівнює нулю.

Приклад 1.11.1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+2}{7x^2-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+2}{7x^2-1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{7x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{7-\frac{1}{x^2}}=\frac{4}{7}$$

(бо при $x\to\infty$: $\dfrac{3}{x}\to 0$, $\dfrac{2}{x^2}\to 0$, $\dfrac{1}{x^2}\to 0$).

Приклад 1.11.2.Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2}{2x^2+3x+2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+5x^2}{2x^2+3x+2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\infty$$

(бо у границі одержали відношення скінченої до нескінченно малої).

Приклад 1.11.3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^4+2x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^4+2x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0.$$

Невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$**:**

а) якщо у чисельнику і знаменнику стоять багаточлени, тоді потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники, з метою виділення критичного множника, тобто множника, що призводить до невизначеності;

б) якщо вираз містить ірраціональність у чисельнику або знаменнику (або і у чисельнику і у знаменнику), тоді границю знаходять шляхом помноження чисельника і знаменника на вираз, спряжений чисельнику (знаменнику або і чисельнику і знаменнику одночасно).

Приклад 1.11.4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Приклад 1.11.5. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{-(7-x)(7+x)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\lim_{x\to 7}\frac{1}{(7+x)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{(7+7)(2+2)}=$$

$$=\frac{1}{14\cdot 4}=-\frac{1}{56}.$$

Приклад 1.11.6. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x-2-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x-3)}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 1.11.7. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Обчислимо, використовуючи першу визначну границю $\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$. Нехай $3x=y$, тоді $x=\dfrac{y}{3}$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$.

Використовуючи цю заміну, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{3\cdot\sin y}{y}=3\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3.$$

Приклад 1.11.8. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи тригонометричне перетворення, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2.$$

Приклад 1.11.9. Знайти границю $\lim\limits_{x\to \pi}(\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}x)$.

Розв'язання. Використовуючи тригонометричні перетворення, маємо:

$$\lim_{x\to\pi}(\sin 2x\cdot\operatorname{ctg}x)=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to\pi}\left(2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)=.$$

$$=\lim_{x\to\pi}(2\cdot\cos^2 x)=2\lim_{x\to\pi}\cos^2 x=2\cdot 1=2$$

Невизначеність виду $\left\{1^\infty\right\}$. Розкривається за допомогою другої визначної границі.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{\frac{x}{-x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{-x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{-x}\right)}=e^0=1.$$

Приклад 1.11.10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-7}\right)^{2x+1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-7}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x-7)+9}{3x-7}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{9}{3x-7}\right)^{\frac{3x-7}{9}}\right]^{\frac{9\cdot(2x+1)}{3x-7}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x+9}{3x-7}}=e^{\frac{18}{3}}=e^6.$$

4. Неперервність функцій

Розглянемо функцію $y=f(x)$, визначену на інтервалі (a,b) і деяку точку x_0 з цього інтервалу.

Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Для функції неперервної в точці x_0 можна записати

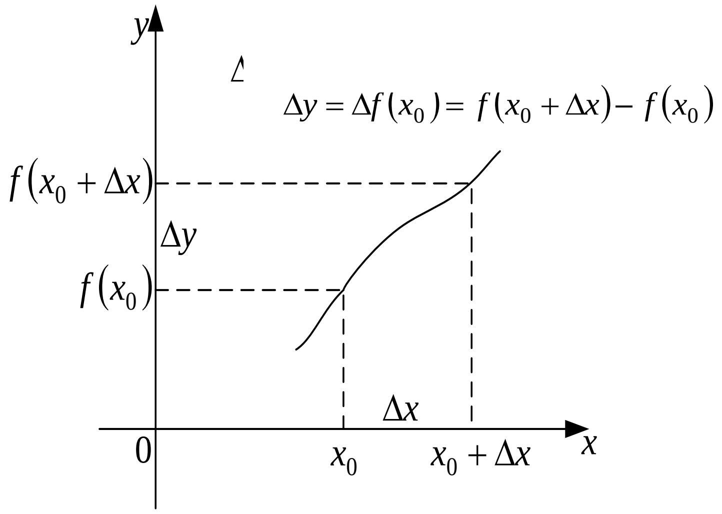
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right).$$

Визначимо приріст функції і її аргументу. ***Приростом аргументу функції в точці*** x_0 називається $\Delta x=x-x_0$, де $x, x_0\in(a,b)$. Приростом функції в точці x_0 називається $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=$ $=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ (див. рис. 5.8).

Очевидно, якщо $x\to x_0$, то $\Delta x\to 0$. Тоді, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$ або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$.

На підставі цього дамо нове означення неперервності функції. Якщо функція $y=f(x)$ визначена на інтервалі (a,b), то вона називається ***неперервною в*** деякій ***точці*** x_0 з цього інтервалу, якщо приріст функції

$$\Delta f(x_0)\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0. \qquad (5.9.3)$$



Приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0

Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні в точці x_0, то також неперервна в цій точці їх сума $f_1(x) + f_2(x)$, різниця $f_1(x) - f_2(x)$, добуток $f_1(x) \cdot f_2(x)$ і відношення $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ за умови, що $f_2(x_0) \neq 0$.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і при цьому $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, то говорять, що функція в точці $x = a$ ***неперервна справа***. Якщо функція $y = f(x)$ визначена при $x = b$ і при цьому $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$, то говорять, що функція в точці $x = b$ ***неперервна зліва***.

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною на інтервалі*** (a,b) (на відрізку $[a,b]$), якщо вона неперервна в кожній його точці (а для відрізка, окрім того: в точці a – неперервна справа, в точці b – неперервна зліва).

Всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

○ **Приклад.** Довести неперервність функцій $y = f(x)$:

а) $f(x) = 2x^2 + 1$; б) $f(x) = \sin 3x$.

Розв'язання. а) Візьмемо довільне x з області визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$ і знайдемо приріст функції $f(x) = 2x^2 + 1$:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 + 1 - (2x^2 + 1) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$.

Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(4x\Delta x + 2(\Delta x)^2\right) = 4x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2 \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^2 = 4x \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 = 0$, тобто $\Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

$f(x) = 2x^2 + 1$ – неперервна функція в області її визначення;

б) Візьмемо довільне x з області визначення функції $x \in (-\infty; +\infty)$ і знайдемо приріст функції $f(x) = \sin 3x$:

$$\Delta f(x)= f(x+\Delta x)- f(x)=\sin 3(x+\Delta x)-\sin 3x = 2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right).$$

Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{3\Delta x}{2}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)=2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{3\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)=0.$$

Оскільки $\cos\left(3x+\dfrac{3\Delta x}{2}\right)$ – обмежена функція, а $\sin\dfrac{3\Delta x}{2}$ – н. м. ф. при $\Delta x\to 0$, то, згідно теореми 5.4, $\Delta f(x)$ – н. м. ф. при $\Delta x\to 0$, тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$. Таким чином, $\Delta f(x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

$f(x)=\sin 3x$ – неперервна функція в області її визначення. ●

Приведемо без доведення теореми, що визначають поведінку неперервної функції на відрізку.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на ньому свого найменшого і найбільшого значення, тобто $\min f(x)= f(x_1)$ і $\max f(x)= f(x_2)$, де $x_1, x_2\in[a,b]$.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $\min_{[a,b]} f(x)= f(x_1)$, $\max_{[a,b]} f(x)= f(x_2)$, то для будь-якого числа C, що задовольняє нерівності $f(x_1)\le C\le f(x_2)$, існує хоча б одна точка $x_0\in[a,b]$ така, що $C=f(x_0)$.

Зауваження. Якщо функція неперервна на інтервалі, то вона може і не мати максимального або мінімального значення. Наприклад, функція $y=2x+4$ на інтервалі $(1,2)$ може приймати максимальне і мінімальне значення тільки на кінцях інтервалу, які не належать йому. Таким чином, функція не досягає свого максимального і мінімального значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і на його кінцях приймає значення з протилежними знаками, тобто $f(a)<0,\ f(b)>0$ або $f(a)>0,\ f(b)<0$, то на відрізку $[a,b]$ існує хоча б одна точка x_0 така, що $f(x_0)=0$.

5. Класифікація точок розривів функцій

Якщо функція $y=f(x)$ невизначена в деякій точці x_0 або якщо функція в ній визначена, але не є неперервною, то точка x_0 називається ***точкою розриву функції***, а функція $y=f(x)$ називається ***розривною***. $y=f(x)$

Розрізняють точки розриву першого, другого роду і точки усувного розриву функції.

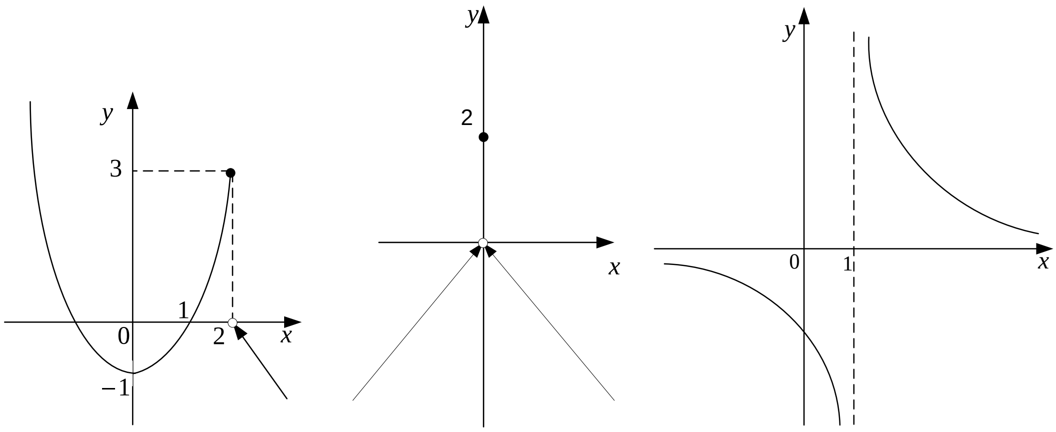
Точка розриву x_0 функції $f(x)$ називається ***точкою розриву першого роду***, якщо функція в цій точці має скінченні однобічні границі, які в загальному випадку не рівні між собою, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)= f(x_0-0)\ne \lim_{x\to x_0+0} f(x)= f(x_0+0).$$

Наприклад, $x_0 = 2$ – точка розриву першого роду для функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \textit{якщо } x \le 2; \\ -x + 2, \textit{якщо } x > 2. \end{cases}$ Дійсно, однобічні границі скінченні і не рівні між собою: $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x^2 - 1) = 3$ і $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (-x + 2) = 0$.

Величина $\Delta = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ називається ***стрибком функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0. Так, для функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{якщо } x \le 2; \\ -x + 2, \text{якщо} x > 2 \end{cases}$ $\Delta = |f(2 + 0) - f(2 - 0)| = 3$.

Точка розриву першого роду x_0 називається ***точкою усувного розриву функції*** $f(x)$, якщо однобічні границі функції рівні $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$. Якщо змінити або довизначити таку функцію в точці x_0 (якщо вона не була визначена), поклавши $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то вийде функція, неперервна в точці x_0.



а) б) в)

Приклади точок розриву функцій:

а) $x_0 = 2$ - точка розриву першого роду; б) $x_0 = 0$ - точка усувного розриву;

в) $x_0 = 1$ - точка розриву другого роду

Наприклад, $x_0 = 0$ – точка усувного розриву першого роду для функції $f(x) = \begin{cases} x, \textit{якщо } x < 0; \\ 2, \textit{якщо } x = 0; \\ -x, \textit{якщо } x > 0. \end{cases}$ Дійсно, однобічні границі рівні: $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} x = 0$ і $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} (-x) = 0$ (див. рис. 5.10б).

Точка розриву x_0 функції $f(x)$ називається ***точкою розриву другого роду***, якщо хоча б одна з однобічних границь $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ є нескінченною або не існує.

Наприклад, $x_0 = 1$ – точка розриву другого роду для функції $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Дійсно, однобічні границі дорівнюють нескінченності: $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-0} = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+0} = \infty$.

○ **Приклад** Дослідити функції $y = f(x)$ на неперервність:

а) $f(x) = \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ в точці $x_0 = 0$; б) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ в точці $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, якщо\ x < 2; \\ x^2 + 1, якщо\ x \geq 2 \end{cases}$ в точці $x_0 = 2$;

г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, якщо\ x < 0; \\ 4, якщо\ x = 0; \\ x^2, якщо\ x > 0 \end{cases}$ в точці $x_0 = 0$;

д) $f(x) = \begin{cases} x + 3, якщо\ x < 2; \\ 5, якщо\ x = 2; \\ x^2 + 1, якщо\ x > 2 \end{cases}$ в точці $x_0 = 2$.

Розв'язання. а) Функція $f(x) = \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ не визначена в точці $x_0 = 0$. Це точка розриву:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} = \frac{2+e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} = 2 \text{ і } \lim_{x \to 0+0} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0+0} \frac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1} = \frac{2e^{-\infty}+1}{e^{-\infty}-1} = -1.$$

Оскільки однобічні границі скінченні і різні, то $x_0 = 0$ – точка розриву І-го роду;

б) Функція $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ не визначена в точці $x_0 = 2$. Це точка розриву:

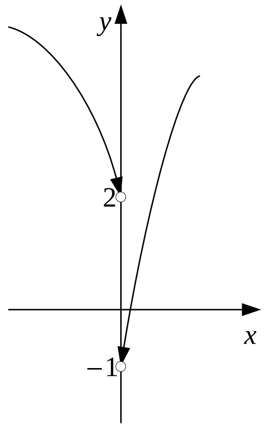
$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-0} = -\infty \text{ і } \lim_{x \to 2+0} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Оскільки однобічні границі нескінченні, то $x_0 = 2$ – точка розриву ІІ роду;

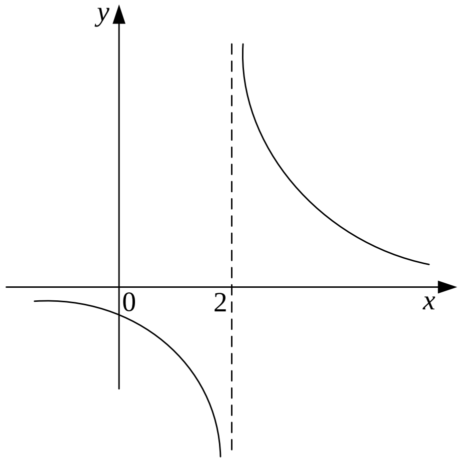
в) Функція $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, \text{якщо } x < 2; \\ x^2 + 1, \text{якщо } x \geq 2 \end{cases}$ визначена в точці $x_0 = 2$; $f(2) = 5$:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x^3 - 1) = 7 \text{ і } \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x^2 + 1) = 5.$$

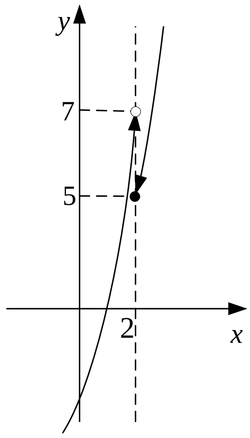
Оскільки однобічні границі різні і скінченні, то $x_0 = 2$ – точка розриву І роду;



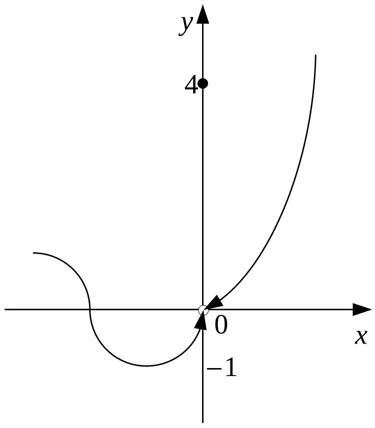
а)



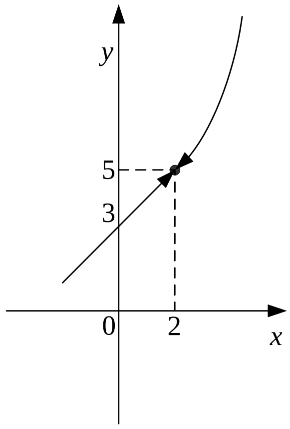
б)



в)



г)



д)

До прикладу:

а) $x_0 = 0$ - точка розриву І-го роду; б) $x_0 = 2$ - точка розриву ІІ-го роду;

в) $x_0 = 2$ - точка розриву І-го роду; г) $x_0 = 0$ - точка усувного розриву;

д) функція неперервна в точці $x_0 = 2$

г) Функція $f(x) = \begin{cases} \sin x, якщо\ x < 0; \\ 4, якщо\ x = 0; \\ x^2, якщо\ x > 0 \end{cases}$ визначена в точці $x_0 = 0$; $f(0) = 4$:

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \sin x = \sin 0 = 0$ і $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} x^2 = 0$.

Оскільки однобічні границі співпадають, то $x_0 = 0$ – точка усувного розриву І-го роду;

д) Функція $f(x) = \begin{cases} x + 3, якщо\ x < 2; \\ 5, якщо\ x = 2; \\ x^2 + 1, якщо\ x > 2 \end{cases}$ визначена в точці $x_0 = 2$; $f(2) = 5$:

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} (x + 3) = 5$ і $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} (x^2 + 1) = 5$.

Оскільки $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$, то функція неперервна в точці $x_0 = 2$

.

Тема 5. Похідна функції. Диференціал функції однієї змінної. Основні теореми диференціального числення. Диференційованість функції багатьох змінних

План:

1. *Поняття похідної, її властивості*
2. *Похідні вищих порядків*
3. *Диференціювання деяких функцій*
4. *Поняття диференціала, його геометричний і механічний зміст*
5. *Диференційованість функції багатьох змінних.*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[7], [10].

1. Поняття похідної, її властивості

Означення. Нехай $y = f(x)$ задана на інтервалі (a, b). Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a, b)$ і додамо їй приріст $\Delta x \neq 0$ так, щоб $(x_0 + \Delta x) \in (a, b)$. Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то її називають *похідною* функції $f(x)$ в точці x_0. Якщо така границя існує в кожній точці $x_0 \in (a, b)$, то вона називається похідною від функції $f(x)$ на (a, b). Операція знаходження похідної від функції $f(x)$ називається *диференціюванням.*

Для позначення похідної в точці x використовуються символи:

$$y'_x;\ f'(x);\ \frac{dy}{dx}.$$

Правила диференціювання:

1. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x_0, то в точці x_0 диференційовані і функції $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $c \cdot u(x)$ $(c = const)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $(v(x) \neq 0)$ та справедливі формули:

- $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$
- $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$
- $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x);$
- $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}.$

2. Якщо $y = f(x)$ диференційована в точці $y_0 = f(x_0)$, тоді складна функція $z = g(f(x))$ диференційована в точці x_0 і справедлива формула:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

тобто похідна складної функції $z = g(f(x))$ дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $g(f(x))$ на похідну внутрішньої функції $f(x)$.

Зауваження. Правило знаходження похідної складної функції поширюється на композицію будь-якого скінченого числа функцій. Наприклад, для обчислення похідної функції $y = f(\varphi(\psi(t)))$, якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$ диференційовані, справедлива формула:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Наведемо таблицю похідних основних елементарних функцій:

Функція $y = f(x)$	Похідна y'
$y = const$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^a$	$y' = a \cdot x^{a-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Розглянемо розв’язання прикладів.

Приклад 1.12.1. Знайти похідну функції $y = 6x^2 - 2x + 4$.

Розв’язання. Користуючись таблицею похідних і властивостями похідних, маємо:

$$y' = 6 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 12x - 2.$$

Приклад 1.12.2. Знайти похідну $y = x^3 \ln x$.

Розв'язання.

$$y' = \left(x^3 \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \left(\ln x\right)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = \\ = 3x^2 \cdot \ln x + x^2 = x^2\left(3\ln x + 1\right).$$

Приклад 1.12.3. Знайти похідну $y = \dfrac{2^x}{\sin x}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\frac{2^x}{\sin x}\right)' = \frac{\left(2^x\right)' \cdot \sin x - 2^x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x} = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot \sin x - 2^x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ = \frac{2^x\left(\ln 2 \cdot \sin x - \cos x\right)}{\sin^2 x}.$$

Приклад 1.12.4. Знайти похідну $y = \mathrm{arctg}\left(\ln 2x\right)$.

Розв'язання. Через те, що функція y є складною функцією виду $y = \mathrm{arctg}u$, де $u = \ln z$, $z = 2x$, тоді маємо:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\ln 2x\right)^2} \cdot \left(\ln 2x\right)' = \frac{1}{1 + \ln^2 2x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \left(2x\right)' = \frac{1}{1 + \ln^2 2x} \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x\left(1 + \ln^2 2x\right)}.$$

Приклад 1.12.5. Знайти похідну $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right)$.

Розв'язання.

$$y' = \left(e^{\sqrt{2x}}\right)' \cdot \left(\sqrt{2x} - 1\right) + e^{\sqrt{2x}} \cdot \left(\sqrt{2x} - 1\right)' = e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2\left(\sqrt{2x} - 1\right) + \\ + e^{\sqrt{2x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2\right) = \frac{e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right)}{\sqrt{2x}} + \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} = e^{\sqrt{2x}}.$$

2. Похідні вищих порядків

Означення. Нехай функція $f(x)$ задана на (a,b) і у кожній точці $x \in (a,b)$ існує $f'(x)$. Тоді ми маємо нову функцію $z = f'(x)$, задану на (a,b). Значить, можна говорити про похідну функції z, тобто про $z' = (f'(x))'$ або про другу похідну від функції $f(x)$, що позначається $f''(x)$, y'', $\frac{d^2 y}{dx^2}$. І, узагальнюючи дану ситуацію, можна сказати, що *похідною* n*-го порядку* від функції $f(x)$ називається похідна від $(n-1)$-ої похідної функції $f(x)$:

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)', \; n = 2, 3, 4, \ldots$$

3. Диференціювання деяких функцій

***Диференціювання неявних функцій*.**

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будемо вважати цю функцію диференційованою.

Якщо продиференціювати по x обидві частини рівності $F(x, y) = 0$, одержимо рівняння першої степені відносно y'. Із цього рівняння легко знаходиться y', тобто похідна неявної функції.

Приклад 1.12.6. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = 4$.

Розв'язання. Тому що y є функцією від x, тоді будемо розглядати y^2 як складну функцію від x. Отже, $\left(y^2\right)' = 2yy'$. Якщо продиференціюємо по x обидві частини даного рівняння, одержимо: $2x + 2yy' = 0$, тобто $y' = -\frac{x}{y}$.

Приклад 1.12.7. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Розв'язання. Диференціюючи по x обидві частини рівняння, одержимо:

$$3x^2 + \frac{y'_x}{y} - x^2 e^y y'_x - 2xe^y = 0,$$

тобто $3x^2 y + y'_x - x^2 e^y y y'_x - 2xe^y \cdot y = 0$.

Перенесемо в одну сторону рівності всі доданки, що містять y', тоді:

$$y'_x - x^2 e^y y y'_x = 2xe^y y - 3x^2 y,$$

$$y'_x\left(1 - x^2 e^y y\right) = xy\left(2e^y - 3x\right),$$

$$y'_x = \frac{xy\left(2e^y - 3x\right)}{1 - x^2 e^y y}.$$

***Диференціювання степенево-показникової функції*:** $y = (f(x))^{\varphi(x)}$.

Щоб обчислити похідну даної функції застосовується спеціальний прийом: необхідно спочатку прологарифмувати функцію, а потім продиференціювати як складну функцію. Така процедура називається логарифмічним диференціюванням.

Приклад 1.12.8. Знайти похідну y'_x з рівняння

$$y = x^x;\ \ln y = \ln x^x = x\ln x;$$

$$(\ln y)' = (x\ln x)';\ \frac{1}{y}y'_x = x'\ln x + x(\ln x)';$$

$$\frac{y'_x}{y} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}\ \Big|\cdot y;\ \ y'_x = y(\ln x + 1).$$

Нарешті, $y'_x = x^x(\ln x + 1)$.

Зауваження. Спосіб диференціювання функції попереднім логарифмуванням також ефективний при знаходженні похідної функції, що є добутком або часткою декількох функцій.

Приклад 1.12.9. Знайти похідну $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\ln y = \ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2;\ \ln y = 2\ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right);$$

$$\ln y = 2(\ln\sin x - \ln(1+\cos x));$$

$$\ln y = 2\ln\sin x - 2\ln(1+\cos x);\ (\ln y)' = 2(\ln\sin x)' - 2(\ln(1+\cos x))';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x = 2\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x - 2\frac{1}{1+\cos x}\cdot(-\sin x);$$

$$y'_x = 2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2\left(ctgx + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right).$$

4. Поняття диференціала, його геометричний і механічний зміст

Розглянемо функцію $y = f(x)$, що диференціюється в області її визначення. Тоді за означенням похідної в точці x $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Звідси,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)\ \to\ \Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, лінійна відносно Δx; $o(\Delta x)$ – нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx ($\sim(\Delta x)^2$).

Перший доданок дає головну частину приросту функції – лінійну відносно приросту аргументу Δx, яку називають ***диференціалом функції в точці*** x:

$$df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $f(x) = x$, то $dx = \Delta x$, тобто диференціал і приріст аргументу співпадають. Тоді $df(x) = f'(x)dx\ \to\ f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, тобто похідну функцію можна представити як відношення двох диференціалів.

Диференціал функції має властивості, аналогічні властивостям похідної.

1. *Диференціал постійної величини* C *дорівнює нулю:* $dC = 0$.

2. *Диференціал алгебраїчної суми функцій, що диференціюються, дорівнює алгебраїчній сумі диференціалів цих функцій*:

$$d\left(f_1 \pm f_2 \pm \ldots \pm f_n\right) = df_1 \pm df_2 \pm \ldots \pm df_n .$$

3. *Диференціал добутку двох диференційованих функцій* u *і* v *дорівнює добутку диференціала першої функції на другу плюс добуток першої функції на диференціал другої, тобто*

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv .$$

4. *Диференціал частки двох диференційованих функцій* u *і* v *визначається за формулою*

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2} .$$

5. *Диференціал складної функції* $y = y(u)$, *де* $u = u(x)$, *дорівнює добутку похідної даної функції за проміжним аргументом* u *на диференціал цього проміжного аргументу* du, *тобто*

$$dy = y'_u \cdot du .$$

Оскільки $du = u'_x \cdot dx$, то формулу (6.4.6) перепишемо у вигляді

$$dy = y'_u \cdot du = y'_u \cdot u'_x \cdot dx = y'_x \cdot dx ,$$

тобто отримано твердження про ***інваріантність форми першого диференціала***: *форма першого диференціала не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною або функцією іншого аргументу*.

Оскільки диференціали функцій визначаються через їх похідні, то отримаємо таблицю для диференціалів всіх основних елементарних функцій.

Таблиця диференціалів

№	Диференціал функції	№	Диференціал функції
1.	$d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$	10.	$d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx$
2.	$d\left(x^\gamma\right) = \gamma x^{\gamma-1} \cdot dx$	11.	$d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$
3.	$d\left(a^x\right) = a^x \ln a \cdot dx$	12.	$d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$
4.	$d\left(e^x\right) = e^x \cdot dx$	13.	$d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx$
5.	$d(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \cdot dx$	14.	$d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot dx$
6.	$d(\ln x) = \frac{1}{x} \cdot dx$	15.	$d(sh\ x) = chx \cdot dx$

7.	$d(\sin x) = \cos x \cdot dx$	16.	$d(ch\ x) = shx \cdot dx$
8.	$d(\cos x) = -\sin x \cdot dx$	17.	$d(th\ x) = \frac{1}{ch^2 x} dx$
9.	$d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$	18.	$d(cth\ x) = -\frac{1}{sh^2 x} \cdot dx$

○ **Приклад:** Знайти диференціали функцій $y = f(x)$:

а) $f(x) = \ln \sin x^4$; б) $f(x) = e^{arctg 4x}$.

Розв'язання. а) Оскільки $df(x) = f'(x)dx$, то $f'(x) = \left(\ln \sin x^4\right)' =$

$$= \frac{1}{\sin x^4} \cdot \left(\sin x^4\right)' = \frac{1}{\sin x^4} \cdot \cos x^4 \cdot \left(x^4\right)' = 4x^3 ctg x^4$$

і $df(x) = 4x^3 ctg x^4 dx$.

б) Оскільки $df(x) = f'(x)dx$, то $f'(x) = \left(e^{arctg 4x}\right)' =$

$$= e^{arctg 4x} \cdot (arctg 4x)' = e^{arctg 4x} \cdot \frac{1}{1 + (4x)^2} \cdot (4x)' = \frac{4e^{arctg 4x}}{1 + (4x)^2}$$

і $df(x) = \frac{4e^{arctg 4x}}{1 + (4x)^2} dx$.

5. Диференційованість функції багатьох змінних

При вивченні багатьох явищ доводиться зустрічатися з функціями двох і більше незалежних змінних.

Розглянемо найпростіший випадок – функцію двох незалежних змінних.

Змінна z називається ***функцією незалежних змінних*** x і y на множині D, якщо кожній парі (x, y) їх значень з D – за деяким правилом або законом – ставиться у відповідність одне певне значення z.

Множина D називається ***областю визначення функції***; змінні x, y по відношенню до їх функції називаються її ***аргументами,*** а функціональна залежність між z і x, y позначається

$$z = f(x, y) \text{ або } z = z(x, y).$$

Границя і неперервність функції двох змінних

Введемо допоміжне поняття – поняття околу даної точки.

Околом радіусу r ***точки*** $M_0(x_0, y_0)$ називається множина всіх точок площини (x, y), координати яких задовольняють нерівності $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$, тобто сукупність всіх точок площини, що лежать усередині круга радіусу r з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Нехай задана функція $z = f(x, y)$, що визначена в області D площини Oxy. Розглянемо довільну точку $M_0(x_0, y_0)$, що лежить або усередині області D або на її границі.

Число A називається ***границею функції*** $f(x, y)$ при прямуванні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $r > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, для яких $\left|\overline{MM_0}\right| < r$, виконується нерівність

$$|\, f(x, y) - A \,| < \varepsilon .$$

Якщо число A є границею функції $f(x, y)$ при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, то пишуть

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A .$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(3x^2 - 4xy\right)$.

Розв'язання. Візьмемо довільну послідовність точок, яка збігається до точки $M(2; 1)$. Наприклад,

$$M_1(3; 4),\ M_2\left(\frac{5}{2}; \frac{9}{4}\right), \ldots,\ M_n\left(\frac{2n+1}{n}; \frac{(n+1)^2}{n^2}\right), \ldots$$

Відповідна послідовність значень функції

$$3x_1^2 - 4x_1y_1,\ 3x_2^2 - 4x_2y_2, \ldots,\ 3x_n^2 - 4x_ny_n, \ldots$$

збігається до числа 4:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to 1}} \left(3x^2 - 4xy\right) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 .$$

○ **Приклад 7.9.** Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Шукана границя не існує. Дійсно, розглянемо яку-небудь послідовність точок, що збігається до точки $M(0; 0)$ уздовж прямої $x = y$. Тоді разом із співвідношеннями $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$ матиме місце $x_n = y_n$. Тому в послідовності значень функції всі числа будуть дорівнювати нулю. Значить, шукана границя дорівнює нулю. Розглянемо тепер яку-небудь послідовність точок, що збігається до точки $M(0; 0)$ уздовж осі Ox. Тоді всі $y_n = 0$, і послідовність значень функції матиме границю, що дорівнюватиме одиниці. Отже, наближаючись до точки $M(0; 0)$ за різними напрямами, дістанемо різні значення границі. Це значить, що функція $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ при $x \to 0,\ y \to 0$ границі не має. ●

Зауваження. *Окрім розглянутої вище границі функції $f(x, y)$ за одночасного прямування всіх аргументів до їх границь, доводиться мати справу і з границями іншого роду, які одержують в результаті послідовних граничних переходів за кожним аргументом окремо в тому або іншому порядку. Такі границі називаються* ***повторними*** *і позначаються*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) \text{ і } \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y).$$

Не слід думати, що повторні границі необхідно рівні. Якщо, наприклад, в області визначення $D(0, +\infty; 0, +\infty)$ узяти точку $M_0(0; 0)$ і для функції

$$f(x, y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$$

обчислити повторні границі, то отримаємо

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = y - 1, \qquad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x, y)\right] = -1,$$

тоді як

$$\lim_{y\to 0} f(x, y) = x + 1, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) = 1.$$

Може трапитися також, що одна з повторних границь існує, а інша – ні. Так буде, наприклад, для функції

$$f(x, y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x + y}.$$

Тут існує повторна границя $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x, y)\right]$, але немає повторної границі $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right)$. Ці прості приклади показують, що потрібно бути обережним при перестановці двох граничних переходів за різними змінними, а також чітко розрізняти повторні і подвійні граничні переходи.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** $M_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в цій точці і границя функції при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$ дорівнює значенню функції в точці $M_0(x_0, y_0)$, тобто

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

причому точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$ довільним способом, весь час залишаючись в області визначення функції.

Якщо обом змінним надати приростів $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то рівність $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ можна переписати у вигляді

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\right] = 0.$$

Оскільки вираз, що стоїть в квадратних дужках, є повним приростом функції Δz у точці $M_0(x_0, y_0)$, то справедливо наступне означення.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** $M_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і якщо нескінченно малим приростам змінних x і y відповідає нескінченно малий приріст функції z, тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ неперервна в будь-якій точці площини Oxy, оскільки

$$\Delta z = \left[(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2\right] - \left[x^2 + y^2\right] = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

і, отже

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають ***неперервною в області визначення***, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

1) Якщо в деякій точці $N(x_0, y_0)$ не виконується умова $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, то точка $N(x_0, y_0)$ називається ***точкою розриву функції*** $z = f(x, y)$.

○ **Приклад.** Дослідити функцію $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ на неперервність.

Розв'язання. Функція $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ неперервна в будь-якій точці площини Oxy за винятком точки $M_0(0; 0)$. Якщо $x \to 0$ і $y \to 0$, то $z \to \infty$, тобто поверхня в точці $(0; 0)$ має нескінченний шпиль.

○ **Приклад.** Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Для функції $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$ точками розриву є всі точки, що лежать на бісектрисах координатних кутів площини Oxy. В даному випадку точки розриву функції утворюють лінії $y = x$, $y = -x$.

Частинні похідні і диференціали

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних x і y.

Частинною похідною за змінною x ***функції*** $z = f(x, y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля і позначається одним з символів

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x(x, y).$$

Таким чином, згідно з означенням

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Частинною похідною за змінною y ***функції*** $z=f(x,y)$ називається границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ до приросту Δy при прямуванні Δy до нуля і позначається одним з символів

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

З означення випливає, що обчислення частинних похідних функції двох незалежних змінних проводиться за тими ж правилами, за якими обчислюються похідні функції однієї незалежної змінної, тільки слід мати на увазі, що при визначенні частинної похідної треба вважати сталими всі незалежні змінні, окрім тієї, за якою обчислюється частинна похідна.

○ **Приклад.** Обчислити частинні похідні функції $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Якщо вважати y сталою, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}.$$

Аналогічно, якщо вважати змінну x сталою, то одержимо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}.$$

○ **Приклад.** Обчислити частинні похідні функції $z=x^y$.

Розв'язання. При диференціюванні за змінною x функція z є степеневою, а при диференціюванні за змінною y – показниковою. Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\,x^{y-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x.$$

○ **Приклад 7.16.** Обчислити частинні похідні z'_x і z'_y функції $z=3axy-x^3-y^3$ в точках $M(a;0)$, $N(a;a)$.

Розв'язання. Обчислюємо частинні похідні функції

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3ay-3x^2,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3ax-3y^2,$$

і підставляємо в них координати точок M і N:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=0}}=-3a^2,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=0}}=3a^2,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=a\\y=a}}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=a}}=0.\ \bullet$$

Зауваження. *Аналогічно обчислюються частинні похідні функції* $n > 2$ *незалежних змінних.*

○ **Приклад.** Обчислити значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$ в точці $M(0; 0; 1)$.

Розв'язання. Згідно загальному правилу обчислення частинних похідних функцій декількох змінних маємо

$$f'_x(0; 0; 1) = (4x - 3y - 2z)_{\substack{x-0 \\ y=0 \\ z=1}} = -2\,; \quad f'_y(0; 0; 1) = (2y - 3x)_{\substack{x-0 \\ y=0 \\ z=1}} = 0\,;$$

$$f'_z(0; 0; 1) = (-6z - 2x)_{\substack{x-0 \\ y=0 \\ z=1}} = -6\,.$$

Частинним диференціалом за змінною x ***функції*** $z = f(x, y)$ називається головна частина частинного приросту $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Аналогічно визначається частинний диференціал за змінною y. Диференціали незалежних змінних x і y дорівнюють їх приростам, тобто

$$dx = \Delta x\,, \qquad dy = \Delta y\,.$$

Частинні диференціали позначаються так: $d_x z$ – частинний диференціал за змінною x, $d_y z$ – частинний диференціал за змінною y.

Справедливе наступне твердження: ***частинний диференціал*** функції двох незалежних змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на диференціал цієї незалежної змінної, тобто

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx\,, \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy\,.$$

Наприклад, обчислимо частинні диференціали функції $u = x^2 y + 2xz$ в точці $M_0(2; 1; 0)$. Знайдемо похідну функції u, припускаючи, що величини y і z сталі, і отримаємо частинний диференціал $d_x u$:

$$d_x u = u'_x(x, y, z)dx = (2xy + 2z)dx\,.$$

В точці $M_0(2; 1; 0)$ маємо

$$d_x u(2, 1, 0) = 4dx\,.$$

Вважаючи тепер сталими x, z, знаходимо

$$d_y u = u'_y(x, y, z)dy = x^2 dy\,,$$

$$d_y u(2, 1, 0) = 4dy\,.$$

Аналогічно знаходимо

$$d_z u = u'_z(x, y, z)dz = 2xdz\,,$$

$$d_z u(2, 1, 0) = 4dz\,.$$

Повним диференціалом функції двох незалежних змінних називається сума добутків частинних похідних функції на диференціали відповідних незалежних змінних, тобто сума частинних диференціалів за незалежними змінними.

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ позначається символом dz і обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

○ **Приклад.** Знайти повний диференціал функції

$$z = x^2 y + xy^2.$$

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy,$$

тоді за формулою (7.3.9) дістанемо

$$dz = \left(2xy + y^2\right)dx + \left(x^2 + 2xy\right)dy. \ \bullet$$

○ **Приклад.** Знайти повний диференціал функції

$$z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Розв'язання. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то повний диференціал функції має вид

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \frac{y}{\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\sqrt{x^2 + y^2}}dy. \ \bullet$$

Тема 6. Дослідження функції однієї змінної та побудова її графіку. Знаходження найбільших (найменших) значень функції.

План:

1. *Застосування диференціального числення до дослідження функцій однієї змінної*
2. *Екстремуми функції*
3. *Опуклість функції. Точки перегину*
4. *Асимптоти графіка функції*
5. *Загальна схема дослідження функції і побудови її графіку*
6. *Правило Лопіталя*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[7], [10].

1. Застосування диференціального числення до дослідження функцій однієї змінної

Теорема. Якщо похідна диференційованої функції додатна (від'ємна) усередині деякого проміжку X, то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

Практичне знаходження проміжків монотонності функції

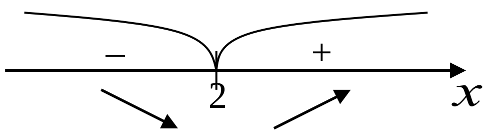
Нехай функція $f(x)$ задана на (a,b). Відмітимо на (a,b) точки, у яких або $f'(x)=0$, або $f'(x)$ не існує. Нехай це точки $x_1, x_2, \ldots x_n$, занумеровані в порядку зростання. На кожному з інтервалів $(a;x_1)$, $(x_1;x_2)$,…$(x_{n-1};x_n)$, (x_n,b) похідна $f'(x)$ неперервна і зберігає знак, що збігається зі знаком $f'(x_0)$, де x_0 – обрана для зручності обчислень точка цього інтервалу. Отже, на кожному із цих інтервалів $f(x)$ зростає при $f'(x)>0$ або спадає при $f'(x)<0$.

Приклад 1.13.1. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^2 - 4x + 3$.

Розв'язання.

Маємо $y' = 2x - 4$. Очевидно, $y' > 0$ при $x > 2$ і $y' < 0$ при $x < 2$, тому що:

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2.$$



Тобто функція спадає на інтервалі $(-\infty;2)$ і зростає на інтервалі $(2;\infty)$.

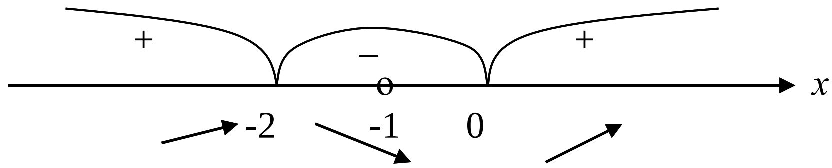
Приклад 1.13.2. Знайти інтервали монотонності функції $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

Розв'язання.

Знаходимо першу похідну функції:

$$y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x + x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(2+x)}{(x+1)^2}.$$

$y' = 0$ у точках $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Наносимо точки на числову пряму.



У проміжках $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ функція зростає; а в проміжках $(-2; -1)$, $(-1; 0)$ – спадає (точку $x = -1$ необхідно виключити, тому що функція $y = f(x)$ в цій точці не існує).

2. Екстремуми функції

Означення. Точка x_0 називається точкою *максимуму (мінімуму)* функції $f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$.

Означення. Значення функції в точці x_0 називається відповідно *максимумом (мінімумом) функції*. Максимум і мінімум функції поєднуються загальною назвою екстремуму функції.

Екстремум функції часто називають локальним екстремумом, підкреслюючи той факт, що поняття екстремуму зв'язане лише з досить малим околом точки x_0. Так що на одному проміжку функція може мати декілька екстремумів, причому може статися, що мінімум в одній точці більше максимуму в іншій.

***Необхідна умова екстремуму*:** Для того щоб функція $y = f(x)$ мала екстремум у точці x_0, необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю $\left(f'(x_0) = 0\right)$ або не існувала.

Точки, у яких виконується необхідна умова екстремуму, тобто похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними* (або стаціонарними).

Дуже важливо зазначити, що зворотне твердження невірно. Критична точка зовсім не обов'язково є точкою екстремуму.

Перша достатня умова екстремуму: якщо при переході через критичну точку x_0 похідна функції змінює свій знак з плюса на мінус, тоді x_0 є точкою максимуму, а якщо з мінуса на плюс, тоді x_0 є точкою мінімуму.

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум

1. Знайти ОДЗ функції $y = f(x)$.
2. Знайти похідну $y' = f'(x)$.
3. Знайти критичні точки функції, у яких похідна $f'(x) = 0$ або не існує.
4. Дослідити знак похідної ліворуч і праворуч від кожної критичної точки і зробити висновок про наявність екстремумів функції.

5. Знайти екстремуми (екстремальні значення) функції.

○ **Приклад 1.13.3.** Знайти екстремум функції $y=-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x-2$.

Розв'язання. Знайдемо $f'(x)=\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x-2\right)'=-3x^2+3x+18$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -3(x+2)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=-2$ і $x_2=3$.

Точки $x_1=-2$ і $x_2=3$ розбивають область визначення на інтервали $(-\infty,-2)$, $(-2,3)$ і $(3,\infty)$.

Знайдемо інтервали зростання:

$f'(x)>0 \Rightarrow -3(x+2)(x-3)>0 \Rightarrow x\in(-2,3)$;

Знайдемо інтервали спадання:

$f'(x)<0 \Rightarrow -3(x+2)(x-3)<0 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$.

Таким чином, похідна функції змінює знак з «–» на «+» при переході через точку $x_1=-2$ і з «+» на «–» при переході через точку $x_2=3$. Отже, $x_1=-2$ – точка мінімуму, а $x_2=3$ – точка максимуму; $f(-2)=-24$ і $f(3)=38{,}5$.

Всі обчислення можна звести у таблицю:

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↓	min, -24	↑	max, 38,5	↓

***Друга достатня умова екстремуму*:** якщо перша похідна $f'(x)$ двічі диференційованої функції дорівнює нулю в деякій точці x_0, а друга похідна в цій точці $f''(x_0)$ додатна, тобто x_0 точка мінімуму функції $f(x)$; якщо $f''(x_0)$ від'ємна, тоді x_0 – точка максимуму функції $f(x)$.

Схема дослідження на екстремум функції $y=f(x)$ за допомогою другої достатньої умови в цілому аналогічна схемі, наведеній вище.

3. Опуклість функції. Точки перегину.

Якщо друга похідна двічі диференційованої функції додатна (від'ємна) усередині деякого проміжку, то графік функції є увігнутим (опуклим) на цьому проміжку.

Означення. Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, що розділяє інтервали, у яких функція опукла і увігнута.

Якщо друга похідна двічі диференційованої функції при переході через деяку точку x_0 змінює свій знак, тоді x_0 – точка перегину її графіка.

Схема дослідження функції на опуклість і точки перегину

1. Знайти ОДЗ функції $y=f(x)$.
2. Знайти другу похідну функції $f''(x)$.

3. Знайти точки, у яких друга похідна $f''(x)=0$ або не існує.

4. Дослідити знак другої похідної ліворуч і праворуч від знайдених точок і зробити висновок про інтервали опуклості і наявності точок перегину.

5. Знайти значення функції в точках перегину.

Приклад 1.13.4. Знайти інтервали опуклості, увігнутості і точки перегину графіка функції $y=f(x)=\left(x^3-9x^2+15x-3\right)$.

Розв'язання. Знайдемо першу і другу похідні функції:

$$f'(x)=\left(x^3-9x^2+15x-3\right)'=3x^2-18x+15;$$

$$f''(x)=\left(3x^2-18x+15\right)'=6x-18;$$

$$f''(x)=0 \;\to\; 6x-18=0 \;\to\; x=3,\; f(3)=-12.$$

Якщо $x_0\in(-\infty,3)$, то $f''(x)<0$ – графік функції є опуклим.

Якщо $x_0\in(3,\infty)$, то $f''(x)>0$ – графік функції є увігнутим.

x	$(-\infty,3)$	3	$(3,\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$ опуклість	перегин, -12	$\cup$ увігнутість

Оскільки друга похідна змінює знак під час переходу через точку з координатами $(3,-12)$, то це точка перегину.

4. Асимптоти графіка функції

Означення. *Асимптотою* графіка функції $y=f(x)$ називається пряма, що має таку властивість: відстань від точки N, що лежить на кривій до цієї прямої прямує до нуля при нескінченому віддаленні цієї точки графіка від початку координат.

Розрізняють три види асимптот: *вертикальні, горизонтальні, похилі.*

1. Вертикальні. Якщо при $x\to a$ $f(x)\to\infty$, то $x=a$ – вертикальна асимптота.

Вертикальні асимптоти варто шукати в точках розриву функції $y=f(x)$.

2. Похилі. Пряма $y=kx+b$ є похилої асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо існують скінчені границі:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

3. Горизонтальні. Горизонтальні асимптоти – окремий випадок похилих $(k=0)$.

Приклад 1.13.5. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Функція визначена у всіх точках окрім $x_1=-1$ і $x_2=1$. Дослідимо функцію в точках розриву:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty;\ \lim_{x\to -1-0}\frac{2x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty;$$

$x_1=-1$ і $x_2=1$ – точки розриву другого роду.

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty$ і $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^3}{x^2-1}=-\infty$, то $x=-1$ і $x=1$ – вертикальні асимптоти графіка функції.

Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2;\ b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)=0.$$

Таким чином, $y=2x$ – похила асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^2-1}=\infty$, то графік функції не має горизонтальної асимптоти.

5. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіку

1. Знайти область визначення функції і точки розриву.
2. Дослідити функцію на парність ($f(-x)=f(x)$), непарність ($f(-x)=-f(x)$), періодичність ($f(x+T)=f(x)$).
3. Знайти точки перетинання графіка функції з віссю OY і з віссю OX .
4. Знайти інтервали зростання, спадання функції і її екстремуми.
5. Знайти інтервали опуклості, увігнутості кривої і точки її перегину.
6. Знайти асимптоти кривої.
7. На основі перевіреного аналізу побудувати графік функції.

Приклад 1.13.6. Дослідити функцію $y=f(x)=\dfrac{x^2}{2+x}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Областю визначення функції є $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$. $x=-2$ – точка розриву функції. Оскільки $\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{x^2}{2+x}=\infty$ і $\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{x^2}{2+x}=-\infty$, то $x=-2$ – точка розриву II–го роду.

Оскільки $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2}{2+x}=\infty$, то $x=-2$ – вертикальна асимптота.

2. Функція – не парна і не непарна (загального виду). Функція – не періодична.

3. Функція перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.

4. Знайдемо інтервали зростання, спадання функції і точки екстремуму.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{2+x}\right)'=\frac{x^2+4x}{(2+x)^2},\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{x(x+4)}{(2+x)^2}=0\ \Rightarrow\ x_1=0 \text{ і } x_2=-4.$$

В точці $x=-2$ похідна функції не існує.

Точки $x=-4;-2;0$ розбивають область визначення функції на інтервали $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$, $(-2,0)$ і $(0,\infty)$.

$f'(x)>0$ на інтервалах $(-\infty,-4)$ і $(0,\infty)$, значить функція зростає на цих інтервалах.

$f'(x)<0$ на інтервалах $(-4,-2)$ і $(-2,0)$, значить функція спадає на цих інтервалах.

$x=-4$ – точка максимуму, $f(-4)=-8$; $x=0$ – точка мінімуму, $f(0)=0$.

5. Знайдемо інтервали опуклості, увігнутості кривої і точки перегину.

$f''(x)=\left(\dfrac{x^2+4x}{(2+x)^2}\right)'=\dfrac{8}{(2+x)^3}$, $f''(x)\neq 0$ в усіх точках з області визначення функції.

Точка розриву функції розбиває область визначення на два інтервали $(-\infty,-2)$ і $(-2,\infty)$.

Якщо $x_0\in(-\infty,-2)$, то $f''(x)<0$ – графік функції є опуклим.

Якщо $x_0\in(-2,\infty)$, то $f''(x)>0$ – графік функції є увігнутим.

Точок перегину немає.

Всі дані заносимо в таблицю.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f''(x)$	–	–	–		+	+	+
$f(x)$	$\uparrow\cap$	max, -8	$\downarrow\cap$		$\downarrow\cup$	min, 0	$\uparrow\cup$

6. Знайдемо похилі асимптоти графіка:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2+x}=1;\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{2+x}=-2$$

Таким чином, $y=x-2$ – похила асимптота.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2+x}=\infty$, то горизонтальної асимптоти немає.

6. Побудуємо графік функції (рис.1.3).

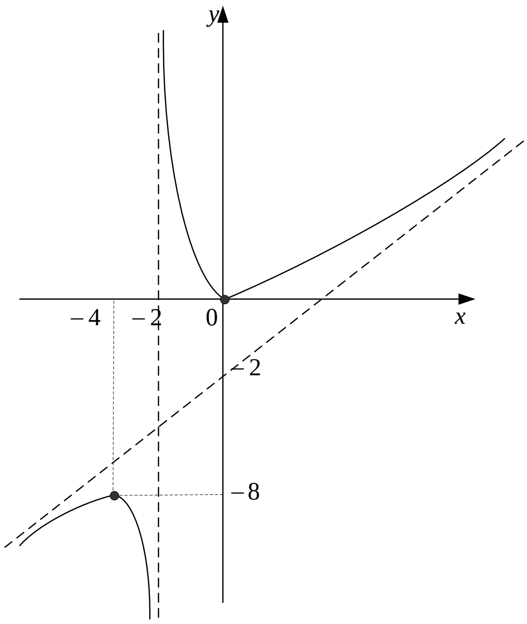


Рис. 1.3 – До прикладу 1.13.6

6. Правило Лопіталя

Обчислення границь від частки двох функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ часто приводить до невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Для обчислення таких границь можна застосовувати правило Лопіталя, яке формулюється наступним чином.

Теорема Лопіталя *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$:*

1. *неперервні на відрізку* $[a,b]$;
2. *диференційовані на інтервалі* (a,b);
3. $f(x_0)=g(x_0)=0$, $x_0\in(a,b)$,

то границя відношення цих функцій при $x\to x_0$ існує і дорівнює границі відношення похідних цих функцій:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

якщо остання границя існує.

***Зауваження* 1.** *Теорема справедлива і в тому випадку, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ невизначені при $x=x_0$, але $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Для цього потрібно перевизначити функції в точці $x=x_0$, поклавши $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.*

***Зауваження* 2.** *Якщо $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ і похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ – функції, що задовольняють умовам теореми як і функції $f(x)$ і $g(x)$*, то *правило*

Лопіталя можна застосувати повторно: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$. *Правило Лопіталя можна застосовувати до тих пір, поки не зникне невизначеність.*

***Зауваження* 3.** *Теорема справедлива і при* $x_0=\infty$, *коли* $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ *і* $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. *Для цього потрібно у функціях зробити заміну* $x\to\dfrac{1}{z}$, *тоді* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f'(z)}{g'(z)}$.

Правило Лопіталя можна застосовувати також для обчислення границь, коли має місце невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f(x))'}{(g(x))'}$ за умови, що існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(f(x))'}{(g(x))'}$.

Для того, щоб застосувати правило Лопіталя до обчислення границь з невизначеностями виду $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 необхідно заздалегідь перетворити функції $f(x)$ і $g(x)$ та звести обчислення границь до випадку невизначеностей виду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розглянемо перетворення, які рекомендується застосовувати для розкриття невизначеностей:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\cdot\dfrac{1}{f(x)}\right)'};$$

2) якщо $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{(g(x))'}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'};$$

3) якщо $\lim\limits_{x\to\infty\ и}f(x)=1$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\left[1^\infty\right]=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}};$$

4) якщо $\lim\limits_{x\to\infty\ и}f(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\left[0^0\right]=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}};$$

5) якщо $\lim\limits_{x\to\infty\ \text{и}} f(x)=\infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'}}.$$

○ **Приклад 6.14.** Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3\sin x-x^2\right)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$; в); $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln^2 x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(3\sin x-x^2\right)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\left(3\sin x-x^2\right)\right)'}{(x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(3\sin x-x^2\right)\cdot(3\cos x-2x)}{1}=3.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln(1+2x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{1+2x}}{1}=0$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x-(x-1))'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}{\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=-\frac{1}{2}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\ln^2 x\right)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\ln^2 x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-2\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=2\lim_{x\to 0}x=0.$$

д) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to 2}e^{\ln\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{2-x}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(2-x)'}}=e^{-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

е) $$\lim_{x\to 0}x^{\sin x}=\left[0^0\right]=\lim_{x\to 0}e^{\ln x\cdot\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right)}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}}=e^{\left[\frac{0}{0}\right]}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 x\right)'}{(x)'}}=e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x}=e^0=1;$$

ж) $$\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=\left[\infty^0\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1.$$

Змістовий модуль ІІ. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди

Тема 7. Первісна. Невизначений інтеграл. Його властивості

План:

1. *Основні поняття*
2. *Властивості невизначеного інтеграла*
3. *Таблиця інтегралів від основних елементарних функцій*
4. *Основні методи інтегрування*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[8], [9].

1. Основні поняття

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* функцією для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо в кожній точці x цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Означення. Сукупність всіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називається *невизначеним інтегралом від функції* $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$. Таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

де $F(x)$ – деяка первісна для $f(x)$, с – довільна стала.

Зокрема: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c \qquad (a \neq 0).$

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цієї функції з точністю до довільної постійної, тобто:

$$\int dF(x) = F(x) + c.$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла, тобто:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

де k – деяке число.

4. Інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. Якщо чисельник підінтегрального дробу є похідна від знаменника, то інтеграл дорівнює логарифму модуля знаменника:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c.$$

3. Таблиця інтегралів від основних елементарних функцій

$\int dx = x + C$;	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$;	
$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \ a \neq 1$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;
$\int e^x dx = e^x + c$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$;
$\int \sin x dx = -\cos x + c$;	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$;
$\int \cos x dx = \sin x + c$;	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$;
$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$;	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$;
$\int ctg dx = \ln|\sin x| + c$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + c$.

4. Основні методи інтегрування

Зазначимо, що немає універсального методу інтегрування функцій, проте існують класичні, основні методи інтегрування, до яких відносяться: метод безпосереднього інтегрування; метод заміни змінної; метод інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод заснований на застосуванні для обчислення невизначених інтегралів основних їх властивостей і таблиці інтегралів.

Для приведення підінтегральних функцій до табличних застосовують найпростіші перетворення диференціалів:

1. $dx = d(x+b)$; **2.** $dx = \frac{1}{a}d(ax)$; **3.** $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$;

4. $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+b)$; **5.** $\sin xdx = -d\cos x$; **6.** $\cos xdx = d\sin x$;

і т.д. в загальному випадку $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$, де a і b – сталі.

Після цього вводять в інтеграли нові змінні $\varphi(x) = u$ ($u = x+b$, або $u = ax$, або $u = ax+b$, або $u = x^2+b$, або $u = -\cos x$, або $u = \sin x$ (існують і інші заміни)). Далі застосовують таблицю інтегралів відповідно до теореми інваріантності.

Наприклад, $\int \sin(7x+3)dx = \int \sin(7x+3)\cdot\frac{1}{7}d(7x+3) =$

$$= \frac{1}{7}\int \sin(7x+3)d(7x+3) = \frac{1}{7}\int \sin udu = \frac{1}{7}(-\cos u) + C = -\frac{1}{7}\cos(7x+3) + C.$$

Розглянувши найпростіші перетворення диференціалів, можна сформулювати ***правило обчислення невизначених інтегралів***:

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ *і* a, b *– сталі, то мають місце формули*:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C;$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C;$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Розглянемо приклади застосування цього правила. Оскільки

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, то за правилом $\int \frac{1}{x+4}dx = \ln|x+4| + C$; оскільки $\int \cos x dx = \sin x + C$, то за правилом $\int \cos(4x-2)dx = \frac{1}{4}\sin(4x-2) + C$.

○ **Приклад.** Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int ctg 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$; в); $\int \left\{ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x} - \cos 4x \right\} dx$.

Розв'язання.

а) $\int ctg 2x dx = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|\sin 2x| + C$;

б) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\int d(tg 3x) = \frac{1}{3}tg 3x + C$;

в) $\int \left\{ \frac{2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + e^{2x} - \cos 4x \right\} dx = \int \left\{ \frac{2}{x-1} - x^{-\frac{1}{3}} + e^{2x} - \cos 4x \right\} dx =$

$= 2\int \frac{dx}{x-1} - \int x^{-\frac{1}{3}}dx + \int e^{2x}dx - \int \cos 4x dx = 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) -$

$-\frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x) + C = 2\ln|x-1| - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}\sin 4x + C$. ●

Метод заміни змінної (або **метод підстановки)**

Якщо функція $f(x)$ *інтегрована, а* $x = \varphi(t)$ *має неперервну похідну, то інтеграл* $\int f(x)dx$ *можна знайти, зробивши заміну змінної* $x = \varphi(t)$, *тобто*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

де $dx = \varphi'(t)dt$.

○ **Приклад.** Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \sin^2 x \cos x dx$; б) $\int x e^{x^2+1}dx$; в) $\int \frac{x^3}{4+x^8}dx$; г) $\int x\sqrt{4-x^4}dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$.

Розв'язання.

а) $\int \sin^2 x \cos x dx = \begin{pmatrix} \cos x dx = dt \\ \int \cos x dx = \int dt \\ t = \sin x \end{pmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$;

б) $\int x e^{x^2+1} dx = \begin{pmatrix} x^2 + 1 = t \\ dt = 2x dx \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$;

в)

$$\int \frac{x^3}{4 + x^8} dx = \begin{pmatrix} x^4 = t \\ dt = 4x^3 dx \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{2^2 + t^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{8} arctg \frac{x^4}{2} + C;$$

г) $\int x\sqrt{4 - x^4} dx = \begin{pmatrix} x^2 = 2\sin t \\ x dx = \cos t dt \end{pmatrix} = \int \cos t \sqrt{4 - 4\sin^2 t} dt = 2\int \cos^2 t dt =$

$$= \int (1 + \cos 2t) dt = \int dt + \int \cos 2t dt = t + \frac{1}{2} \sin 2t + C = \arcsin \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\sqrt{1 - \frac{x^4}{4}} + C;$$

д) Застосуємо підстановку Ейлера: $\sqrt{x^2 \pm a} = t - x$ або $t = \sqrt{x^2 \pm a} + x$. Тоді $dt = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} + dx = \frac{t dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$ або $\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$ і отримаємо табличний інтеграл (8.2.12):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a} + x\right| + C. \bullet$$

Метод інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами оснований на наступній формулі:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

При використанні формули передбачається, що обчислення інтегралу $\int v du$ не складніше за обчислення інтегралу $\int u dv$.

Інтегрування частинами застосовується, наприклад, при обчисленні невизначених інтегралів: $\int x^n \sin mx dx$; $\int x^n \cos mx dx$; $\int x^n e^{mx} dx$; $\int x^n \ln x dx$; $\int x^n \arcsin mx dx$; , де n – натуральне число; α – дійсне число, $\alpha \neq -1$.

При обчисленні підінтегральний вираз розкладають на два множники u та dv, а потім диференціюванням знаходять du, а інтегруванням – функцію v.

В інтегралах виду $\int x^n e^{mx} dx$, $\int x^n \cos mx dx$, $\int x^n \sin mx dx$ позначають $u(x) = x^n$, а через dv – $e^{mx} dx$, $\cos mx dx$, $\sin mx dx$.

В інтегралах виду $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \arcsin mx dx$, $\int x^n \arccos mx dx$,

$\int x^n arctgmxdx$, $\int x^n arcctgmxdx$ через u позначають $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$, а $dv = x^n dx$.

○ **Приклад.** Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int x\sin 2xdx$; б) $\int x^2 e^{-x}dx$; в) $\int x^4 \ln xdx$;

г) $\int (\arcsin x)^2 dx$; д) $\int \cos xe^{-x}dx$; е) $\int \sqrt{x^2+1}dx$.

Розв'язання.

а) $\int x\sin 2xdx = \begin{pmatrix} \sin 2xdx = dv; \quad x = u \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x; \quad du = dx \\ \int udv = uv - \int vdu \end{pmatrix} = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx =$

$= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

б) $\int x^2 e^{-x}dx = \begin{pmatrix} e^{-x}dx = dv; \; x^2 = u \\ v = -e^{-x}; \quad du = 2xdx \end{pmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$

$= \begin{pmatrix} e^{-x}dx = dv; \; x = u \\ v = -e^{-x}; \quad du = dx \end{pmatrix} = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

;

в) $\int x^4 \ln xdx = \begin{pmatrix} x^4 dx = dv; \quad \ln x = u \\ v = \frac{x^5}{5}; \quad du = \frac{1}{x}dx \end{pmatrix} = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5 + C$;

г) $\int (\arcsin x)^2 dx = \begin{pmatrix} dx = dv; (\arcsin x)^2 = u \\ v = x; du = \frac{2\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x\arcsin xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin xd\sqrt{1-x^2} = \begin{pmatrix} d\sqrt{1-x^2} = dv; \arcsin x = u \\ v = \sqrt{1-x^2}; du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} =$

$= x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2\int dx = x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} -$
$2x + C$;

д) $I = \int \cos xe^{-x}dx = \begin{pmatrix} e^{-x}dx = dv; \quad \cos x = u \\ v = -e^{-x}; \quad du = -\sin xdx \end{pmatrix} = -\cos xe^{-x} - \int e^{-x}\sin xdx =$

$$=\begin{pmatrix} e^{-x}dx = dv; & \sin x = u \\ v = -e^{-x}; & du = \cos x dx \end{pmatrix} = -\cos x e^{-x} - \left(-e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx\right) =$$

$$= -\cos x e^{-x} + e^{-x}\sin x - I .$$

Звідки $I = \dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$.

е) $I = \int \sqrt{x^2+1}dx = \begin{pmatrix} dx = dv; \sqrt{x^2+1} = u \\ v = x; du = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \end{pmatrix} = x\sqrt{x^2+1} - \int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}} =$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\sqrt{x^2+1}dx + \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} -$$

$$-I + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C .$$

Звідси $2I = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$ і

$I = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$. ●

Тема 8. Визначений інтеграл. Його властавості.
План:

1. *Основні поняття*
2. *Властивості визначеного інтеграла*
3. *Основні методи інтегрування*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[8], [9].

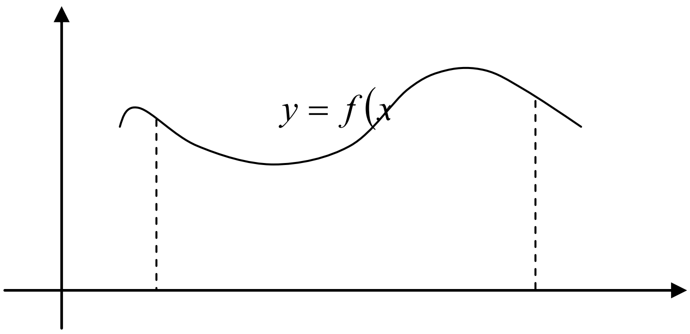
1. Основні поняття

Якщо $F(x)$ – первісна функція від $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула обчислення визначеного інтеграла називається *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Геометричний зміст. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,\ b]$ і усередині цього відрізка всюди не від’ємна, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ в декартовій системі координат визначає площу криволінійної трапеції (див. рис. 2.1), обмеженої графіком підінтегральної функції $y = f(x)$, віссю OX і двома прямими $x = a$, $x = b$.



0 *a* *b*

Рис. 2.1 – Геометричний зміст визначеного інтеграла

2. Властивості визначеного інтеграла

1. $\int\limits_a^b dx = b - a$;

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx \quad (a < b)$;

3. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

5. Якщо c постійна, то $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$;

6. $\int\limits_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)dx]dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b \varphi(x)dx - \int\limits_a^b \psi(x)dx$.

Приклад 2.3.1. Знайти інтеграл $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{-3}}{3} \right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{24} = \frac{64 - 1}{24} = 2\frac{5}{8}.$$

У визначеному інтегралі повернення до змінної x не обов'язкова, але в цьому випадку при заміні змінної необхідно змінити межі інтегрування, тобто скористатися формулою:

$$\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Приклад 2.3.2. Знайти інтеграли а) $\int\limits_0^{\pi/8} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 1}$.

Розв'язання.

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left(\begin{array}{l} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=t; \\ dt=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le 0 \end{array} \right) =$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} t^2 dt = -\frac{t^3}{6}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} = \frac{\sqrt{2}}{24};$$

б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \left(\begin{array}{l} x^2+1=t; \\ 2xdx=dt; \\ 1\le t\le 2 \end{array} \right) = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1) = \ln\sqrt{2}$. ●

Для визначеного інтеграла формула інтегрування частинами має вигляд

Приклад 2.3.3. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} x=u & \Rightarrow dx=du \\ \cos x dx = dv \Rightarrow \sin x = v \end{array} \right| = x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$$

3. Основні методи інтегрування

Методи обчислення визначених інтегралів такі ж, як і при знаходженні невизначених інтегралів.

Метод заміни змінної. *Якщо виконані умови:* 1. *функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$*;* 2. *відрізок* $[a,b]$ *є множиною значень функції* $x=\varphi(t)$*, що визначена на відрізку* $\alpha \le t \le \beta$ *і має на ньому неперервну похідну;* 3. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, *то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (2.2.8)$$

○ **Приклад 2.2.6.** Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_0^8 \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Розв'язування.

$$\text{а) } \int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \left|\begin{matrix} x^2+1=t; \\ 2xdx=dt; \\ 1\le t\le 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1) = \ln\sqrt{2}\,;$$

$$\text{б) } \int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left|\begin{matrix} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=t; \\ dt=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx; \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 0 \end{matrix}\right| =$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 t^2dt = -\frac{t^3}{6}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 = \frac{\sqrt{2}}{24}. \bullet$$

Метод інтегрування частинами. *Якщо функції* $u=u(x)$, $v=v(x)$ *мають неперервні похідні на відрізку* $[a,b]$, *то справедлива формула*

або $$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdv. \qquad (2.2.9)$$

○ **Приклад 2.2.7.** Обчислити інтеграли: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$; б) $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.

Розв'язування. а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \left(\begin{matrix} x=u;\cos xdx=dv \\ du=dx; v=\sin x \end{matrix}\right) = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\text{б) } \int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left(\begin{matrix} \ln(x+1)=u; dx=dv \\ du=\frac{dx}{x+1}; v=x \end{matrix}\right) = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= e-1-\int\limits_0^{e-1} dx + \int\limits_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} = e-1-(e-1)+\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} = 1. \bullet$$

Тема 9. Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтеграла

План:

1. *Невласні інтеграли I– го роду*
2. *Невласні інтеграли II – го роду*
3. *Застосування визначеного інтеграла*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[8], [9].

1. Невласні інтеграли I– го роду

Розрізняють невласні інтеграли I– го і II– го роду.

Невласними інтегралами I– го роду називаються інтеграли з нескінченним інтервалом інтегрування $[a,\infty)$ (або $(-\infty,b]$, або $(-\infty,\infty)$), які визначаються формулами:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx; \qquad (2.6.1)$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx; \qquad (2.6.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx, \qquad (2.6.3)$$

Невласні інтеграли можуть мати як скінченне, так і нескінченне значення. Якщо границі не існують або дорівнюють нескінченності, то невласні інтеграли називаються тими, що *розбігаються*.

Приклад 2.6.1. Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2}$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. а) $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x-1}\Big|_{2}^{b} =$

$= \lim_{b\to\infty}\left[1-\frac{1}{b-1}\right] = 1$. Інтеграл збігається і його значення дорівнює 1;

б) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3dx}{1+x^4} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{x^3dx}{1+x^4} + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{x^3dx}{1+x^4} = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{d(1+x^4)}{1+x^4}x +$

$+\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln(1+x^4)\Big|_{a}^{0} + \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln(1+x^4)\Big|_{0}^{b} = \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln(1+b^4) -$

$-\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\ln(1+a^4) = \infty-\infty$.

Оскільки границя не існує, то інтеграл розбігається.

2. Невласні інтеграли II – го роду

Невласним інтегралом II – го роду від функції $f(x)$ на $[a,b]$ за умови, що $f(x)$ має розрив другого роду при $x=c\in[a,b]$ називається інтеграл, що визначається за формулою

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \qquad (2.6.4)$$

де $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$.

Інтеграл (2.6.4) збігається, якщо границі в (2.6.4) скінчені і існують. В протилежному випадку інтеграл є таким, що розбігається.

Якщо підінтегральна функція має розрив II – го роду в точках $x=b$ або $x=a$, то відповідні інтеграли II – го роду мають вид:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (2.6.5)$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \qquad (2.6.6)$$

○ **Приклад 2.6.2.** Дослідити на збіжність інтеграли: а) $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x^3}$.

Розв'язання. а) $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\Big|_{0+\varepsilon}^{8}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(6-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)=6$.

Інтеграл збігається;

б) $\int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^3}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-a}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^3}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0-\varepsilon_2}^{a}\frac{dx}{x^3}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}-\frac{1}{2x^3}\Big|_{-a}^{0-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_1\to 0}-\frac{1}{2x^3}\Big|_{0-\varepsilon_1}^{a}=$

$=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}-\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right)=\infty-\infty$.

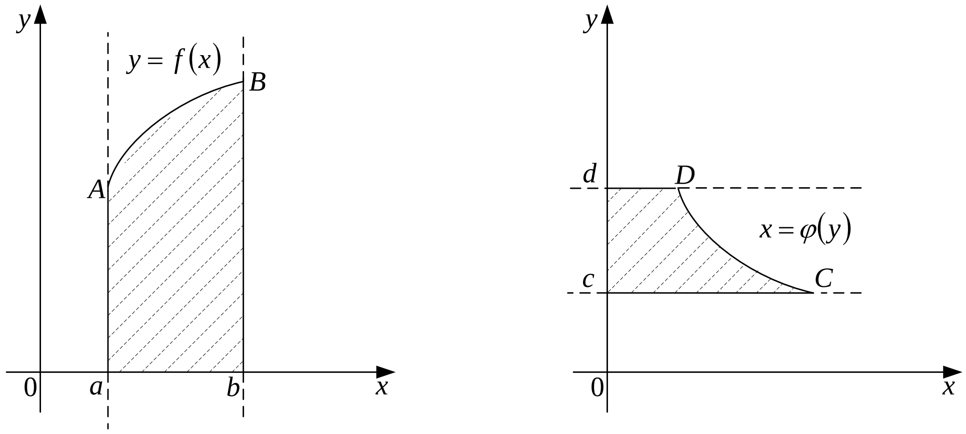
Оскільки границя не існує, то інтеграл розбігається.

3. Застосування визначеного інтеграла

Площа криволінійної фігури на площині

Площа криволінійної трапеції *aABb* обчислюється за допомогою визначеного інтеграла за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx, \text{ де } f(x)\ge 0.$$



а) б)

Якщо крива цілком лежить нижче осі абсцис, тобто $f(x) \le 0$, то площа трапеції $S = -\int_a^b f(x)dx$. В загальному випадку, коли $f(x)$ змінює знак на відрізку $[a,b]$ $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

Площа криволінійної трапеції $cCdD$ обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$

Площа криволінійної трапеції $AA'BB'$ на рис. 1.6а обчислюється за формулою

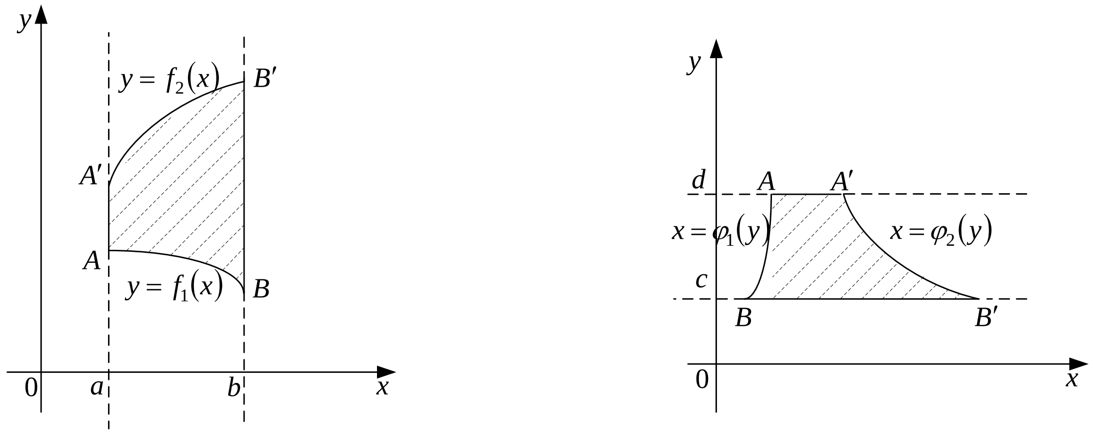
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx,$$

де $f_2(x) \ge f_1(x)$ при цьому лінії $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ можуть знаходитися як вище, так і нижче за вісь абсцис.

Площа криволінійної трапеції $ABA'B'$ обчислюється за формулою

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]dy,$$

де $\varphi_2(y) \ge \varphi_1(y)$ при цьому криві $x = \varphi_1(y)$ і $x = \varphi_2(y)$ можуть знаходитися як ліворуч, так і праворуч від осі ординат.



а) б)

○ **Приклад 2.20.** Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

а) $y = x^2$, $y = -2x + 3$, $y = 0$; б) $y = x^2 + 1$, $y = 1 - x$, $x = 2$;

Розв'язування. а) Побудуємо лінії. Площу фігури OAB на рис. 1.7а можна представити у вигляді суми $S_{OAB} = S_{OAC} + S_{CAB}$. Тоді

$$S_{OAC} = \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3},\ S_{CAB} = \int_1^{3/2} (-2x + 3)dx = \left(-x^2 + 3x\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

і $S_{OAB} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$;

б) Побудуємо лінії на рис. 1.7б. Площу фігури CAB на рис. 1.7б знайдемо за формулою (2.33):

$$S_{CAB} = \int_0^2 \left[x^2 + 1 - (1 - x)\right]dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 = 4\frac{2}{3}.\ \bullet$$

Довжина лінії

Розіб'ємо лінію AB n точками і побудуємо ламану. Довжина такої ламаної визначається за формулою

$$L_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + ... + \Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Якщо кількість відрізків ламаної прямує до нескінченності ($n \to \infty$), а довжина кожного з відрізків прямує до нуля ($\Delta l_i \to 0$), то довжину лінії AB можна знайти як границю довжини ламаної:

$$L = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} L_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Якщо лінія задана рівнянням $y = f(x)$, причому похідна цієї функції $f'(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то довжина лінії обчислюється за формулою

$$L=\int\limits_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Якщо лінія L задана параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

де $t\in[\alpha,\beta]$, а $y(t)$ і $x(t)$ – диференційовані по t функції, причому функції $y'(t)$ і $x'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$, то

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Якщо лінія розглядається в тривимірному просторі $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$ де $t\in[\alpha,\beta]$, то довжина лінії дорівнює

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.$$

Якщо лінія L задана рівнянням в полярній системі координат $\rho=\rho(\varphi)$ і $\rho'(\varphi)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, то

$$L=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$$

○ **Приклад.** Обчислити довжину лінії $y=2\sqrt{x}$, якщо $x\in[1,2]$.

Розв'язання. Оскільки $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то за формулою (9.8.8):

$$L=\int\limits_1^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=\int\limits_1^2\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\begin{pmatrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{pmatrix}=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=\left[t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_1^{\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}+\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right).\ \bullet$$

○ **Приклад.** Обчислити довжину лінії:

а) яка задана параметрично $\begin{cases} y=2t^2+1, \\ x=t-1 \end{cases}$ на відрізку $t\in[0,1]$;

б) одного витка спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$.

Розв'язання. а) Оскільки $y_t' = 4t$ і $x_t' = 1$, то (див. приклад 8.3е):

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(4t)^2}\,dt = \left[\frac{t}{2}\sqrt{1+16t^2} + \frac{1}{8}\ln\left(4t+\sqrt{1+16t^2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{1}{8}\ln\left(4+\sqrt{17}\right);$$

б) Оскільки $\rho_\varphi' = a$, то (див. приклад 8.3е):

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln\left(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right). \bullet$$

Об'єм тіла і площа поверхні обертання

Розіб'ємо тіло на елементарні шари площинами, що проходять перпендикулярно осі Ox через точки $x = x_i$, де $i = 0,1,2,...,n$; $a = x_0$ і $b = x_n$. Нехай площа перерізу тіла $S = S(x_i)$ визначена для будь-якого $x_i \in [a;b]$. Елементарний шар, який відсікається площинами $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$, замінимо циліндром з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і площею основи $S = S(x_i)$. Об'єм такого циліндра обчислюється за формулою $\Delta V_i = S(x_i)\Delta x_i$.

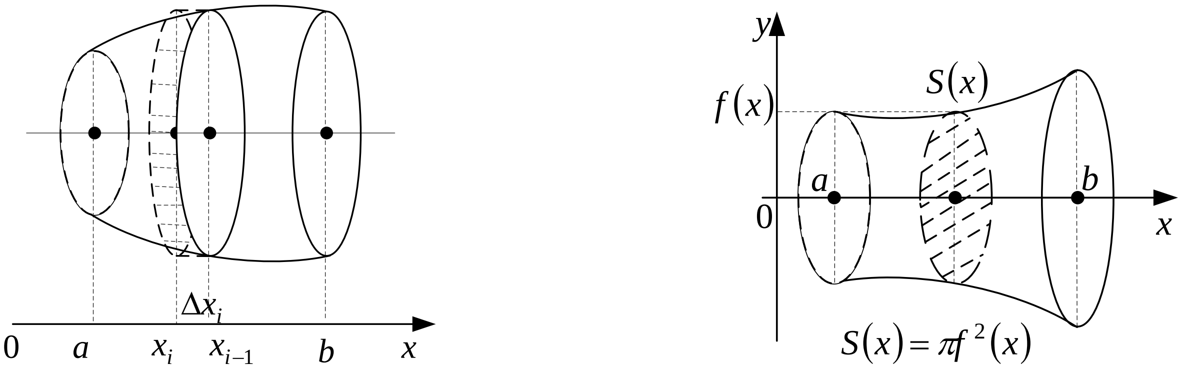
Замінимо тіло східчастою фігурою, що складається з таких елементарних циліндрів, і знайдемо її об'єм V_n як суму циліндрів за формулою

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i .$$

Об'єм V_n наближено дорівнює об'єму даного тіла V і є інтегральною сумою для функції $S = S(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто при $n \to \infty$ (або $\max \Delta x_i \to 0$) за означенням (9.1.6) маємо

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx .$$

Це формула для обчислення ***об'єму тіла***, якщо площа поперечного перерізу цього тіла площиною, яка проходить перпендикулярно до осі Ox через точку з координатою x, $x \in [a;b]$, задана функцією $S(x)$.



а) б)

До визначення формул обчислення: а) об'єму тіла;

б) тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо осі Ox

Для тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лінією $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і віссю абсцис навколо осі Ox, площа поперечного перерізу $S=S(x)=\pi f^2(x)$, тоді об'єм тіла, враховуючи, обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Це формула для обчислення ***об'єму тіла обертання навколо осі абсцис***. Якщо криволінійна трапеція, що обмежена лінією $x=\varphi(y)$, прямими $y=c$, $y=d$ і віссю ординат, обертається навколо осі ординат, то об'єм такого тіла знаходиться за формулою

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

○ **Приклад.** Обчислити об’єм: а) двопорожнинного гіперболоїда обертання $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=-1$, обмеженого площинами $x=c$ і $x=2c$;

б) тіла обертання відрізка лінії $y=\frac{1}{x}$, де $x\in[1;2]$ навколо осі абсцис і осі ординат.

Розв’язання. а) Знайдемо площу поперечного перерізу $S=S(x)$. Це коло $y^2+z^2=b^2\left(\frac{x^2}{c^2}-1\right)$ з радіусом $R=b\sqrt{\frac{x^2}{c^2}-1}$. Тоді $S(x)=\pi R^2=\pi b^2\left(\frac{x^2}{c^2}-1\right)$ і

$$V=\int_1^2 \pi b^2\left(\frac{x^2}{c^2}-1\right)dx=\pi b^2\left(\frac{x^3}{3c^2}-x\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}\pi b^2 c\ ;$$

б) При обертанні лінії $y=\dfrac{1}{x}$ навколо осі абсцис отримаємо:

$$V=\pi\int_1^2\frac{dx}{x^2}=-\pi\frac{1}{x}\Bigg|_1^2=\frac{\pi}{2}\ .$$

Оскільки $x=\dfrac{1}{y}$, де $y\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, то отримаємо $V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{1}{y^2}dy=-\pi\dfrac{1}{y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\pi$.●

Тема 10. Методи інтегрування

План:

1. *Метод невизначених коефіцієнтів*
2. *Інтегрування тригонометричних функцій*
3. *Інтегрування ірраціональних функцій*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[8], [9].

1. Метод невизначених коефіцієнтів

Раціональною функцією називається дріб виду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – цілі багаточлени.

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь $P(x)$ нижче степені $Q(x)$, у противному випадку дріб називається ***неправильним***.

Якщо дріб неправильний, то шляхом ділення чисельника на знаменник за правилом ділення багаточленів варто виділити цілу частину і правильний дріб. Тому будемо розглядати інтегрування правильних дробів, оскільки інтегрування цілої частини не викликає труднощів.

Через те, що інтегрування багаточлена не представляє труднощів, то досить навчитися інтегрувати правильні раціональні дроби. Сформульована нижче теорема дозволяє звести інтегрування будь-якого правильного раціонального дробу до інтегрування елементарних дробів.

Теорема. Якщо $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, знаменник $Q(x)$ якого представлений у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників (з дійсними коефіцієнтами):

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}\ldots\left(x^2+rx+s\right)^{\mu} \qquad (2.4.1)$$

то цей дріб може бути розкладений на елементарні дроби за наступною схемою:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x + N_N}{(x^2 + px + q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + rx + s} + \qquad (2.4.2)$$
$$+ \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2 + rx + s)^\mu}.$$

де $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta, \ldots, R_1, S_1, \ldots, R_\mu, S_\mu$ – деякі дійсні числа.

На практиці розкладання конкретного правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ на суму елементарних дробів зазвичай роблять методом невизначених коефіцієнтів. Для цього:

- розкладають знаменник $Q(x)$ на добуток лінійних і квадратичних множників;
- записують розкладання дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ за схемою (2.4.2) з невизначеними коефіцієнтами;
- приводять елементарні дроби до загального знаменника $Q(x)$;
- прирівнюють багаточлен, що утворився у чисельнику, до багаточлена $P(x)$.

Для того щоб два багаточлени були тотожно рівні, необхідно й достатньо, щоб коефіцієнти при однакових степенях x у них були рівні. З огляду на це зауваження, прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій і правій частинах рівності, одержуючи тим самим систему алгебраїчних рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2.4.1. Знайти інтеграли а) $\int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Розв'язання.

а) Розкладемо підінтегральний вираз за схемою (2.4.2) з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Звідси:

$$x = A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \qquad (*)$$

Перепишемо тотожність (*) у вигляді:

$$x \equiv (A + B_1)x^2 + (2A + B_2)x + (A - B_1 - B_2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ 2A + B_2 = 1 \\ A - B_1 - B_2 = 0 \end{cases}.$$

Отже:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + c =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

б) Розкладемо підінтегральний вираз за схемою (2.4.2) з невизначеними коефіцієнтами

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2};$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx;$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1;$$

$$x = 1 \Rightarrow C = 1;$$

$A + B = 0$, тобто $B = -1$.

Таким чином: $A = 1$, $B = -1$ і $C = 1$.

Отже:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + c.$$

2. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграл наступного виду:

$$I=\int \sin^m x\cos^n x dx.$$

1. Якщо $m=2k+1$ (непарне), тоді записують:

$$I=-\int \sin^{2k} x\cos^n x d(\cos x)=-\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

і роблять заміну $t=\cos x$;

2. Якщо $n=2k+1$ (непарне), тоді записують:

$$I=\int \sin^m x\cos^{2k} x d(\sin x)=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d(\sin x)$$

і роблять заміну $t=\sin x$;

3. Якщо m і n – парні, то перетворення проводять за допомогою формул :

$$\sin^2 \alpha x=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha x),\quad \cos^2 \alpha x=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha x),$$

$$\sin \alpha x\cos \alpha x=\frac{1}{2}\sin 2\alpha x;$$

4. Якщо m і n – цілі від'ємні числа однакової парності ($m=-\mu$, $n=-\nu$), тоді припускають:

$$I=\int \frac{dx}{\sin^\mu x\cos^\nu x}=\int \frac{d(tgx)}{\sin^\mu x\cos^{\nu-2} x}=\int \left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\mu/2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{\nu-2}{2}} d(\operatorname{tg} x)=$$

$$=\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\operatorname{tg}^\mu x} d(\operatorname{tg} x)$$

і роблять заміну $t=\operatorname{tg} x$.

Інтеграли виду:

$$\int \sin mx\cos nx dx,\quad \int \sin mx\sin nx dx,\quad \int \cos mx\cos nx dx,$$

обчислюються за допомогою формул:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right);$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right);$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right).$$

При інтегруванні тригонометричних виразів також застосовують універсальну підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Приклад 2.5.1. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;

б) $\int \sin 7x \cos 3x\, dx$; в) $\int \dfrac{dx}{\sin x - \cos x}$;

Розв'язання. а) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 x \sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)\sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx -$$

$$-\frac{1}{8}\int \cos 2x \sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x = \frac{1}{16}\int dx -$$

$$-\frac{1}{16}\int \cos 4x dx - \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C;$$

б) $\int \sin 7x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin 4x + \sin 10x] dx = \frac{1}{2}\int \sin 4x dx +$

$$+\frac{1}{2}\int \sin 10x dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C;$$

в) $$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = \begin{pmatrix} t = tg\dfrac{x}{2}; & dx = \dfrac{2d\,t}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{t^2+2t-1} = 2\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{tg\dfrac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{tg\dfrac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

3. Інтегрування ірраціональних функцій

Невизначений інтеграл виду $\int \dfrac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Цей інтеграл приводять до табличного виділенням повного квадрату в підкорінному виразі $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left(u^2+\alpha\right).$

Перетворимо інтеграл до виду $\int\frac{du}{\sqrt{a\left(u^2+\alpha\right)}}$. Залежно від знака a, інтеграл приводиться до одного з табличних:

– якщо $a>0$, то інтеграл знаходять за формулою (8.2.12):

$$\int\frac{du}{\sqrt{a\left(u^2+\alpha\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|u+\sqrt{u^2+\alpha}\right|+C;$$

– якщо $a<0$, то інтеграл знаходять за формулою (8.2.10):

$$\int\frac{du}{\sqrt{a\left(u^2+\alpha\right)}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{du}{\sqrt{\beta^2-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\frac{u}{\beta}+C,$$

де $-\alpha=\beta^2$.

Невизначений інтеграл виду $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$

Оскільки $ax^2+bx+c=a\left(u^2+\alpha\right)$, то залежно від знака параметра a, цей інтеграл приводиться до одного з інтегралів:

– якщо $a>0$, то

$$\sqrt{a}\int\sqrt{u^2+\alpha}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a\left(u^2+\alpha\right)}+\frac{\alpha}{2}\sqrt{a}\cdot\ln\left|u+\sqrt{u^2+\alpha}\right|+C;$$

– якщо $a<0$, то

$$\sqrt{|a|}\int\sqrt{\beta^2-u^2}\,du=\frac{u}{2}\sqrt{a\left(u^2+\alpha\right)}-\frac{\beta^2}{2}\sqrt{|a|}\cdot\arccos\frac{u}{\beta}+C.$$

Невизначені інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де $ad\neq bc$

В інтегралах такого виду використовується підстановка $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$. Після підстановки підінтегральні функції не містять коренів, а інтеграли перетворюються на інтеграли від раціонального дробу (див. розділ 8.4).

○ **Приклад.** Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}}$; б) $\int \sqrt{x^2+8x+15}\,dx$; в) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Розв'язання. а)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+4x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2(x+1)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x+1+\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{2}}\right)+C;$$

б)

$$\int \sqrt{x^2+8x+15}\,dx = \int \sqrt{(x+4)^2-1}\,dx = \frac{x+4}{2}\sqrt{(x+4)^2-1} -$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x+4+\sqrt{(x+4)^2-1}\right|+C;$$

в) $$\int x\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{x+1}=t^2; \frac{dx}{(x+1)^2}=tdt \\ x=\frac{t^2+1}{1-t^2}; x+1=\frac{2}{1-t^2} \end{pmatrix} = 4\int \frac{t^2(1+t^2)dt}{(1-t^2)^3} =$$

$$= 4\int \frac{t^2(1+t^2)dt}{(1-t)^3(1+t)^3}.$$

$$\frac{t^2(1+t^2)}{(1-t)^3(1+t)^3} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{(1-t)^3} + \frac{D}{(1+t)} + \frac{E}{(1+t)^2} + \frac{N}{(1+t)^3} =$$

$$= \frac{(A-D)t^5 + (A-B+D-E)t^4 + (-2A-2B+C+2D+2E-N)t^3 +}{(1-t)^3(1+t)^3}$$

$$\underline{+(-2A+3C-2D+3N)t^2 + (A+2B+3C-D-2E-3N)t +}$$

$$\underline{+(A+B+C+D+E+N)}$$

$$\begin{cases} A+B+C+D+E+N=0, \\ A+2B+3C-D-2E-3N=0, \\ -2A+3C-2D+3N=1, \\ -2A-2B+C+2D+2E-N=0, \\ A-B+D-E=1, \\ A-D=0. \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ A=\frac{1}{8}, B=-\frac{3}{8}, C=\frac{1}{4}, D=\frac{1}{8}, E=-\frac{3}{8}, N=\frac{1}{4}. \right.$$

$$\int x \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int\left(\frac{1}{2(1-t)} - \frac{3}{2(1-t)^2} + \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{1}{2(1+t)} - \frac{3}{2(1+t)^2} + \frac{1}{(1+t)^3}\right)dt =$$

$= \ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} - \frac{3t}{\left(1-t^2\right)} + \frac{2t}{\left(1-t^2\right)^2} + C$, де $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (Потрібно повернутися до старої змінної !).

Тема 11. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття. Диференціальні рівняння I порядку: з розподіленими змінними, однорідні, лінійні.

План:

1. *Основні поняття*
2. *Однорідні диференціальні рівняння першого порядку*
3. *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[10].

1. Основні поняття

Означення. *Звичайним диференціальним рівнянням* називається рівняння, що зв'язує шукану функцію однієї змінної і похідні різних порядків даної функції.

У загальному випадку диференціальне рівняння можна записати у вигляді:

$$G\left(x,\ y,\ y',\dots,y^{(n)}\right)=0 \qquad (2.7.1)$$

при цьому порядок n старшої похідної, що входить у запис рівняння, називається *порядком* диференціального рівняння.

Означення. *Розв'язком диференціального рівняння* (2.7.1) називається така функція $y=y(x)$, яка при підстановці це рівняння перетворює його на тотожність.

Графік розв'язка диференціального рівняння називається *інтегральною кривою*.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння (2.7.1) n-го порядку є розв'язок виду:

$$y=\varphi\left(x,c_1,\dots,c_n\right) \qquad (2.7.2)$$

який є функцією змінної x і n довільних незалежних сталих $c_1,c_2,\dots,c_n$. (Незалежність сталих означає відсутність будь-яких співвідношень між ними).

Означення. *Частинним розв'язком* диференціального рівняння називається розв'язок, що одержаний із загального розв'язка, при деяких конкретних числових значеннях сталих $c_1,c_2,\dots,c_n$.

До диференціальних рівнянь призводять багато задач економіки, фізики, біології, екології і т.п.

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *рівнянням зі змінними, що розділяються*, якщо воно може бути представлене у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad (2\ 7.3)$$

або у вигляді:

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \qquad (2.7.4)$$

де $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ – деякі функції змінної x; $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ – функції змінної y.

Для розв'язання такого рівняння його варто перетворити до виду, у якому диференціал і функції змінної x виявляться в одній частині рівності, а змінної y – в іншій. Потім проінтегрувати обидві частини отриманої рівності.

Приклад 2.7.1. Розв'язати рівняння $xy' - y = 0$.

Розв'язання.

$$x\frac{dy}{dx} = y.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx.

$$xdy = ydx.$$

Розділимо обидві частини отриманої рівності на xy.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x}; \quad \ln|\mathrm{y}| = \ln|x| + \ln|c|; \quad \ln|y| = \ln|cx|; \quad y = cx.$$

2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *однорідним*, якщо воно може бути представлене у вигляді:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (2.8.1)$$

де g – деяка функція (однієї змінної).

Поняття однорідного диференціального рівняння пов'язане з однорідними функціями.

Означення. Функція $y = f(x,\ y)$ називається *однорідною* степені k, якщо для довільного числа α виконується рівність:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k \left(f(x, y) \right)$$

Однорідні рівняння за допомогою підстановки $y = ux$ приводяться до рівнянь зі змінними, що розділяються.

Приклад 2.8.1. Розв’язати рівняння: $y' = \dfrac{x + 2y}{x}$.

Розв’язання. Через те, що $\dfrac{x + 2y}{x} = 1 + 2\dfrac{y}{x}$, рівняння має вигляд (2.8.1) при $g\left(\dfrac{y}{x}\right) = 1 + 2\dfrac{y}{x}$. Нехай $z = \dfrac{y}{x}$, звідси $y = zx$ і $y' = z'x + z$. підставимо в перетворене рівняння:

$$z'x + z = 1 + 2z,$$

$$z'x = 1 + z.$$

Одержимо рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = 1 + z.$$

Розділимо обидві частини рівності на $x(z + 1)$ і помножимо на dx ($z \neq -1$, тобто $y \neq -x$, але слід зазначити, що $y = -x$ є рішенням вихідного рівняння).

$$\frac{dz}{1 + z} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи останню рівність, одержуємо:

$$\ln|1 + z| = \ln|x| + \ln|c|,$$

$$\ln|1 + z| = \ln|cx|,$$

$$1 + z = cx.$$

Повертаючись до початкових змінних, одержимо:

$$1 + \frac{y}{x} = cx, \text{ звідки } y = (cx - 1)x$$

(при $c = 0$ одержуємо розв’язок диференціального рівняння $y = -x$).

3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним***,** якщо воно має вигляд:

$$y' + f(x)y = g(x) \qquad (2.8.2)$$

де $f(x)$й $g(x)$ – деякі (неперервні) функції змінної x.

Розглянемо один з можливих способів розв'язання рівняння: будемо шукати рішення у вигляді $y = u(x)\cdot v(x)$, тим самим шуканими стають функції $u(x)$ і $v(x)$, одна з яких може бути обрана довільно, а інша – повинна визначатися з рівняння (2.8.2). Тобто використовується в рішенні заміна $y = uv$; $y' = u'v + v'u$.

Приклад 2.8.2. Розв'язати рівняння: $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Розділивши ліву і праву частини на x приходимо до лінійного неоднорідного рівняння:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Нехай $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, тоді рівняння прийме вид:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3 \text{ або } u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3.$$

Користуючись тим, що одну з допоміжних функцій (наприклад v) можна вибрати довільно, підберемо її так, щоб вираження в дужках обернулося в нуль, тобто в якості v візьмемо одне із частинних рішень рівняння зі змінними, що розділяються.

$$v' - \frac{2}{x}v = 0 \text{ або } \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}; \text{ звідки: } \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}.$$

Якщо проінтегруємо обидві частини рівності, знайдемо частинне рішення цього рівняння, наприклад, при $c = 0$ $\ln|v| = 2\ln|x|$, звідки $v = x^2$.

При $v = x^2$ вихідне рівняння звернеться в рівняння:

$$u'x^2 = 2x^3 \text{ або } \frac{du}{dx} = 2x.$$

Розв'язуючи це рівняння зі змінними, що розділяються, одержуємо $u = x^2 + c$. Тоді остаточно маємо:

$$y = uv = (x^2 + c)x^2 = x^4 + cx^2.$$

Тема 12. Диференціальні рівняння II порядку. Диференціальні рівнян-ня II порядку, що допускають зниження порядку.

План:

1. *Диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами*
2. *Диференціальні рівнян-ня II порядку, що допускають зниження порядку*
3. *Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[10].

1. Диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y'' + py' + gy = r(x) \qquad (2.9.1)$$

де p, g – деякі дійсні числа, $r(x)$ – деяка функція. Ми будемо розглядати однорідні рівняння ($r(x) \equiv 0$), тобто рівняння виду

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (2.9.2)$$

Розглянемо ***розв'язок лінійного однорідного рівняння*** із сталими коефіцієнтами.

Для знаходження загального розв'язка однорідного рівняння виписуємо його характеристичне рівняння:

$$k^2 + pk + g = 0.$$

Знаходимо його корені. При цьому, якщо:

1. Корні дійсні і різні, тобто $k_1 \neq k_2$, тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (2.9.3)$$

2. Корні дійсні і кратні, тобто $k_1 = k_2 = k$, тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = e^{kx}(c_1 x + c_2) \qquad (2.9.4)$$

3. Корні комплексні, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \qquad (2.9.5)$$

Приклад 2.9.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв'язання. Запишемо і вирішимо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 2.$$

Тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Приклад 2.9.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$

Розв'язання. $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$ – корні кратні, дійсні$\Rightarrow y = e^{2x}(c_1 x + c_2)$ – загальний розв'язок.

Приклад. Знайти загальне (чи частинне) рішення диференціального рівняння другого порядку :

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$ і $y'(0) = 2$; б) $y'' + 2y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язування. а) Знайдемо характеристичне рівняння і його корені : $k^2 + 2k - 3 = 0 \rightarrow k_1 = 1$ і $k_2 = -3$.

Таким чином, загальне рішення рівняння – $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

Оскільки $y' = C_1 e^x - 3C_2 e^{-3x}$, тоді з початкових умов знайдемо: $\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 3C_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{4}, \\ C_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Тоді частинне рішення $y = \frac{5}{4}e^x - \frac{1}{4}e^{-3x}$;

б) Оскільки $k^2 + 2k + 1 = 0$ і $k_1 = k_2 = -1$, тоді загальне рішення рівняння – $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$;

в) Оскільки $k^2 + 2k + 5 = 0$ і $k_1 = -1 + 2i$ $k_2 = -1 - 2i$, тоді загальне рішення рівняння – $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}$.

Загальне рішення неоднорідного рівняння визначається формулою

$$y = y_0 + Y, \tag{3.20}$$

де y_0 – загальне рішення однорідного рівняння , а Y – частинне рішення рівняння.

2. Диференціальні рівнян-ня II порядку, що допускають зниження порядку

Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції y**,** виду

$$y'' = f(x, y')$$

вирішується підстановкою $y' = p(x)$ (і $y'' = p'(x)$), перетворюється до диференціального рівняння першого порядку виду $p' = f(x, p)$, яке вирішується одним з розглянутих раніше методів відносно $p = p(x)$.

Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить x**,** виду

$$y'' = f(y, y')$$

вирішується підстановкою $y' = p(y)$ (і $y'' = p'_y y' = p'_y p$), перетворюється до диференціального рівняння першого порядк виду $pp'_y = f(y, p)$, яке вирішується одним з розглянутих раніше методів відносно $p = p(y)$.

Загальне рішення диференціального рівняння $y'' = f(x)$ отримаємо після двократного інтегрування:

$$y = \int dx \int f(x)dx + xC_1 + C_2 .$$

Такими ж методами вирішуються диференціальні рівняння n–го порядку $y^{(n)} = f\left(x, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$, $y^{(n)} = f\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$ та $y^{(n)} = f(x)$.

○ **Приклад.** Розвязати диференціальне рівняння:

а) $y'' = \sin x$; б) $yy'' = (y')^2$.

Розв'язування. а) $y'' = \sin x \quad \to \quad y' = \int \sin x dx + C_1 = -\cos x + C_1 \quad \to$ $y = \int (-\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2$;

б) Зробимо підстановку: $y' = p(y)$ і $y'' = p'_y y'$.

$yy'' = (y')^2 \ \to \ yp'_y p = p^2 \ \to \ p\left(yp'_y - p\right) = 0$.

Рівняння розпадається на два: $p = 0$ і $yp'_y - p = 0$.

Вирішимо перше диференціальне рівняння:
$p = 0 \ \to \ y' = 0 \ \to y = C$.

Вирішимо друге рівняння:

$$yp'_y - p = 0 \ \to \ \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \ \to \ \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \ \to \ \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \to p = C_1 y$$

$\to \ y' = C_1 y \ \to \ \dfrac{dy}{y} = C_1 dx \ \to \ \int \dfrac{dy}{y} = \int C_1 dx \ \to \ \ln|y| = C_1 x + C_2$ або $y = e^{C_1 x + C_2}$ – загальне рішення диференціального рівняння. ●

3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами називається рівняння виду :

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

де p і q – дійсні числа, і відповідне йому ***однорідне рівняння*** має вид

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Розглянемо рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами і спеціальними правими частинами $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$:

1. Якщо $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ і α не є коренем характеристичного рівняння (3.16), тоді частинне рішення рівняння (3.14) $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – многочлен n–ої степені з $n+1$ невідомими коефіцієнтами, які знаходяться з (3.14) після підстановки в нього $y = e^{\alpha x}Q_n(x)$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x.

2. Якщо $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ і α є коренем характеристичного рівняння кратності r ($r \le 2$), тоді частинне рішення неоднорідного рівняння $Y = x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$, де $Q_n(x)$, – многочлен n–ої степені з $n+1$ невідомими коефіцієнтами, які знаходяться з неоднорідного рівняння після підстановки в нього $y = x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x.

3. Якщо $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ (де $\alpha = 0$, $\beta \ne 0$ і M, N – задані числа) і $i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинне рішення неоднорідного рівняння $Y = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, де коефіцієнти знаходяться з неоднорідного рівняння після підстановки в нього $Y = A\cos\beta x + B\sin\beta x$.

4. Якщо $f(x) = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ (де $\alpha = 0$, $\beta \ne 0$ і M, N – задані числа) і $i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r ($r \le 1$), тоді часткове рішення – $= x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, де коефіцієнти A і B знаходяться після підстановки в неоднорідне рівняння.

5. Якщо $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ і $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинне рішення неоднорідного рівняння $Y = e^{\alpha x}(p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x)$, де $p_l(x)$ і $q_l(x)$ – многочлени l–й степені (рівній найвищій степені многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$) з $l+1$ невідомими коефіцієнтами, які знаходяться з неоднорідного рівняння після підстановки в нього $y = e^{\alpha x}(p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x)$.

6. Якщо $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$ і $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння кратності r, тоді частинне рішення неоднорідного рівняння $Y = x^r e^{\alpha x}\left(p_l(x)\cos\beta x + q_l(x)\sin\beta x\right)$, де $p_l(x)$ і $q_l(x)$ – многочлени l–ї степені (рівній найвищій степені многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$) з $l+1$ невідомими коефіцієнтами, які знаходяться з неоднорідного рівняння після підстановки.

○ **Приклад.** Знайти загальне рішення диференціального рівняння другого порядку $y'' - 7y' + 12y = 5$.

Розв'язування. Знайдемо загальне рішення однорідного рівняння $y'' - 7y' + 12y = 0$. Оскільки $k^2 - 7k + 12 = 0$ і $k_1 = 3$ $k_2 = 4$, тоді загальне рішення рівняння – $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

Знайдемо частинне рішення неоднорідного рівняння $y'' - 7y' + 12y = 5$. Оскільки $f(x) = 5$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, тоді частинне рішення $Y = A$, де – постійна.

Підставимо $Y = A$ в рівняння. Оскільки $Y' = 0$ і $Y'' = 0$, то:

$$12A = 5 \to A = \frac{5}{12}.$$

Частинне рішення неоднорідного рівняння має вигляд $Y = \frac{5}{12}$, а загальне рішення неоднорідного рівняння представимо за формулою (3.20) : $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{5}{12}$. ●

Тема 13. Числові ряди. Необхідна ознака збіжності. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів. Знакопочережні числові ряди. Умовна і абсолютна збіжність. Степеневі ряди. Область збіжності.

План:

1. *Основні поняття*
2. *Достатні ознаки збіжності ряда*
3. *Порівняння рядів з додатними членами*
4. *Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца*
5. *Функціональні ряди*
6. *Радіус збіжності степеневого ряду*
7. *Ряди Тейлора і Маклорена*

Список рекомендованої літератури: [1]-[3],[10].

1. Основні поняття

Означення. Нехай задана нескінченна послідовність чисел $U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ...$, тоді вираз

$$U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...$$

називається *числовим рядом*. При цьому числа $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ називаються *членами ряду*.

Означення. Ряд $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...$ називається *збіжним*, якщо сума S_n його n перших членів при $n \to \infty$ прямує до скінченної границі S: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називається сумою збіжного ряду. Не збіжний ряд називається розбіжним.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд збігається, то його n-й член прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0.$$

Зауваження Виконання необхідної ознаки збіжності не говорить про те, що ряд збіжний. Це потрібно визначити за допомогою однієї з достатніх ознак.

2. Достатні ознаки збіжності ряда

Ознака Даламбера

Якщо в ряді з додатними членами $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...$ відношення $(n+1)$-го члена до n-го при $n \to \infty$ має границю l, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l\,,$$

тоді:

1) ряд збігається у випадку $l<1$,
2) ряд розбігається у випадку $l>1$,
3) питання залишається невирішеним у випадку $l=1$.

Приклад 2.11.1. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання.

$$U_n=\frac{1}{n!},\qquad U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Тоді:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1;$$

таким чином, даний ряд збігається.

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду з додатними членами:

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots,$$

величина $\sqrt[n]{U_n}$ при $n\to\infty$ має границю l, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=l\,,$$

тоді:

1) ряд збігається у випадку $l<1$;
2) ряд розбігається у випадку $l>1$;
3) питання залишається невирішеним у випадку $l=1$.

Приклад 2.11.2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання.

$$U_n=\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n,$$

тоді:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Таким чином, ряд розбігається.

Інтегральна ознака збіжності ряду

Нехай члени ряду $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...$ додатні і не зростають, а $f(x)$ – така неперервна не зростаюча функція, що:

$$f(1) = U_1,\ f(2) = U_2, ..., f(n) = U_n.$$

Тоді:

1) ряд збігається, якщо невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ збігається (дорівнює скінченому числу);

2) ряд розбігається, якщо невласний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ розбігається, тобто дорівнює ∞, або він не існує.

Приклад 2.11.3. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку, поклавши $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ця функція задовольняє всім умовам ознаки.

Розглянемо інтеграл.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to\infty}\left.\frac{1}{(1-p)x^{p-1}}\right|_1^b, & \text{при } p \neq 1 \\ \lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b, & \text{при } p = 1 \end{cases}$$

тобто для випадку $p > 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\right) = -\frac{1}{1-p} = const \Rightarrow$$ інтеграл збігається $\Rightarrow$ ряд збігається.

Для випадку $p < 1$:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)b^{p-1}} - \frac{1}{1-p}\right) = \infty \Rightarrow$$ інтеграл розбігається $\Rightarrow$ ряд розбігається.

Для випадку $p=1$ $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\infty \Rightarrow$ інтеграл розбігається $\Rightarrow$ ряд розбігається.

3. Порівняння рядів з додатними членами

Нехай задані два ряди з додатними членами:

$$U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n+\ldots \qquad (2.11.1)$$

$$V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n+\ldots \qquad (2.11.2)$$

1) :якщо $U_n \le V_n$ і ряд (2.11.2) збігається, то і ряд (2.11.1) є збіжним;

2) якщо $U_n \ge V_n$ і ряд (2.11.2) розбігається, то розбігається і ряд (2.11.1).

Приклад 2.11.4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, члени якого, починаючи із другого, утворюють геометричну прогресію із знаменником $\frac{1}{2}$. Сума цього ряду дорівнює $\frac{3}{2}$, тобто він збіжний. Кожен член вихідного ряду менше відповідних членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ $\left(\frac{1}{3^3}<\frac{1}{2^3};\ \frac{1}{4^4}<\frac{1}{2^4};\ldots;\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n};\ldots\right)$.

Таким чином, вихідний ряд збігається, причому його сума не перевершує $\frac{3}{2}$.

4. Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Якщо в знакопочережному ряді:

$$U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots \quad (U_n>0),$$

члени такі, що $U_1>U_2>U_3>\ldots$ і $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$, тоді ряд збігається, його сума додатна і не перевершує першого члена.

Приклад 2.11.5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Розв'язання.

1) $\quad 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ – кожен член ряду за модулем менше попереднього;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, таким чином за ознакою Лейбніца ряд збігається.

5. Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції незалежної змінної, називають ***функціональним рядом*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається збіжним в деякій точці x_0, якщо збігається відповідний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Множина усіх точок збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***областю його збіжності.***

Функціональний ряд називається ***збіжним на деякій множині***, якщо він збігається в будь–якій точці цієї множини.

6. Радіус збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots ,$$

де a_n – дійсні числа, які є коефіцієнтами ряду.

Степеневим рядом називається також ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots .$$

Теорема Абеля :

1. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому значенні $x = x_0 \neq 0$, тоді він збігається абсолютно при усіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$;

2. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при деякому значенні $x = x_0 \neq 0$, тоді він розбігається при усіх значеннях x, для яких $|x| > |x_0|$.

Радіусом збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ називається число R

таке, що при $|x| < R$ ряд збігається, а при $|x| > R$ розбігається.

Областю збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ називається інтервал $(-R, R)$, де R – радіус збіжності. На границях інтервалу, при $x = R$ і $x = -R$, ряд може як сходитися, так і розходитися.

Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ визначається формулою

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

якщо ця границя існує.

○ **Приклад.** Знайти область збіжності степеневого ряду :

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}$.

Розв'язування. а) Оскільки $a_n = \frac{1}{n!}$ і $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, тоді :

$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$. Таким чином, область збіжності степеневого ряду $(-\infty; \infty)$;

б) Оскільки $a_n = n^n$ і $a_{n+1} = (n+1)^{n+1}$, тоді

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right| = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1}}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{0}{e} = 0.$$

Таким чином, область збіжності ряду $x = 0$;

в) $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{2^n (2n+3)^2 \sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1} (2n+1)^2 \sqrt{3^n}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Інтервал збіжності ряду $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Дослідимо ряд на границях інтервалу збіжності:

при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Цей ряд збігається за ознакою Лейбніця;

при $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ отримаємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Збіжність цього ряду можна довести за узагальненою ознакою порівняння.

Розглянемо узагальнений гармонійний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оскільки $a_n = \frac{1}{(2n+1)^2}$ і $b_n = \frac{1}{n^2}$, і $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}$, тоді ряд збігається, оскільки збігається еталонний ряд порівняння.

Таким чином, область збіжності ряду $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. ●

Інтервал збіжності степеневого ряду також можна знаходити за допомогою ознаки Даламбера, тобто знаходимо $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = q$. Відомо, що ряд збігається при $q < 1$, розбігається при $q > 1$, а при $q = 1$ необхідні додаткові дослідження.

Приклад. Визначити інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Розв'язання. Випишемо $U_n = \frac{x^n}{n!}$, $U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, тоді:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1.$$

Таким чином, ряд збігається при будь-яких x.

Приклад. Визначити інтервал збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot 10^n}{5\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Випишемо n-ий і $(n+1)$-ий члени ряду:

$$U_n = \frac{x^n \cdot 10^n}{5\sqrt{n}}, \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1} \cdot 10^{n+1}}{5\sqrt{n+1}},$$

тоді:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} \cdot 10^{n+1}}{5\sqrt{n+1}} \cdot \frac{5\sqrt{n}}{x^n \cdot 10^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |10x| = 10|x|.$$

Ряд буде збіжним, якщо $10 \cdot |x| < 1$. Звідси $|x| < \frac{1}{10}$, тобто вихідний ряд збігається на інтервалі $x \in (-0{,}1;\ 0{,}1)$.

Приклад. Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язання. Випишемо $U_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; $U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$, тоді:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\cdot x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x|$$

а) якщо $|x|<1$, тоді ряд збігається; б) якщо $|x|>1$, тоді ряд розбігається; в) щоб вирішити питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу, підставимо спочатку $x=-1$. Тоді досліджуємий ряд буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+....$$

Це знакозмінний ряд, який збігається за ознакою Лейбниця. На правому кінці інтервалу збіжності при $x=1$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+...,$$

який збігається, як узагальнений гармонічний ряд при $p=\frac{1}{2}$. Тоді область збіжності досліджуємого ряду – проміжок $[-1,1)$.

Приклад. Визначити область збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}$

Розв'язання. Випишемо:

$U_n = \frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}$, $U_{n+1} = \frac{(x+1^{n+1})}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\cdot\frac{2^n\cdot n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{x+1}{2}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{|x+1|}{2}$$

а) ряд збігається, якщо $\frac{|x+1|}{2}<1$ або $-2<x+1<2$; $-3<x<1$; б) ряд розбігається, якщо $|x+1|>2$; в) дослідимо збіжність на концях интервалу збіжності:

при $x=-3$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{2^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - збігається за ознакою Лейбниця;

при $x=1$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонічний ряд – розбігається.

Таким чином, ряд збігається при $x\in[-3,1)$.

Іншу формулу для знаходження області збіжності степеневого ряду можна отримати з радикальної ознаки Коші: ряд збігається для всіх x, для яких $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}<1$.

Приклад. Визначити область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\ln^n x|}=|\ln x|$

а) ряд збігається, якщо $-1<\ln x<1$; $-\ln e<\ln x<\ln e$; $e^{-1}<x<e$,

б) ряд розбігаться, якщо $|\ln x|>1$

в) дослідимо збіжність на концях интервалу збіжності:

при $x=e^{-1}$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ - розбігається (за ознакою Лейбниця);

при $x=e$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$ - розбігається (не виконується необхідна умова збіжності ряду).

Таким чином, ряд збігається при $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$.

7. Ряди Тейлора і Маклорена

Припустимо, що функція $f(x)$, визначена і *n* раз диференцюєма в околі точки x_0 та може бути представлена у вигляді суми степеневого ряду:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

який называють рядом Тейлора для функції $f(x)$.

При $x_0=0$ отримуємо ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (*)$$

Виникає питання: чи буде сума даного ряду Тейлора $S(x)$ збігатися з функцією $f(x)$, для якої він побудований. Виявляється не завжди. На це питання відповідь дає теорема.

Теорема: Для того, щоб нескінченно диференційована в точці x_0 функція $f(x)$ була сумою складеного для неї ряду Тейлора, необхідно і достатньо, щоб залишковий член ряду

$$R_n=f(x)-S_n(x)$$

прямував до нуля при $n\to\infty$.

Висновок: ця теорема показує, що для дослідження питання про розкладання функції в ряд Тейлора потрібно дослідити поведінку його залишкового члена при $n\to\infty$.

Розкладання в ряд Маклорена основних елементарних функцій

1. $f(x)=e^x$. Так як

$f(x)=f'(x)=f''(x)=...=f^{(n)}(x)=e^x$,

$f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^{(n)}(0)=1$,

тоді за формулою (*) маємо

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+....$$

Знаходимо область збіжності $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n!\cdot x^{n+1}}{(n+1)!\cdot x^n}\right|=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$. Ряд збігається при будь-яких x. Область збіжності ряду $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. $f(x)=\sin x$. Обчислимо похідні та їх значення в нулі

$f(x)=\sin x$, $\quad f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x$, $\quad f'(0)=1$,

$f''(x)=-\sin x$, $\quad f''(0)=0$,

$f'''(x)=-\cos x$, $\quad f'''(0)=-1$,

$f^{IV}(x)=\sin x$, $\quad f^{IV}(0)=0$,

………………………

Очевидно, що похідні парного порядку $f^{(2n)}(0)=0$, а непарного порядку $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$.

За формулою (*)

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...,$$

область збіжності $x\in(-\infty;\infty)$.

3. $f(x)=\cos x$.

Аналогічно отримуємо

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...,$$

область збіжності $x\in(-\infty;\infty)$.

Список рекомендованих джерел:

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.П. Минорский. – 13-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 352 с.
2. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, Каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.
3. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика/В.В. Фортуна, О.І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.
4. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі: навчальний посібник. – К.: Либідь, 2007.- 720 с.
5. Красс М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупринов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.
6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1: Аналитическая геометрия на плоскости и пространстве: учеб. пособие для вузов / И.А. Каплан. – 5-е изд., стер. – Х.: Харьк. ун-т, 1973. – 203 с.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 2: Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных: учеб. пособие для высш. шк. / И.А. Каплан. – 5-е изд. – Х.: Харьк. ун-т, 1973. – 367 с.
8. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 3: Интегральное исчисление функции одной независимой переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений / И.А. Каплан. – Х.: Вища школа, 1974. – 374 с.
9. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч.3. Ч.4. Интегральное исчисление функций одной независимой переменной, интегрирование дифференциальных уравнений. Кратные и криволинейные интегралы / И.А. Каплан.– 3-е изд., стереотип. – Х.: Харьк. ун-т, 1971. – 498 с.
10. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: учеб. пособие для студ. вузов / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1975. – 624 с.

Навчальне видання

Возняк Аліна Олександрівна
Тернов Сергій Олексійович

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ВИЩА МАТЕМАТИКА

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2,75.

Донецький національний університет економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського
50042, Дніпропетровська обл.,
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.