

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Донецький національний університет економіки і  
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

**О.Є. Мельник, Л.О. Цвіркун,**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ  
ДИСЦИПЛІНИ**

**Опір матеріалів**

Ступінь: бакалавр

Кривий Ріг  
2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Донецький національний університет економіки і  
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

**О.Є. Мельник, Л.О. Цвіркун,**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ  
ДИСЦИПЛІНИ**

**Опір матеріалів**

Ступінь: бакалавр

**Методичні рекомендації для вивчення дисципліни**

Затверджено на засіданні  
кафедри загальноінженерних дисциплін  
та обладнання  
Протокол № 5  
від «12» листопада 2020 р.

Рекомендовано навчально-  
методичною радою ДонНУЕТ  
Протокол № 4  
від «17» грудня 2020 р.

УДК 338.487(072)

М 46

**Мельник О.Є., Цвіркун Л.О.**

**М 67** Опір матеріалів [Текст]: метод. рук. до вивч. дисц. / Мельник О.Є.; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. загальноінженерних дисциплін та обладнання ; О.Є. Мельник, Л.О. Цвіркун. – Кривий Ріг : [ДонНУЕТ], 2020. – 122 с.

Методичні рекомендації розроблені для надання допомоги студентам у процесі вивчення дисципліни «Опір матеріалів». Методичні рекомендації містять перелік питань для підготовки до підсумкового контролю та перелік основної та додаткової літератури.

© Мельник О.Є., Цвіркун Л.О., 2020

© Донецький національний університет  
економіки і торгівлі імені Михайла  
Туган-Барановського, 2020

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	5
<b>ЧАСТИНА 1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»</b> .....	6
<b>ЧАСТИНА 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ</b> .....	11
Змістовий модуль 1. Напружено-деформований стан.....	12
Змістовий модуль 2. Динамічні навантаження.....	65
<b>ЧАСТИНА 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ</b> .....	80
Змістовий модуль 1. Напружено-деформований стан .....	81
Змістовий модуль 2. Динамічні навантаження.....	106

## ВСТУП

Основною метою вивчення дисципліни є формування системи знань основних принципів і методів оцінки внутрішніх сил, напружень і переміщень, що виникають в перерізах стержнів, балок при деформаціях розтягнення – стискання, зсуву, вигину, крутіння; практичних навичок у процесі розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість різних тіл та елементів конструкцій.

Головне завдання навчальної дисципліни полягає в ознайомленні студентів з розумінням природи і сутності процесів, що виникають в тілах при навантаженні; основними видами деформацій; навчити здійснювати розрахунок елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість тощо.

Предмет: вивчення основних принципів і методів опіру матеріалів.

**ЧАСТИНА 1.**  
**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ**  
**ДИСЦИПЛІНИ**

## 1. Опис дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Обов'язкова (для студентів спеціальності "назва спеціальності") / вибіркова дисципліна	<b>Обов'язкова для студентів спеціальностей: 133 «Галузеве машинобудування», 142 «Енергетичне машинобудування»</b>
Семестр (осінній / весняний)	<b>Весняний</b>
Кількість кредитів	<b>5</b>
Загальна кількість годин	<b>150</b>
Кількість змістових модулів	<b>2</b>
Лекції, годин	<b>32</b>
Практичні / семінарські, годин	<b>32</b>
Лабораторні, годин	<b>-</b>
Самостійна робота, годин	<b>86</b>
Тижневих годин для денної форми навчання:	
аудиторних	<b>4</b>
самостійної роботи студента	<b>5,4</b>
Вид контролю	<b>екзамен</b>

## 2. Програма дисципліни

**Ціль** – формування системи знань основних принципів і методів оцінки внутрішніх сил, напружень і переміщень, що виникають в перерізах стержнів, балок при деформаціях розтягнення – стискання, зсуву, вигину, крутіння; практичних навичок у процесі розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість різних тіл та елементів конструкцій.

**Завдання:** ознайомити студентів з розумінням природи і сутності процесів, що виникають в тілах при навантаженні; основними видами деформацій; навчити здійснювати розрахунок елементів конструкцій на міцність, жорсткість, стійкість тощо.

**Предмет:** вивчення основних принципів і методів опіру матеріалів.

**Зміст дисципліни розкривається в темах:**

1. Вступ. Метод перерізу. Види деформації.
2. Розтяг та стиск.
3. Фізико-механічні властивості матеріалів.
4. Теорії (гіпотези) міцності. Зріз і зминання.
5. Геометричні характеристики плоских перерізів.
6. Напружено-деформований стан стержнів.
7. Кручення.
8. Згин прямих стержнів.
9. Складний опір.

10. Динамічні навантаження.
11. Стійкість стиснутих стержнів.
12. Розрахунок циліндричних судин.

### 3. Структура дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма навчання)				
	усього	у тому числі			
		лекц.	пр./сем.	лаб.	СРС
1	2	3	4	5	6
<b>Змістовий модуль 1. Загальні положення опору матеріалів та напружено-деформований стан стержнів</b>					
Тема 1. Вступ. Метод перерізу. Види деформації.	7	2	-	-	5
Тема 2. Розтяг та стиск.	9	2	2	-	5
Тема 3. Фізико-механічні властивості матеріалів.	7	2	-	-	5
Тема 4. Теорії (гіпотези) міцності. Зріз і зминання.	12	2	4	-	6
Тема 5. Геометричні характеристики плоских перерізів.	9	2	2	-	5
Тема 6. Напружено-деформований стан стержнів.	12	2	4	-	6
Тема 7. Кручення.	9	2	2	-	5
Тема 8. Згин прямих стержнів.	14	4	4	-	6
<b>Разом за змістовим модулем 1</b>	<b>79</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>-</b>	<b>43</b>
<b>Змістовий модуль 2. Складний напружений стан та динамічні навантаження</b>					
Тема 9. Складний опір.	18	4	4	-	10
Тема 10. Динамічні навантаження.	18	2	4	-	12
Тема 11. Стійкість стиснутих стержнів.	16	4	2	-	10
Тема 12. Розрахунок циліндричних судин.	19	4	4	-	11
<b>Разом за змістовим модулем 2</b>	<b>71</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>-</b>	<b>43</b>
<b>Усього годин</b>	<b>150</b>	<b>32</b>	<b>32</b>	<b>-</b>	<b>86</b>

### 4. Теми семінарських/практичних/лабораторних занять

№ з/п	Тема практичного заняття	Кількість годин
1	Практичне заняття 1. Розтяг (стиск).	2
2	Практичне заняття 2. Напружено-деформований стан.	2
3	Практичне заняття 2. Напружено-деформований стан.	2
3	Практичне заняття 3. Зріз і зминання.	2
4	Практичне заняття 3. Зріз і зминання.	2
5	Практичне заняття 4. Геометричні характеристики плоских перерізів.	2
6	Практичне заняття 5. Кручення.	2

7	Практичне заняття 5. Кручення.	2
8	Практичне заняття 6. Згин.	2
9	Практичне заняття 7. Складний опір.	2
10	Практичне заняття 7. Складний опір.	2
11	Практичне заняття 8. Стійкість стиснутих стержнів.	2
12	Практичне заняття 9. Динамічні навантаження.	2
13	Практичне заняття 9. Динамічні навантаження.	2
14	Практичне заняття 10. Розрахунок товстостінних циліндричних судів.	2
15	Практичне заняття 10. Розрахунок товстостінних циліндричних судів.	2
<b>Всього</b>		<b>32</b>

### 5. Розподіл балів, які отримують студенти

Відповідно до системи оцінювання знань студентів ДонНУЕТ, рівень сформованості компетентностей студента оцінюються у випадку проведення екзамену: впродовж семестру (50 балів) та при проведенні підсумкового контролю - екзамену (50 балів).

### Оцінювання студентів протягом семестру (очна форма навчання)

№ теми семінарського о/практичного заняття	Аудиторна робота				Позааудиторна робота	Сума балів
	Тестові завдання	Ситуаційні завдання, задачі	Обговорення теоретичних питань теми	ПМК	Завдання для самостійного виконання	
<b>Змістовий модуль 1</b>						
Тема 1		2	1		1	4
Тема 2			1		1	2
Тема 2		2				2
Тема 3			1		1	2
Тема 3		2				2
Тема 4		2	1		1	4
Тема 5			1		1	2
Тема 5		2				2
Тема 6		2	1	5	1	9
<b>Разом за змістовим модулем 1</b>		<b>12</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>29</b>
<b>Змістовий модуль 2</b>						
Тема 7			1		1	2
Тема 7		2				2
Тема 8		2	1		1	4

Тема 9			1		1	2
Тема 9		2				2
Тема 10			1		1	2
Тема 10		2		5		7
<b>Разом за змістовим модулем 2</b>		<b>8</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>21</b>
<b>Усього</b>		<b>20</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>50</b>

**Оцінювання студентів протягом семестру  
(заочна форма навчання)**

Поточне тестування та самостійна робота			Підсумковий тест (екзамен)	Сума в балах
Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	Індивідуальне завдання	50	100
20	15	15		

**Загальне оцінювання результатів вивчення навчальної дисципліни**

Оцінка		
100-бальна шкала	Шкала ECTS	Національна шкала
90-100	A	5, «відмінно»
80-89	B	4, «добре»
75-79	C	
70-74	D	3, «задовільно»
60-69	E	
35-59	FX	2, «незадовільно»
0-34	F	

**ЧАСТИНА 2.**  
**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ**  
**ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Напружено-деформований стан

## Тема 1. Розтяг (стиск).

1. *Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Які зусилля виникають в перерізах стержня в умовах чистого розтягання і стискання?

2. Якою гіпотезою користуються при складанні геометричних рівнянь для стержня в умовах чистого розтягання і стискання? Сформулюйте цю гіпотезу.

3. Який елемент стержня називають волокном?

4. Який вид напруженого стану реалізується в стержнях за чистого розтягання і стискання? 5. Чи виникають за чистого розтягання-стискання дотичні напруження в перерізах стержня? Якщо так, то як ці перерізи зорієнтовані відносно осі стержня

6. Сталевий стержень діаметром 40 мм розтягається силою  $F = 100$  кН . Які напруження виникають у стержні?

7. Сталевий стержень завдовжки 1 м має квадратний переріз зі стороною  $a = 20$  мм . Які жорсткості має стержень та його переріз?

8. Два стержні, виготовлені з одного матеріалу, мають однакові перерізи, але один зі стержнів довший від іншого удвічі. Який з двох стержнів жорсткіший і у скільки разів?

2. *Індивідуальне тестування.*

3. *Практичні завдання.*

### Приклад розв'язування задач

**Приклад 1.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль, нормальних напружень та переміщень перетинів сталевого ступінчастого стержня (допустиме напруження  $[\sigma] = 160$  МПа, модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па), зображеного на рисунку 1.

### Розв'язування:

Епюру внутрішніх зусиль будуюмо за допомогою методу перетинів. Розбиваємо стержень на ділянки навантаження, які розділяються точками прикладення зовнішніх сил. Таким чином маємо дві ділянки  $AB$  і  $BD$  – рисунок 2. На ділянці  $AB$  проводимо перетин 1-1 та умовно відкидаємо ліву частину стержня. До правої частини прикладена стискуюча сила  $P_1$ , тому внутрішнє зусилля в перетині 1-1 дорівнює:

$$N_1 = -P_1 = -P = -10 \text{ кН.}$$

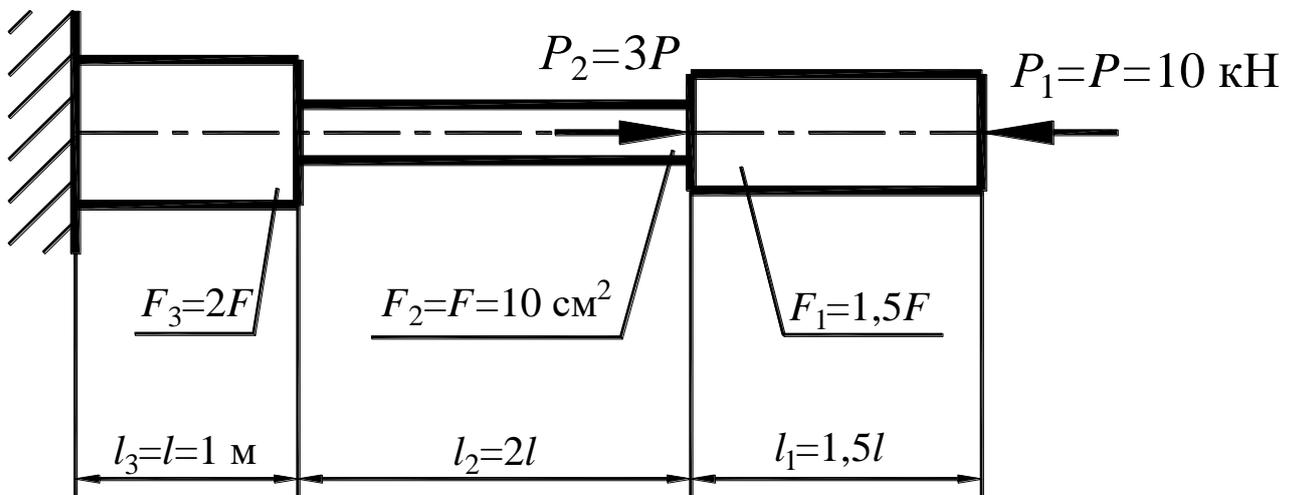


Рисунок 1. – Графічна умова до прикладу 1.

На ділянці  $BD$  проводимо перетин 2-2:

$$N_2 = -P_1 + P_2 = -P + 3P = 2P = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН.}$$

Після визначення внутрішніх зусиль на ділянках будуюмо епюру.

Для побудови епюри нормальних напружень розбиваємо стержень на ділянки навантаження, які розділяються точками прикладення зовнішніх сил і перепадами площі поперечного перетину. Таким чином маємо три ділянки –  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$ . У межах ділянки напруження для різних поперечних перетинів не змінюються і приймають такі значення:

$$\sigma_{\hat{A}\hat{A}} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-10 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -6,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = -6,7 \text{ МПа};$$

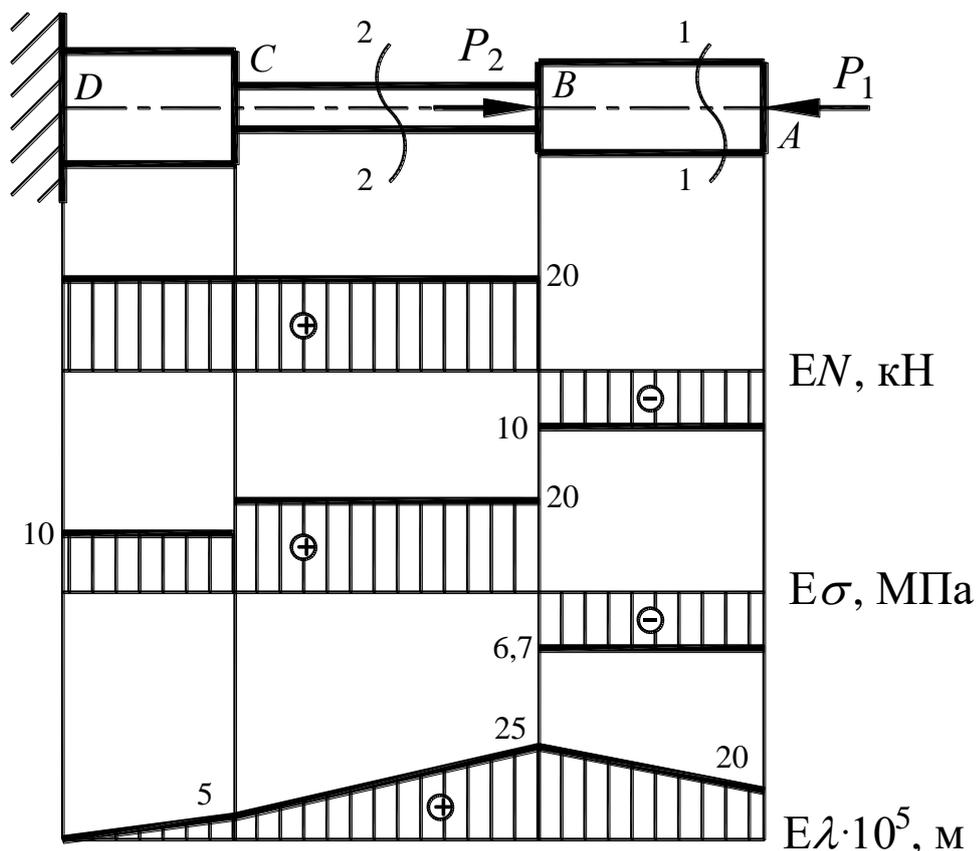


Рисунок 2. – Епюри ступінчастого стержня

$$\sigma_{\hat{A}\hat{N}} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\hat{N}D} = \frac{N_2}{F_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot 10^6 \text{ Па} = 10 \text{ МПа}.$$

Після визначення нормальних напружень на ділянках будуємо епюру.

Для побудови епюри переміщень поперечних перетинів визначаємо абсолютні деформації ділянок AB, BC і CD за законом Гука:

$$\Delta l_{\hat{A}\hat{A}} = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_2 l_3}{EF_3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Визначаємо переміщення перетинів на границях ділянок:

$$\lambda_D = 0;$$

$$\lambda_C = \lambda_D + \Delta l_{CD} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\lambda_{\hat{A}} = \lambda_{\hat{N}} + \Delta l_{\hat{A}\hat{N}} = 5 \cdot 10^{-5} + 20 \cdot 10^{-5} = 25 \cdot 10^{-5} \text{ м};$$

$$\lambda_{\hat{A}} = \lambda_{\hat{A}} + \Delta l_{\hat{A}\hat{A}} = 25 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Після визначення переміщень на границях ділянок будуюмо епюру.

**Приклад 2.** Жорсткий брус  $AB$ , деформацією якого можна знехтувати, висить горизонтально на тягах 1 і 2. Тяга 1 – сталевая (модуль Юнга  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа), круглого перетину діаметром  $d_1 = 20$  мм; тяга 2 – мідна (модуль Юнга  $E_2 = 10^5$  МПа), круглого перетину діаметром  $d_2 = 25$  мм – рисунок 3. На якій відстані  $a$  від вузла  $A$  треба помістити вантаж  $P$ , щоб і після деформації брус  $AB$  залишився горизонтальним?

**Розв’язування:**

Застосовуємо метод перетинів: розсікаємо стержні, умовно відкидаємо верхню частину конструкції з опорами, замість неї прикладаємо до стержнів внутрішні зусилля і складаємо рівняння рівноваги – рисунок 4:

$$\sum M_C = 0; -N_1 \cdot a + N_2(l - a) = 0.$$

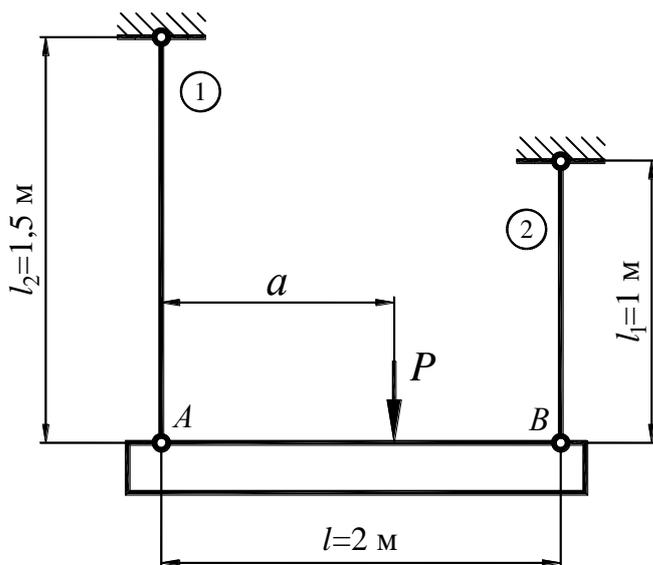


Рисунок 3. – Графічна умова до прикладу 2

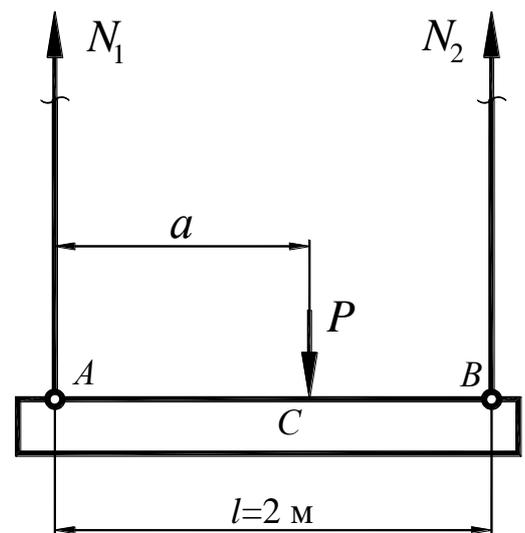


Рисунок 4. – Схема для складання рівняння рівноваги

Згідно умов задачі деформації в тягах однакові, тобто  $\Delta l_1 = \Delta l_2$ . Тому, згідно закону Гука:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} \Rightarrow N_1 = N_2 \cdot \frac{l_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{E_1 F_1}{l_1}.$$

Визначаємо площі поперечних перетинів стержнів:

$$F_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ мм}^2, \quad F_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} = 392,5 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо співвідношення внутрішніх зусиль:

$$N_1 = N_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^5 \cdot 314} \cdot \frac{10^5 \cdot 392,5}{1,5} \Rightarrow N_1 = 0,853 N_2$$

З рівняння рівноваги отримуємо:

$$a = \frac{N_2(l-a)}{N_1} = \frac{N_2(2-a)}{0,853 N_2} \Rightarrow a = 1,08 \text{ м.}$$

**Приклад 3.** Визначити розміри поперечних перетинів стержнів  $AB$  і  $BC$  кронштейна, призначеного для кріплення блоку, за допомогою якого будуть підійматися вантажі масою  $M = 2000$  кг, а також поперечний перетин підвіски  $BD$  блоку – рисунок 5. Стержень  $AB$  і підвіска  $BD$  (у верхній частині) мають круглий поперечний перетин. Матеріал – сталь Ст3. Стержень  $BC$  виготовлений із сосни і має квадратний поперечний перетин. Визначити також вертикальне переміщення вузла  $B$  кронштейна. Допустиме напруження і модуль Юнга для сталі Ст3  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E_{\text{Ст3}} = 2 \cdot 10^5$  МПа. Допустиме напруження на стиск і модуль Юнга для сосни  $[\sigma_-] = 12$  МПа,  $E_{\text{сосни}} = 10^4$  МПа.

### Розв'язування.

Конструкція кронштейну дозволяє при розрахунку наближено вважати кріплення стержнів до стінки і з'єднання їх між собою шарнірними. Розрахункова схема кронштейну зображена на рисунку б, а.

Насамперед визначимо внутрішнє зусилля в підвісці блока і рівну йому силу, яка діє на вузол  $B$ .

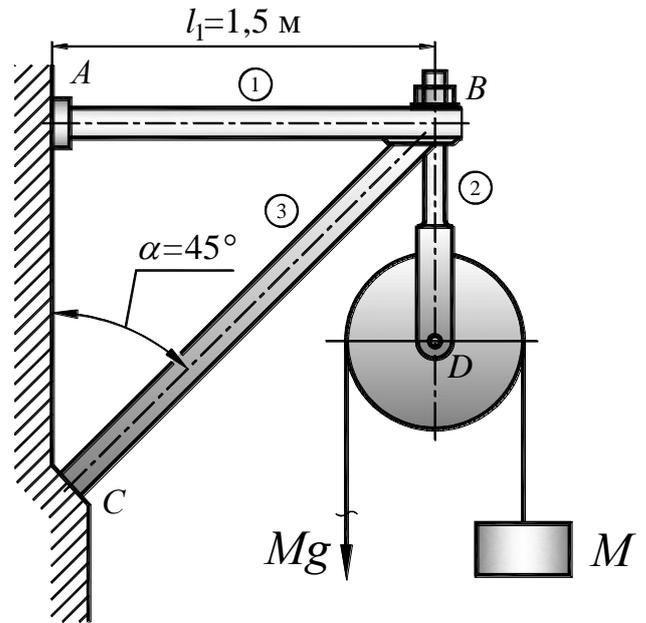


Рисунок 5. – Графічна умова до прикладу 3

При підйомі вантажу масою  $M$  до другої гілці тросу, перекинутого через блок, повинна бути прикладена сила, яка дорівнює вазі вантажу  $Mg$  (якщо знехтувати тертям), тому в перетині підвіски буде діяти внутрішнє зусилля  $N_2 = 2Mg = 2 \cdot 2000 \cdot 9,81 = 39240$  Н.

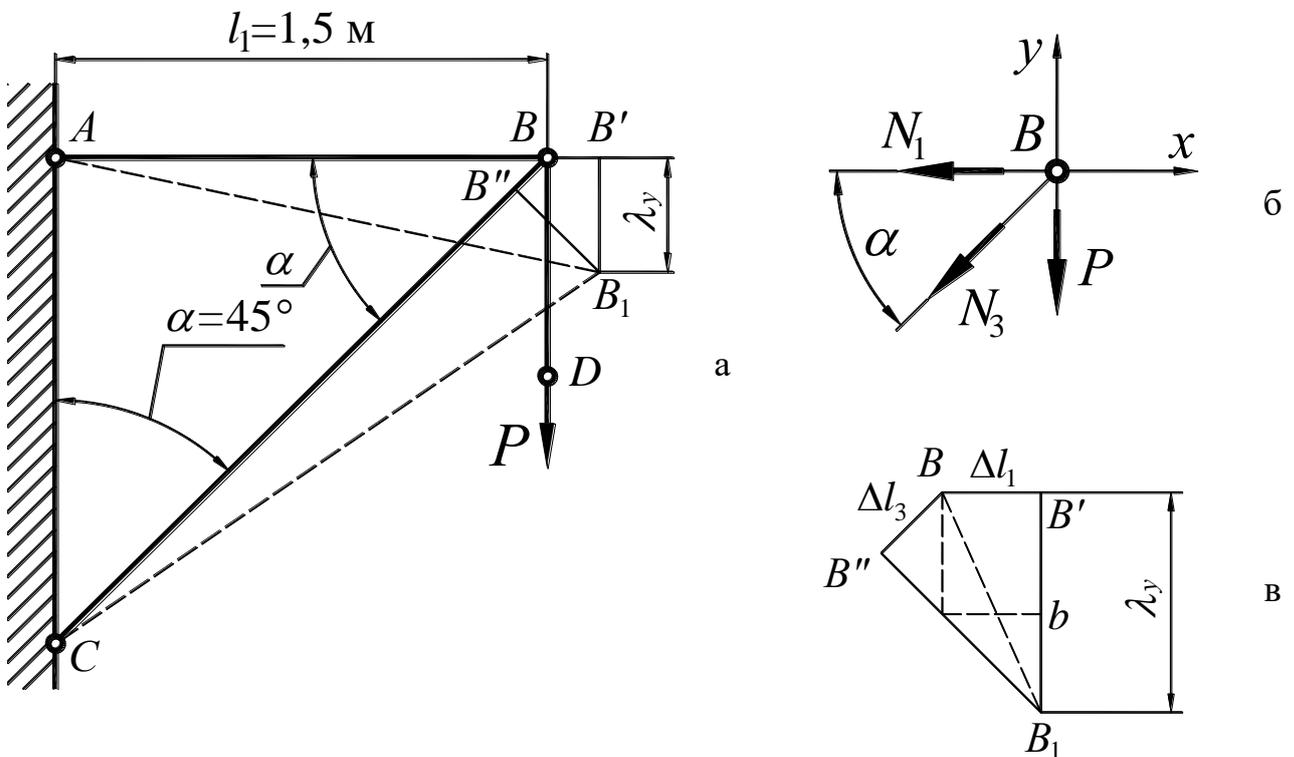


Рисунок 6. – Розрахункова схема кронштейну

До вузлу  $B$  кронштейна тоді прикладена сила  $D = N_1 = 39,24$  кН.

Визначимо необхідну площину поперечного перетину підвіски  $BD$ . З умови міцності:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} \leq [\sigma] \Rightarrow F_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{39240}{160 \cdot 10^6} = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Визначаємо діаметр підвіски:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4F_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,45 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 1,77 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Приймаємо найближчий більший стандартний діаметр  $d_2 = 18$  мм ( $F = 2,54$  см).

З прийнятих на початку розрахунку припущень стержні з'єднані зі стінкою і між собою шарнірами, тому при заданому навантаженні будуть зазнавати тільки поздовжні внутрішні зусилля. Щоб їх визначити, розглянемо рівновагу вузла  $B$ , до якого прикладені вертикальна сила і два внутрішніх зусилля в стержнях  $N_1$  і  $N_3$  - рисунок 6, б.

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum \tilde{O}_3 = 0; \quad -N_1 - N_3 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y_3 = 0; \quad -P - N_3 \sin \alpha = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$N_3 = -\frac{-P}{\sin \alpha} = -\frac{-39,24 \cdot 2}{\sqrt{2}} = -55,66 \text{ кН};$$

$$N_1 = -N_3 \cos \alpha = -55,66 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 39,24 \text{ кН},$$

тобто стержень  $AB$  розтягнутий, а стержень  $BC$  стиснутий.

З умови міцності визначаємо необхідну площу поперечного перетину стержня  $AB$ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma] \Rightarrow F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{39240}{160 \cdot 10^6} = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$F_1 = F_2, \text{ тому } d_1 = d_2 = 18 \text{ мм.}$$

Необхідна площа поперечного перетину дерев'яного стержня  $BC$ :

$$F_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma_-]} = \frac{55660}{12 \cdot 10^6} = 46,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Сторона квадрату поперечного перетину:

$$\dot{a} = \sqrt{F_3} = \sqrt{46,38 \cdot 10^{-4}} = 6,81 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Округляємо до найближчого цілого числа, приймаємо  $a = 70$  мм ( $F = 49$  см<sup>2</sup>).

Визначимо вертикальне переміщення шарніру  $B$  кронштейна. Абсолютна деформація стержня  $AB$ :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_{\bar{N}} F_1} = \frac{39,24 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,54 \cdot 10^{-4}} = 1,18 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Абсолютна деформація стержня  $BC$ :

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_{\bar{A}} F_3} = \frac{-55,66 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 2}{10^{10} \cdot 49 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2}} = -2,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Для визначення вертикального переміщення вузла  $B$  складаємо діаграму Віллію – рисунок 6, в: умовно роз'єднуємо стержні у вузлі  $B$ , відкладаємо вздовж стержня  $AB$  його деформацію  $\Delta l_1$  (відрізок  $BB'$ ), вздовж стержня  $BC$  його деформацію  $\Delta l_3$  (відрізок  $BB''$ ), через точки  $B'$  і  $B''$  проводимо перпендикуляри до стержнів і на їх перетині отримуємо точку  $B_1$ , яка визначає положення вузла  $B$  після деформації стержнів. З діаграми Віллію, використовуючи залежності між сторонами прямокутного трикутника, отримуємо вертикальне переміщення вузла  $B$ :

$$\lambda_{\delta} = \hat{A}' B_1 = B_1 b + b B' = \frac{\Delta l_1}{\text{tg } \alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin \alpha} = \frac{1,18}{1} + \frac{2,42 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4,61 \text{ мм}.$$

## Тема 2. Напружено-деформований стан.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Виведіть рівняння питомої потенційної енергії змінення об'єма та

змінення форми для випадків для плоского та лінійного напруженого стану.

2. Запишіть рівняння питомої потенціальної енергії змінення об'єма та зміни форми для випадків: осьовий розтяг, чистий зсув.

3. Який стан матеріалу називається небезпечним? Чим характеризується поява небезпечного стану для пластичних та крихких матеріалів?

4. Чому питання про те, що є причиною граничного стану, не має значення для розрахунків на міцність при лінійному напруженому стані?

5. Чому питання о міцності в умовах складного напруженого стану треба вирішувати на основі результатів досліджень, які проводяться при лінійному напруженому стані?

2. *Індивідуальне тестування.*

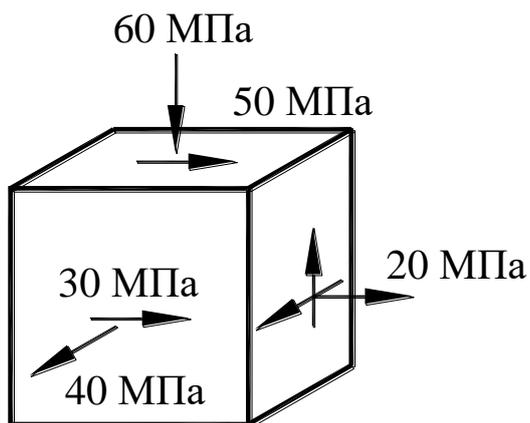
3. *Практичні завдання.*

### Приклад розв'язування задач

**Приклад 1.** Визначити відносну зміну об'єму сталевого кубика.

**Розв'язування:**

Відносну зміну об'єму визначаємо за формулою:



$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Головні напруження:

$$\sigma_1 = 40 \text{ МПа}, \sigma_2 = 20 \text{ МПа}, \sigma_3 = -60 \text{ МПа}.$$

$$\text{Отже, } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 40 + 20 - 60 = 0, \text{ тобто } \varepsilon_V = 0.$$

Рисунок 1 – Графічна умова до прикладу 1.

**Приклад 2.** Обчислити відносну деформацію діагоналі  $AB$ , якщо

матеріал стержня – сталь (модуль Юнга  $\dot{A} = 2 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ ) і  $\sigma_1 = 100$  МПа.

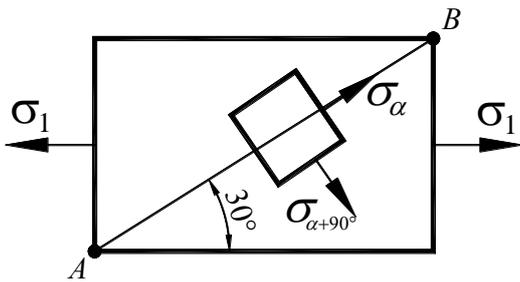


Рисунок 2. – Графічна умова до прикладу 2.

**Розв'язування:**

Для визначення деформації діагоналі  $AB$  попередньо обчислюємо нормальні напруження на площадках, нахилених під кутами  $\alpha = 30^\circ$  і  $\beta = 30^\circ + 90^\circ$  до осі стержня:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha = 100 \cdot \cos^2 30^\circ = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^\circ) = \sigma_1 \sin^2 \alpha = 100 \cdot \sin^2 30^\circ = 25 \text{ МПа}.$$

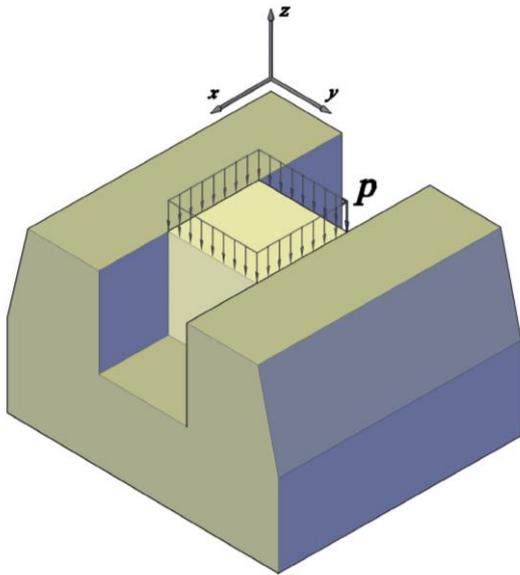
Деформацію діагоналі  $AB$  визначаємо за узагальненим законом Гука:

$$\varepsilon_{\dot{A}\dot{A}} = \frac{1}{\dot{A}} (\sigma_\alpha - \mu \sigma_\beta) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (75 - 0,3 \cdot 25) = 33,75 \cdot 10^{-5}.$$

**Приклад 3.** Дюралевий кубик вільно, але без зазорів, вставлений в прорізь масивної деталі, яку можна вважати абсолютно жорсткою – рисунок 2.9. По верхній грані кубик навантажений рівномірно розподіленими силами інтенсивністю  $\delta = 60$  МПа. Визначити тиск кубика на стінки деталі, відносну зміну його об'єму і максимальні дотичні напруження. Для матеріалу кубика модуль Юнга  $\dot{A} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,36$ .

**Розв'язування:**

Внаслідок абсолютної жорсткості масивної деталі деформація кубика у напрямку осі  $y$  дорівнює нулю.



Звідси, враховуючи, що  $\sigma_z = -p$  і  $\sigma_x = 0$  (в напрямку осі  $x$  деформації кубика ніщо не протидіє), за узагальнюючим законом Гука будемо мати:

$$\varepsilon_{\delta} = \frac{1}{A} (\sigma_{\delta} - \mu \sigma_z) = 0, \text{ звідки}$$

$$\sigma_{\delta} = \mu \sigma_z = -\mu \cdot p = -0,36 \cdot 60 = -21,6 \text{ МПа.}$$

Рисунок 3. – Графічна умова до прикладу 3.

Тиск кубика на стінки деталі чисельно дорівнює напруження  $\sigma_{\delta}$ .

Відносна зміна об'єму кубика:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \frac{1-2 \cdot 0,36}{0,7 \cdot 10^5} (-21,6 - 60) = -32,6 \cdot 10^{-5}.$$

Оскільки на гранях кубика відсутні дотичні напруження, то ці грані – головні площадки. Найбільше з алгебраїчної точки зору напруження дорівнює нулю:  $\sigma_1 = \sigma_{\delta} = 0$ . Інші два напруження від'ємні:  $\sigma_2 = \sigma_{\delta} = -21,6$  МПа,  $\sigma_3 = \sigma_z = -60$  МПа.

Максимальне дотичне напруження:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{0 - (-60)}{2} = 30 \text{ МПа.}$$

### Тема 3. Зріз і зминання.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. При якій деформації у поперечному перерізі виникає лише поперечна сила?
2. Як розподіляються дотичні напруги при зрізі?

3. Сформулюйте умову міцності на зріз.
4. Яка деформація називається зминанням ?
5. Як визначити площу поверхні зминання ?
6. Сформулюйте умову міцності на зминання.

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Тяги 1 і 2 з'єднані між собою за допомогою штиря 3, вставленого в прорізі проушин, і навантажені осьовими силами  $P$  – рисунок 1. Визначити допустиму величину сили  $P$ . Допустимі напруження матеріалів тяг і штиря: на розтяг  $[\sigma]=120$  МПа, на зріз  $[\tau_{\zeta\delta}]=80$  МПа, на зминання  $[\sigma_{\zeta i}]=210$  МПа.

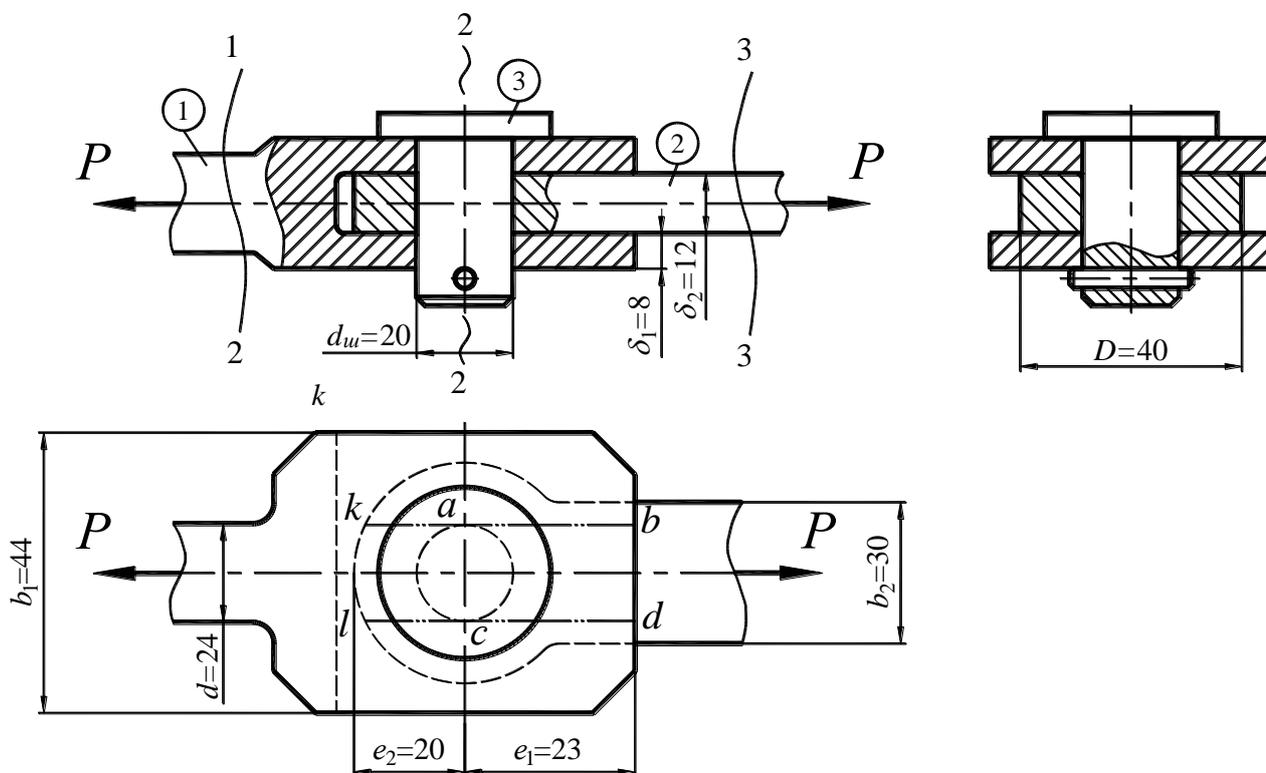


Рисунок 1.- Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 1.

### Розв'язування:

Допустиме навантаження  $P$  з'єднання будемо визначати із розрахунків тяг на розтяг, штиря на зріз, стінок отворів в тягах на зминання і країв проушин на зріз.

В результаті кожного зі вказаних розрахунків загальному випадку отримаємо різні значення допустимого навантаження.

Рішенням задачі є така величина навантаження, при якій забезпечена міцність всіх елементів конструкції, тобто найменша із отриманих за результатами окремих розрахунків.

#### 1. Розрахунок тяги 1 на розтяг.

Визначаємо площі поперечних перетинів тяги 1 в перетинах 1-1 і 2-2:

$$F_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 24^2}{4} = 452 \text{ мм}^2; F_2 = 2\delta_1(b - d_\phi) = 2 \cdot 8(44 - 20) = 384 \text{ мм}^2.$$

Допустиме навантаження розраховуємо по перетину з найменшою площею:

$$[D]_\delta^I = [\sigma] \cdot F_2 = 120 \cdot 10^6 \cdot 384 \cdot 10^{-6} = 46080 \text{ Н.}$$

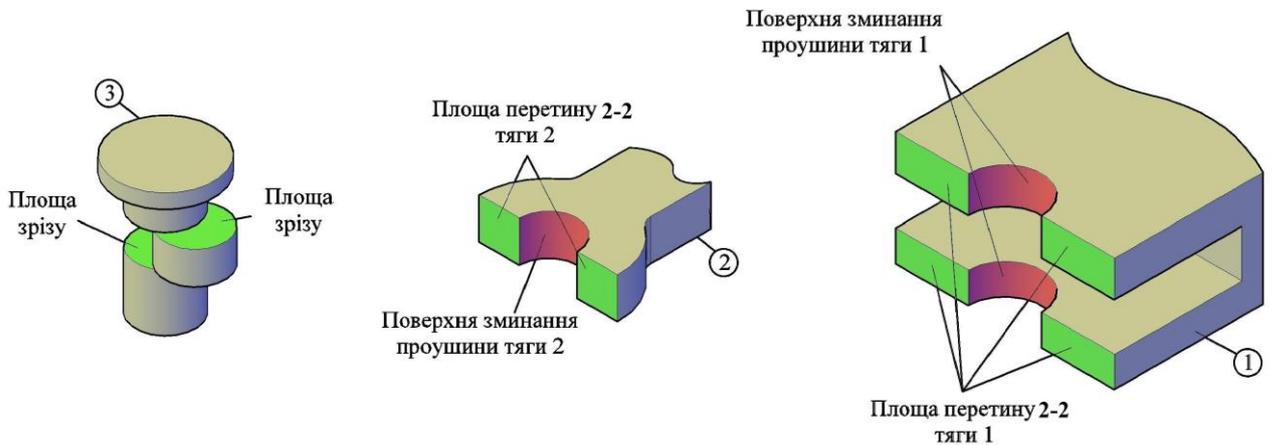


Рисунок 2. – Схеми для визначення площ зрізу і зминання

#### 2. Розрахунок тяги 2 на розтяг.

Визначаємо площі поперечних перетинів тяги 2 в перетинах 2-2 і 3-3:

$$F_2 = \delta_2(D - d_\phi) = 12(40 - 20) = 240 \text{ мм}^2; F_3 = \delta_2 b_2 = 12 \cdot 30 = 360 \text{ мм}^2.$$

Допустиме навантаження розраховуємо по перетину з найменшою

площею:

$$[D]_{\delta}^2 = [\sigma] \cdot F_2 = 120 \cdot 10^6 \cdot 240 \cdot 10^{-6} = 28800 \text{ Н.}$$

3. Розрахунок штиря на зріз. Штир має дві площини зрізу, як показано на рисунку 3.2, тому:

$$[D]_{\zeta\delta} = [\tau_{\zeta\delta}] \cdot F_{\zeta\delta} = [\tau_{\zeta\delta}] \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot d_{\phi}}{4} = 80 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot \frac{\pi \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 50240 \text{ Н.}$$

4. Розрахунок стінок отворів проушин на зминання.

Визначаємо площі зминання для тяг 1 і 2 – рисунок 2.:

$$F_{\zeta i}^1 = 2\delta_1 d_{\phi} = 2 \cdot 8 \cdot 20 = 320 \text{ мм}^2;$$

$$F_{\zeta i}^2 = \delta_2 d_{\phi} = 12 \cdot 20 = 240 \text{ мм}^2.$$

Допустиме навантаження розраховуємо для тяги 2 з меншою площею зминання:

$$[D]_{\zeta i} = [\sigma_{\zeta i}] \cdot F_{\zeta i}^2 = 210 \cdot 10^6 \cdot 240 \cdot 10^{-6} = 50400 \text{ Н.}$$

5. Розрахунок країв проушин на зріз.

Напрямок виколування для проушин тяги 1 визначають лінії  $ab$  і  $cd$  – рисунок 1, для вушка тяги 2 – лінії  $ak$  і  $cl$ .

Визначаємо площі зрізу для тяг 1 і 2:

$$F_{\hat{a}\hat{e}}^1 = 2\hat{a}_1 \cdot 2\delta_1 = 2 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 8 = 736 \text{ мм}^2;$$

$$F_{\hat{a}\hat{e}}^2 = 2\hat{a}_2 \delta_2 = 2 \cdot 20 \cdot 12 = 480 \text{ мм}^2.$$

Тут не враховувалася незначна різниця між розміром  $e_2$  і довжиною ліній  $ak$  і  $cl$ .

Допустиме навантаження розраховуємо для тяги 2 з меншою площею зрізу:

$$[D]_{\hat{a}\hat{e}} = [\tau_{\zeta\delta}] \cdot F_{\hat{a}\hat{e}}^2 = 80 \cdot 10^6 \cdot 480 \cdot 10^{-6} = 38400 \text{ Н.}$$

Таким чином, допустиме навантаження з'єднання  $[D] = [D]_{\delta}^2 = 28,8 \text{ кН}$  обмежується міцністю тяги 2 на розтяг по перетину, який проходить через центр отворів для штиря.

**Приклад 2.** Визначити діаметр  $D$  і висоту  $h$  головки стержня,

навантаженого осьовою силою  $P$  – рисунок 3. Розрахунок виконати, виходячи з умов рівномірності стержня на розтяг, головки на зріз і її опорної поверхні на зминання. Допустимі напруження матеріалу стержня: на розтяг  $[\sigma] = 140$  МПа, на зріз  $[\tau_{\zeta\delta}] = 100$  МПа, на зминання  $[\sigma_{\zeta i}] = 250$  МПа.

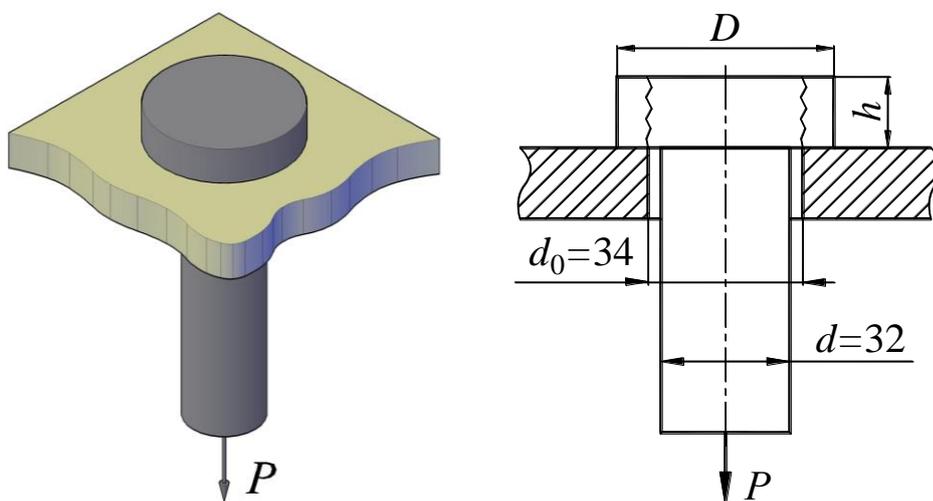


Рисунок 3. – Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 3.2

**Розв'язування:**

1. Визначаємо допустиме навантаження із умови міцності стержня на розтяг:

$$[D]_{\delta} = [\sigma] \cdot F_p = [\sigma] \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 140 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi \cdot (32 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 112538 \text{ Н.}$$

2. Визначаємо діаметр опорної поверхні головки із умови її міцності на зминання:

$$\sigma_{\zeta i} = \frac{P}{F_{\zeta i}} \leq [\sigma_{\zeta i}].$$

Приймаючи  $D = [D]_{\delta}$ , будемо мати:

$$\sigma_{\zeta i} = \frac{[D]_{\delta}}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d_0^2)} \leq [\sigma_{\zeta i}], \text{ звідки}$$

$$D \geq \sqrt{\frac{4[P]_p}{\pi[\sigma_{\zeta i}]} + d_0^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 112538}{\pi \cdot 250 \cdot 10^6} + (34 \cdot 10^{-3})^2} = 41,7 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Приймаємо  $D = 42$  мм.

3. Визначаємо висоту головки із умови міцності на зріз:

$$\tau_{\zeta\delta} = \frac{D}{F_{\zeta\delta}} \leq [\tau_{\zeta\delta}].$$

Площина зрізу дорівнює боковій поверхні циліндра висотою  $h$  і діаметром  $d_0$  (місце можливого зрізу умовно показано на рисунку 3 ломаними лініями).

Приймаючи  $D = [D]_{\delta}$ , будемо мати:

$$\tau_{\zeta\delta} = \frac{[D]_{\delta}}{\pi \cdot d_0 h} \leq [\tau_{\zeta\delta}], \text{ звідки}$$

$$h \geq \frac{[P]_p}{\pi \cdot d_0 [\tau_{\zeta\delta}]} = \frac{112538}{\pi \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^6} = 10,55 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Приймаємо  $h = 11$  мм.

**Приклад 3.** Перевірити міцність заклепчного з'єднання, схема якого зображена на рисунку 4. Допустимі напруження матеріалів: на розтяг  $[\sigma] = 160$  МПа, на зріз  $[\tau_{\zeta\delta}] = 140$  МПа, на зминання  $[\sigma_{\zeta i}] = 320$  МПа.

#### ***Розв'язування:***

Міцність заклепчного з'єднання перевіримо із розрахунків смуги на розтяг, заклепок на зріз і отворів смуги та косинки на зминання.

1. Розрахунок смуги на розтяг.

Спираючись на припущення, що кожна заклепка сприймає однакове зусилля, яке дорівнює для заданої схеми з п'ятьма заклепками  $0,2P$ , будемо епюру внутрішніх зусиль смуги. Аналіз епюри показує, що небезпечним є перетин 1-1, в якому виникає найбільше поздовжнє зусилля  $N_1 = P$  і який ослаблений одним отвором під заклепку, або перетин 2-2, в якому виникає поздовжнє зусилля  $N_2 = 0,8P$  і який ослаблений двома отворами під заклепки.

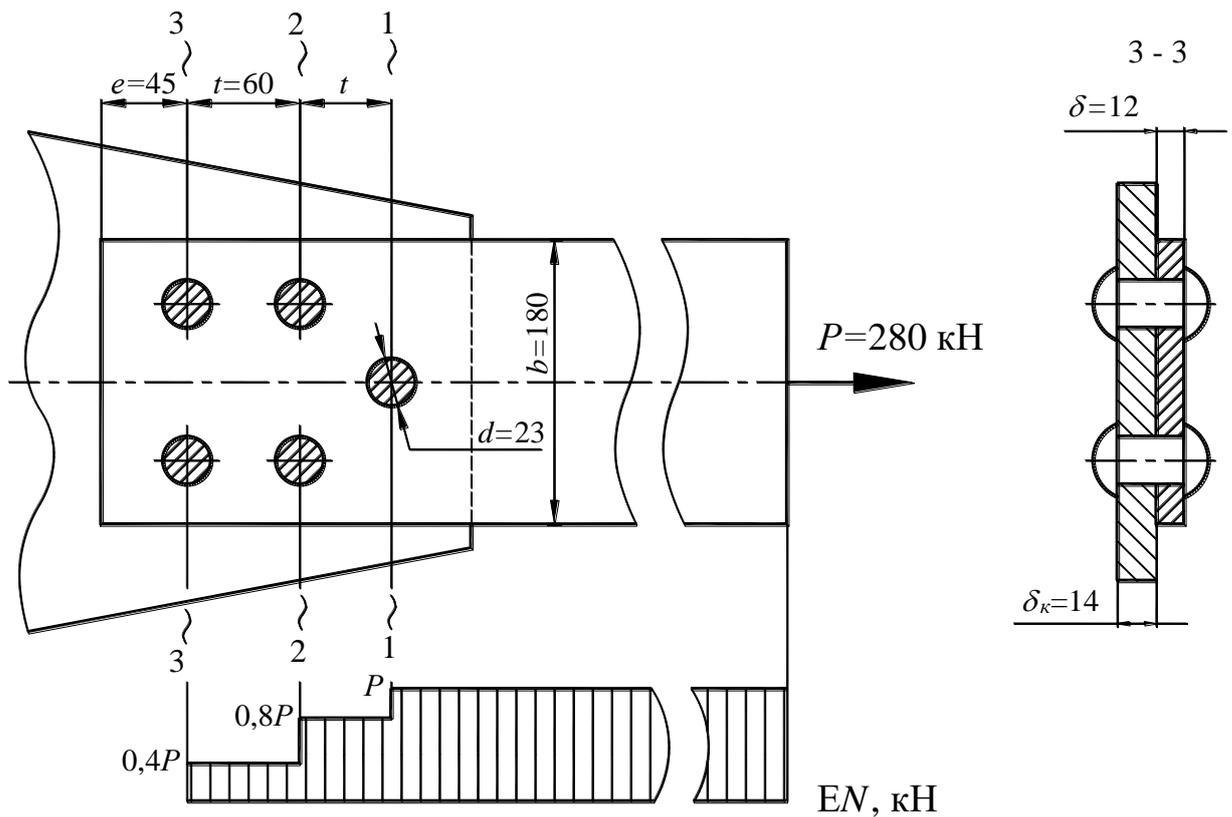


Рисунок 4. – Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 3.

Напруження у перетині 1-1:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{\delta(b-d)} = \frac{280 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-3}(180-23) \cdot 10^{-3}} = 148,6 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Напруження у перетині 2-2:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{0,8P}{\delta(b-2d)} = \frac{0,8 \cdot 280 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-3}(180-2 \cdot 23) \cdot 10^{-3}} = 139,3 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Отже, небезпечним є перетин 1-1, умова міцності для якого має вигляд:

$$\sigma_1 = 148,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа, тобто міцність забезпечена.}$$

2. Розрахунок заклепок на зріз.

Сумарна площа зрізу заклепок:

$$F_{\zeta\delta} = 5 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 5 \cdot \frac{\pi \cdot 23^2}{4} = 2076 \text{ мм}^2.$$

Перевіримо заклепки на зріз:

$$\tau_{\zeta\delta} = \frac{D}{F_{\zeta\delta}} = \frac{280 \cdot 10^3}{2076 \cdot 10^{-6}} = 135 \cdot 10^6 \text{ Па} < [\tau_{\zeta\delta}] = 140 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

тобто умова міцності виконана.

### 3. Розрахунок отворів смуги і косинки на зминання.

Оскільки смуга з косинкою виконані з однакового матеріалу і товщина косинки більша за товщину смуги, достатньо перевірити на зминання отвори смуги.

Сумарна площа зминання:

$$F_{\zeta i} = 5d\delta = 5 \cdot 23 \cdot 12 = 1380 \text{ мм}^2.$$

Перевіряємо отвори смуги на зминання:

$$\sigma_{\zeta i} = \frac{D}{F_{\zeta i}} = \frac{280 \cdot 10^3}{1380 \cdot 10^{-6}} = 203 \cdot 10^6 \text{ Па} < [\sigma_{\zeta i}] = 320 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

тобто умова міцності виконана.

## Тема 4. Геометричні характеристики плоских перетинів

*1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. За якими формулами знаходять координати центру ваги плоскої фігури?

2. Чому дорівнює сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей?

3. Для яких фігур можливо без розрахунків встановити положення головних центральних осей?

4. Відносно яких центральних осей осьові моменти інерції мають найбільше і найменше значення?

5. Який із двох моментів інерції квадратного перерізу більший: відносно центральної осі, паралельній сторонам, чи відносно центральної вісі, що проходить через діагональ?

6. За якою формулою знаходять відцентрований момент інерції?

7. За якою формулою знаходять кут нахилу головних центральних осей?

8. За якими формулами визначають осьові моменти інерції простих фігур (трикутника, прямокутника, кола)?

9. За якими формулами знаходять осьові моменти інерції напівкруга, відносно осей які проходять через центр ваги перерізу?

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

**Приклад 1.** Визначити координати центра ваги перетину у формі півкола – рисунок 1.

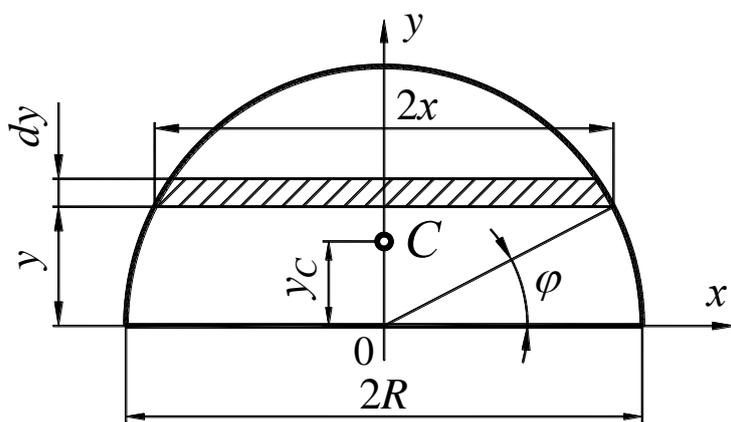
**Розв'язування:**

Оскільки  $y$  є віссю симетрії перетину, то  $\bar{\delta}_{\tilde{N}} = 0$ .

Визначаємо статичний момент перетину відносно осі  $x$ :

$$S_x = \int_F y dF.$$

Виділимо у перетині нескінченно малий елемент у вигляді смуги довжиною  $2x$  і товщиною  $dy$ , яку можна розглядати як елементарний прямокутник.



Площа елемента:

$$dF = 2x dy.$$

Виразимо координати  $x$  і  $y$  через радіус  $R$  і кут  $\varphi$ :

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

Рисунок 1. – Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 1.

Тоді диференціал  $dy$  дорівнює:

$$dy = d(R \sin \varphi) = R \cos \varphi d\varphi.$$

З урахуванням попередніх розрахунків будемо мати:

$$S_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R \cos \varphi (R \cos \varphi) R \sin \varphi d\varphi = 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3} R^3$$

Визначаємо координату  $y_C$ :

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{2R^3 \cdot 2}{3 \cdot \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424 R.$$

**Приклад 2.** Визначити положення центру ваги прямокутного перетину розміром  $h \times b = 50 \times 30$  см, ослабленого круглим отвором діаметром  $d = 18$  см – рисунок 2. Центр кола розташований на відстані  $c = 15$  см від верхньої сторони прямокутника.

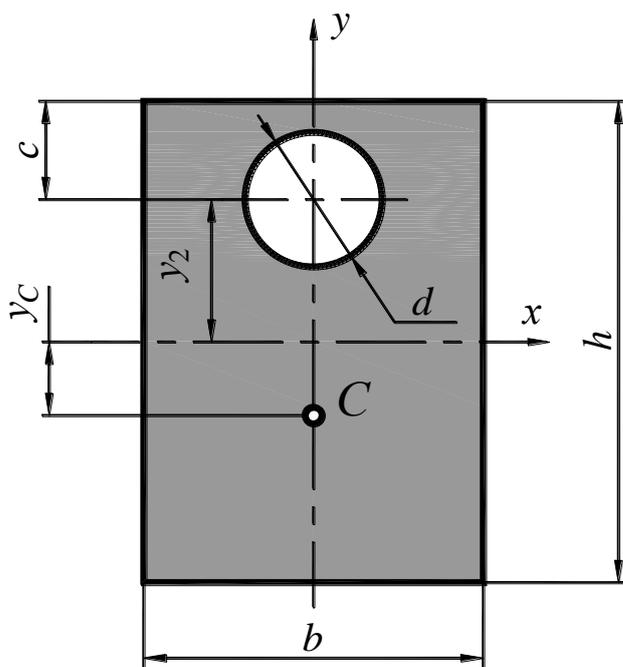


Рисунок 2. - Графічна умова до прикладу 2.

**Розв'язування:**

Оскільки  $y$  є віссю симетрії перетину, то  $\tilde{\sigma}_N = 0$ .

Розбиваємо перетин на елементарні фігури: прямокутник з площею  $F_1 = bh = 30 \cdot 50 = 1500$  см<sup>3</sup> і круг площею

$$F_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 18^2}{4} \approx 254$$
 см<sup>3</sup>.

За систему відліку приймаємо осі симетрії прямокутника. Тоді його статичні моменти відносно обраних осей дорівнюють нулю.

Статичний момент кола відносно осі  $x$ :

$$S_x = F_2 y_2 = F_2 \left( \frac{h}{2} - c \right) = 254 \left( \frac{50}{2} - 15 \right) = 2540$$
 см<sup>3</sup>.

Визначаємо координату  $y_C$  перетину:

$$\delta_{\bar{N}} = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{S_1 - S_2}{F_1 - F_2} = \frac{0 - 2540}{1500 - 254} = -2,04 \text{ см.}$$

**Приклад 3.** Круглий диск радіусом  $R$  з восьми прямокутними отворами розміром  $b \times \delta$  на радіусі  $r_0$  має центральний круглий отвір радіусом  $r$  - рисунок 3. Обчислити осьові і полярний моменти інерції диску відносно центральних осей.

**Розв'язування:**

Оскільки перетин полярно симетричний, то  $I_x = I_y = 0,5I_P$  (полюсом є центр ваги  $C$  перетину).

Обчислюємо полярні моменти інерції елементарних фігур, які складають перетин, відносно власних центрів ваги (для диску і круглого отвору центром ваги є точка  $C$ , для прямокутного отвору – точка  $C_0$ ):

1) диск:  $I_D^{\hat{a}} = \frac{\pi R^4}{2}$ ;

2) круглий отвір:  $I_D^{\hat{e}} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$ ;

3) верхній прямокутний отвір:

$$I_{D1}^{\hat{i}} = I_{x1}^{\hat{i}} + I_o^{\hat{i}} = \frac{\delta b^3}{12} + \frac{b \delta^3}{12} =$$

$$\frac{b \delta (b^2 + \delta^2)}{12}.$$

Полярний момент прямокутника відносно точки  $C$ :

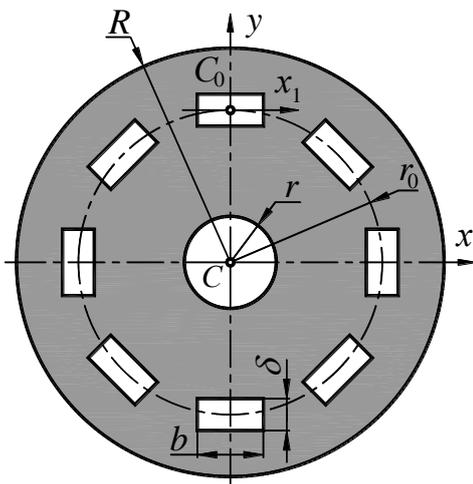


Рисунок 3 - Графічна умова до прикладу 3.

$$I_D^{\hat{i}} = I_{D1}^{\hat{i}} + r_0^2 F = \frac{b \delta (b^2 + \delta^2)}{12} + r_0^2 b \delta = \frac{b \delta (b^2 + \delta^2 + 12r_0^2)}{12}.$$

Полярний момент всього перетину відносно центра ваги  $C$ :

$$I_D^2 = I_P^{\ddot{a}} - 2\hat{e}_D^2 - 8\hat{i}_D^2 = \frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2} - \frac{2b\delta(b^2 + \delta^2 + 12r_0^2)}{3}.$$

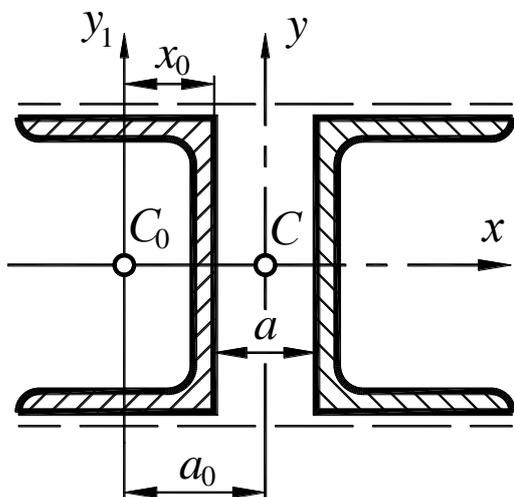
**Приклад 4.** Перетин стержня складений із двох швелерів № 20, які з'єднані між собою планками – рисунок 4. Визначити відстань  $a$ , при якій головні центральні моменти інерції перетину будуть однакові. При розрахунках планками нехтувати.

**Розв'язування:**

З додатку Л визначаємо геометричні характеристики швелера № 20:

$$I_{\phi}^{\phi} = 1530 \text{ см}^4, I_{\phi 1}^{\phi} = 134 \text{ см}^4,$$

$$F = 23,4 \text{ см}^2, x_0 = 2,3 \text{ см}.$$



Оскільки перетин має осі симетрії  $x$  і  $y$ , то вони є його центральними головними осями.

Головний момент інерції перетину відносно осі  $x$ :

$$I_{\phi}^{\phi} = 2I_x^{\phi} = 2 \cdot 1530 = 3060 \text{ см}^4.$$

Головний момент інерції перетину відносно осі  $y$ :

Рисунок 4. - Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 4.

$$I_{\phi}^{\phi} = 2(I_{\phi}^{\phi} + a_0^2 F) = 2[134 + a_0^2 \cdot 23,4] = 268 + 46,8a_0^2.$$

За умовою задачі  $I_x = I_y$ , тобто

$$3060 = 268 + 46,8a_0^2 \Rightarrow a_0 = \sqrt{\frac{3060 - 268}{46,8}} = 7,72 \text{ см}.$$

Як видно з рисунку 5,  $a_0 = 0,5a + x_0$ , тому:

$$a = \frac{a_0 - x_0}{0,5} = \frac{7,72 - 2,3}{0,5} = 10,84 \text{ см}.$$

## Тема 5. Кручення.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Що називають моментом кручення?
2. Які напруження виникають в поперечному перерізі круглого стрижня при крученні?
3. Формула для визначення дотичних напружень при крученні.
4. Чому дорівнюють дотичні напруження при крученні і де їх максимальне значення?
5. Чому дорівнює полярний момент опору при крученні? Одиниці вимірювання?
6. Формула для визначення кута закручування при крученні?

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Ступінчастий сталевий вал круглого поперечного перетину жорстко закріплений одним кінцем. Побудувати епюру крутячих моментів, максимальних дотичних напружень і кутів повороту поперечних перетинів. Модуль зсуву матеріалу бруса  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

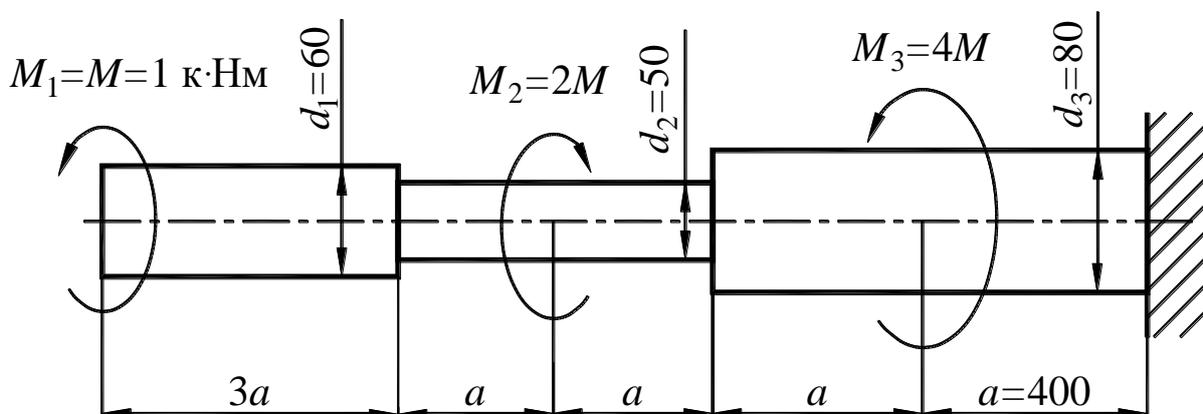


Рисунок 1. – Графічна умова до прикладу 1.

### ***Розв'язування:***

Епюру крутячих моментів будемо, починаючи з вільного (лівого) кінця, що дозволяє не визначати реактивний момент в заземленні. Застосуємо метод перетинів. Розбиваємо вал на ділянки навантаження, які розділяються місцями прикладення скручувальних моментів. Таким чином отримаємо три ділянки –  $AC$ ,  $CK$  і  $KL$  – рисунок 1. Проводимо в довільному місці ділянки  $AC$  перетин 1-1, відкидаємо ліву від перетину частину вала (оскільки там опора) і складаємо рівняння рівноваги для правої частини вала.

В результаті отримаємо:

$$\dot{M}_{\partial 1} = -\dot{M}_1 = -\dot{M} = -1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для ділянки  $CK$  (перетин 2-2):

$$\dot{M}_{\partial 2} = -\dot{M}_1 + \dot{M}_2 = -\dot{M} + 2\dot{M} = \dot{M} = 1 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для ділянки  $KL$  (перетин 3-3):

$$\dot{M}_{\partial 3} = -\dot{M}_1 + \dot{M}_2 - \dot{M}_3 = -\dot{M} + 2\dot{M} - 4\dot{M} = -3\dot{M} = -3 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

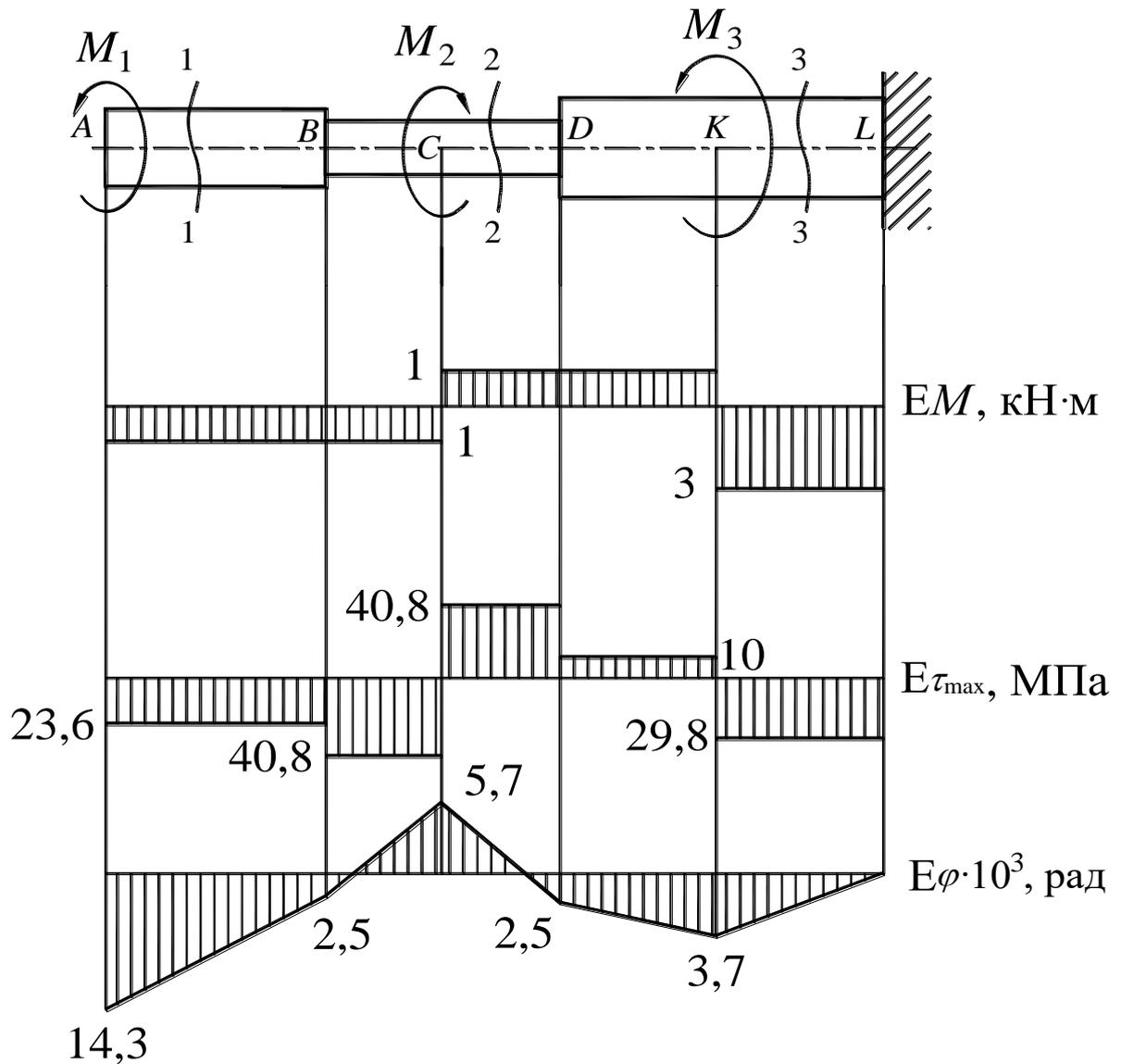


Рисунок 2 – Епюри ступінчастого вала

Для побудови епюри максимальних дотичних напружень розбиваємо вал на ділянки навантаження, які розділяються місцями прикладення скручувальних моментів і перепадами діаметру поперечного перетину. Таким чином, маємо п'ять ділянок –  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DK$  і  $KL$ . Визначимо для поперечного перетину кожної ділянки полярний момент опору:

$$W_P^{AB} = \frac{\pi \cdot d_1^3}{16} = \frac{\pi \cdot 60^3}{16} = 42390 \text{ мм}^3;$$

$$W_P^{BC} = W_P^{CD} = \frac{\pi \cdot d_2^3}{16} = \frac{\pi \cdot 50^3}{16} = 24531 \text{ мм}^3;$$

$$W_P^{DK} = W_P^{KL} = \frac{\pi \cdot d_3^3}{16} = \frac{\pi \cdot 80^3}{16} = 100480 \text{ мм}^3.$$

У межах ділянки напруження для різних поперечних перетинів не змінюються і приймають такі значення:

$$\tau_{\max}^{AB} = \frac{M_{\partial 1}}{W_P^{AB}} = \frac{-1 \cdot 10^3}{42390 \cdot 10^{-9}} = -23,6 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max}^{BC} = \frac{M_{\partial 1}}{W_P^{BC}} = \frac{-1 \cdot 10^3}{24531 \cdot 10^{-9}} = -40,8 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max}^{CD} = \frac{M_{\partial 2}}{W_P^{CD}} = \frac{1 \cdot 10^3}{24531 \cdot 10^{-9}} = 40,8 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max}^{DK} = \frac{M_{\partial 2}}{W_P^{DK}} = \frac{1 \cdot 10^3}{100480 \cdot 10^{-9}} = 10 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max}^{KL} = \frac{M_{\partial 3}}{W_P^{KL}} = \frac{-3 \cdot 10^3}{100480 \cdot 10^{-9}} = -29,8 \cdot 10^6 \text{ МПа}.$$

Після визначення максимальних дотичних напружень на ділянках будуюмо епюру. Її аналіз показує, що небезпечним є кожний перетин на ділянці *BD*.

Для побудови епюри кутів повороту перетинів визначаємо кути закручування для кожної з п'яти ділянок, виділених при побудові епюри максимальних напружень.

Визначимо для поперечного перетину кожної ділянки полярний момент інерції:

$$I_P^{AB} = \frac{\pi \cdot d_1^4}{32} = \frac{\pi \cdot 60^4}{32} = 1271700 \text{ мм}^4;$$

$$I_P^{BC} = I_P^{CD} = \frac{\pi \cdot d_2^4}{32} = \frac{\pi \cdot 50^4}{32} = 613281 \text{ мм}^4;$$

$$I_P^{DK} = I_P^{KL} = \frac{\pi \cdot d_3^4}{32} = \frac{\pi \cdot 80^4}{32} = 4019200 \text{ мм}^4.$$

Кути закручування ділянок:

$$\varphi_{AB} = \frac{-M_{\delta\delta 1} \cdot 3a}{GI_P^{AB}} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,2717 \cdot 10^{-6}} = -0,0118 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\hat{A}\hat{N}} = \frac{M_{\delta\delta 1} \cdot a}{GI_P^{\hat{A}\hat{N}}} = \frac{-1 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,6133 \cdot 10^{-6}} = -0,0082 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\hat{N}D} = \frac{M_{\delta\delta 2} \cdot a}{GI_P^{CD}} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,6133 \cdot 10^{-6}} = 0,0082 \text{ рад};$$

$$\varphi_{DK} = \frac{M_{\delta\delta 2} \cdot a}{GI_P^{DK}} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,0192 \cdot 10^{-6}} = 0,0012 \text{ рад};$$

$$\varphi_{KL} = \frac{M_{\delta\delta 3} \cdot a}{GI_P^{KL}} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 4,0192 \cdot 10^{-6}} = -0,0037 \text{ рад}.$$

Визначаємо кути повороту перетинів на границях ділянок:

$$\varphi_L = 0;$$

$$\varphi_K = \varphi_L + \varphi_{KL} = -0,0037 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_K + \varphi_{DK} = -0,0037 + 0,0012 = -0,0025 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_D + \varphi_{CD} = -0,0025 + 0,0082 = 0,0057 \text{ рад};$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \varphi_{BC} = 0,0057 - 0,0082 = -0,0025 \text{ рад};$$

$$\varphi_A = \varphi_D + \varphi_{AB} = -0,0025 - 0,0118 = -0,0143 \text{ рад}.$$

Після визначення кутів повороту перетинів на границях ділянок будемо ешюру.

**Приклад 2.** Обрати раціональнішу послідовність розташування шківів на валу – рисунок 3. Визначити для обраної схеми із розрахунку на міцність і жорсткість потрібні розміри поперечного перетину вала в двох варіантах: перетин – круг, перетин – кільце з відношенням внутрішнього діаметра до зовнішнього  $c = 0,7$ . Для матеріалу вала допустиме дотичне напруження  $[\tau] = 25$  МПа, допустимий погонний кут закручування  $[\varphi] = 5,3 \cdot 10^{-3}$  рад/м, модуль зсуву  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Скручувальні моменти на шківках:  $\dot{I}_1 = 2087$

Н·м,  $\dot{I}_2 = 955$  Н·м,  $\dot{I}_3 = 610$  Н·м,  $\dot{I}_4 = 522$  Н·м. Визначити, наскільки легше буде вал з кільцевим перетином.

**Розв'язування:**

Побудуємо для обох схем епюри крутячих моментів за допомогою метода перетинів. Аналіз епюр показує, що для першої схеми максимальний крутячий момент  $\dot{I}_{\max} = 2087$  Н·м, для другої  $\dot{I}_{\max} = 1132$  Н·м. Неважко переконатися, що при інших варіантах розташування шківів максимальний крутячий момент не зменшиться.

З умови міцності визначаємо потрібний момент опору перетину вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} \leq [\tau] \Rightarrow [W_P] = \frac{M_{\max}}{[\tau]} = \frac{1132}{25 \cdot 10^6} = 45,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

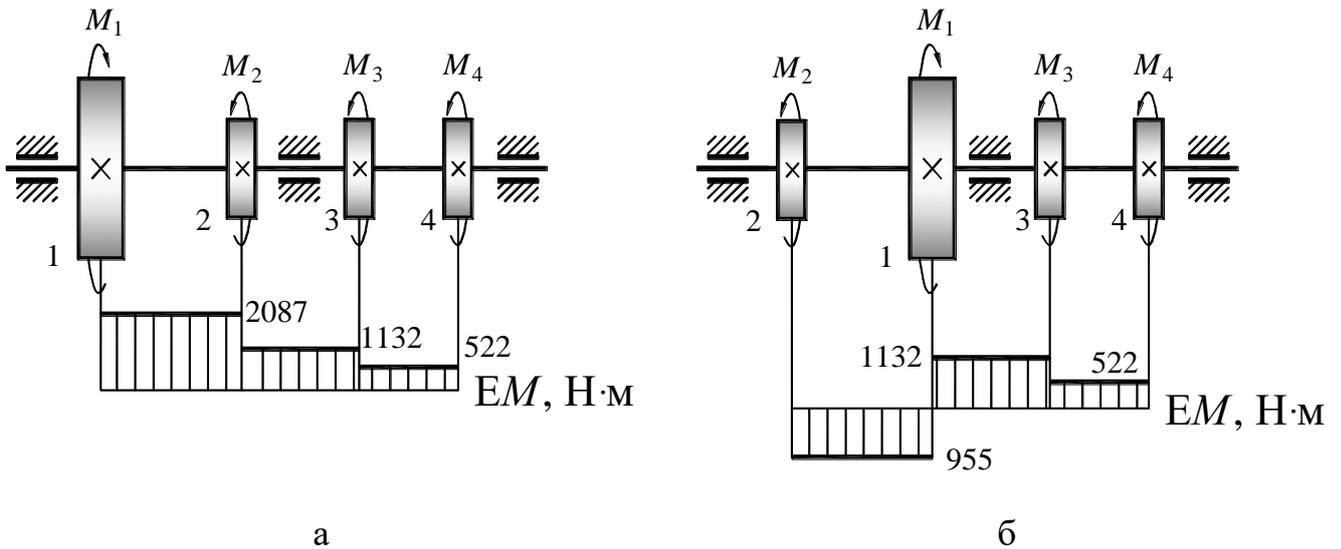


Рисунок 3 – Схеми розташування шківів на вала і епюри крутячих моментів

Діаметр вала круглого перетину:

$$d_{\text{д}} = \sqrt[3]{\frac{16[W_P]}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 45,3 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 0,0615 \text{ м.}$$

Зовнішній діаметр вала кільцевого перетину:

$$d_{\text{д}}^{\text{к}} = \sqrt[3]{\frac{16[W_P]}{\pi(1-\tilde{n}^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 45,3 \cdot 10^{-6}}{\pi(1-0,7^4)}} = 0,0672 \text{ м.}$$

З умови жорсткості визначаємо потрібний полярний момент інерції:

$$\varphi = \frac{\dot{I}_{\max}}{GI_P} \leq [\varphi] \Rightarrow [I_P] = \frac{\dot{I}_{\max}}{G[\varphi]} = \frac{1132}{8 \cdot 10^{10} \cdot 5,3 \cdot 10^{-3}} = 267 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Діаметр вала круглого перетину:

$$d_{\hat{\delta}\delta} = \sqrt[4]{\frac{32[I_P]}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 267 \cdot 10^{-8}}{\pi}} = 0,0725 \text{ м.}$$

Зовнішній діаметр вала кільцевого перетину:

$$d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\zeta} = \sqrt[4]{\frac{32[I_P]}{\pi(1-\tilde{n}^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 267 \cdot 10^{-8}}{\pi(1-0,7^4)}} = 0,0775 \text{ м.}$$

Потрібні розміри перетину із розрахунку на жорсткість більше, ніж із розрахунку на міцність, тому приймаємо їх в якості кінцевих. Після округлення будемо мати  $d_{\hat{\delta}\delta} = 72 \text{ мм}$ ,  $d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\zeta} = 78 \text{ мм}$ .

Внутрішній діаметр кільцевого перетину:

$$d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\hat{a}} = \tilde{n} \cdot d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\zeta} = 0,7 \cdot 78 = 54,6 \text{ мм.}$$

Визначаємо площі поперечних перетинів круглого і кільцевого валів:

$$S_{\hat{\delta}\delta} = \frac{\pi \cdot d_{\hat{\delta}\delta}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 72^2}{4} = 4069 \text{ мм}^2;$$

$$S_{\hat{\epsilon}\epsilon} = \frac{\pi \cdot \left[ \left( d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\zeta} \right)^2 - \left( d_{\hat{\epsilon}\epsilon}^{\hat{a}} \right)^2 \right]}{4} = \frac{\pi \cdot (78^2 - 54,6^2)}{4} = 2436 \text{ мм}^2.$$

Визначаємо, наскільки буде легше кільцевий вал:

$$\frac{4069 - 2436}{4069} \cdot 100 \% = 40,1 \%.$$

**Приклад 3.** Сталевий вал діаметром  $d = 50 \text{ мм}$  закручується моментом  $M_{\kappa}$ . Під кутом  $\alpha = 30^\circ$  відома відносна деформація  $\varepsilon_{\alpha} = 10^{-3}$ . Визначити крутячий момент. Коефіцієнт Пуассона матеріалу вала  $\mu = 0,3$ , модуль Юнга  $\hat{A} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

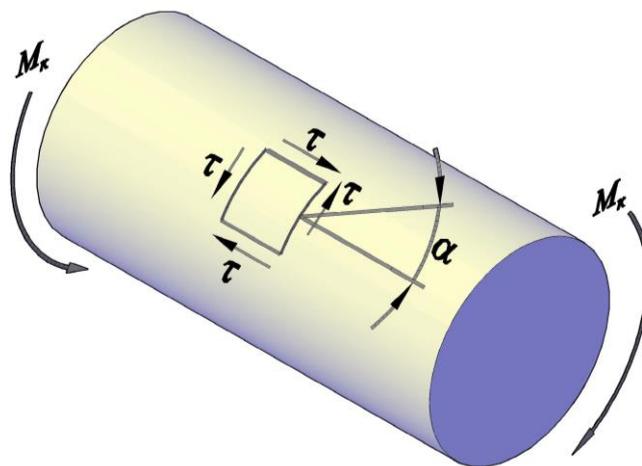


Рисунок 4. – Графічна умова до прикладу 3.

**Розв'язування:**

Виділимо на поверхні вала за допомогою двох поперечних перетинів нескінченно малий елемент – рисунок 4. Нормальні напруження на його площадках відсутні, тобто  $\sigma_{\delta} = \sigma_{\delta} = 0$ . Для площадок, нахилених під кутом  $\alpha = 30^\circ$ , будемо мати:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\delta} \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau \sin 2\alpha = \tau \sin 2\alpha .$$

Для площадок, нахилених під кутом  $\beta = \alpha + 90^\circ$  будемо мати:

$$\sigma_{\beta} = \tau \sin 2(90^\circ + \alpha) = -\tau \sin 2\alpha .$$

Виразимо деформацію  $\varepsilon_{\alpha}$  за узагальненим законом Гука:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha} - \mu\sigma_{\beta}}{E} = \frac{\tau \sin 2\alpha - \mu(-\tau \sin 2\alpha)}{E} = \frac{(1 + \mu)\tau \sin 2\alpha}{E} .$$

Звідси знаходимо дотичне напруження у поперечних перетинах вала:

$$\tau = \frac{E\varepsilon_{\alpha}}{(1 + \mu)\sin 2\alpha} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3}}{(1 + 0,3)\sin 60^\circ} = 17,8 \cdot 10^6 \text{ МПа} .$$

Шуканий крутячий момент:

$$\dot{I}_{\delta} = \tau W_P = \tau \frac{\pi \cdot d^3}{16} = 17,8 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 0,05^3}{16} = 4360 \text{ Н}\cdot\text{м} .$$

**Приклад 4.** Визначити діаметр жорстко зацмленого вала, схема якого зображена на рисунку 5, якщо допустиме дотичне напруження матеріалу вала  $[\tau] = 100$  МПа.

**Розв'язування:**

В правій і лівій опорі при заданому навантаженні виникають реакції у вигляді скручувальних моментів  $M_A$  і  $M_B$ . Для побудови епюри крутячих моментів необхідно визначити хоча б один з них.

Оскільки для визначення моментів  $M_A$  і  $M_B$  можна скласти лише одне рівняння рівноваги, система один раз статично невизначувана.

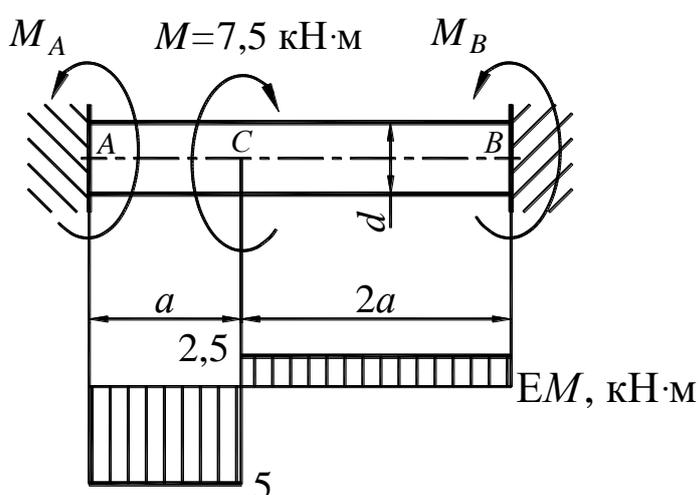


Рисунок 5. – Графічна умова і епюра крутячих моментів до прикладу 4.

Складемо рівняння рівноваги:

$$M_A + M_B = M \Rightarrow 2M_B + M_B = M \Rightarrow M_B = \frac{M}{3} = \frac{7,5}{3} = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 2M_B = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

З умови міцності визначаємо потрібний момент опору перетину вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_P} \leq [\tau] \Rightarrow [W_P] = \frac{M_{\max}}{[\tau]} = \frac{5 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0,05 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16[W_P]}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,05 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,063 \text{ м}.$$

Приймаємо  $d = 65$  мм.

Розглянемо деформацію системи. Оскільки кути повороту ліворуч і праворуч від перетину C рівні, будемо мати наступне рівняння сумісності деформацій:

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{A}\tilde{N}} = \varphi_{\tilde{N}\tilde{A}} &\Rightarrow \frac{\dot{I}_{\tilde{A}} \cdot \dot{\alpha}}{GI_P} = \\ &= \frac{\dot{I}_{\tilde{B}} \cdot 2\dot{\alpha}}{GI_P} \Rightarrow M_A = 2M_B. \end{aligned}$$

## Тема 6. ЗГІН

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. В якому випадку момент згинання рахують позитивним?
2. Правила знаків для поперечної сили.
3. Яка залежність між величинами  $M(X)$ ,  $Q(Y)$  і  $q(X)$ ?
4. Як знаходять максимальний момент згинання?
5. Що таке чисте згинання?
6. По якій кривій згинається балка в випадку чистого згинання?
7. Як змінюється нормальні напруження по висоті балки?
8. Що називають моментом опору при згинанні?

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Визначити діаметр круглої дерев'яної консольної балки – рисунок 1. Зовнішні сили фактори:  $D=2$  кН,  $\dot{I} = 3$  кН·м,  $q=2$  кН/м. Допустиме нормальне напруження матеріалу балки  $[\sigma]=8$  МПа.

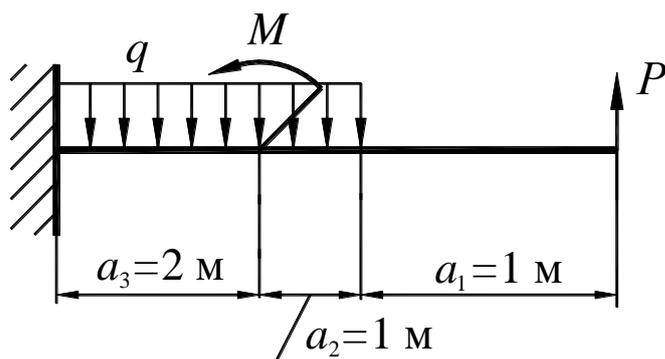


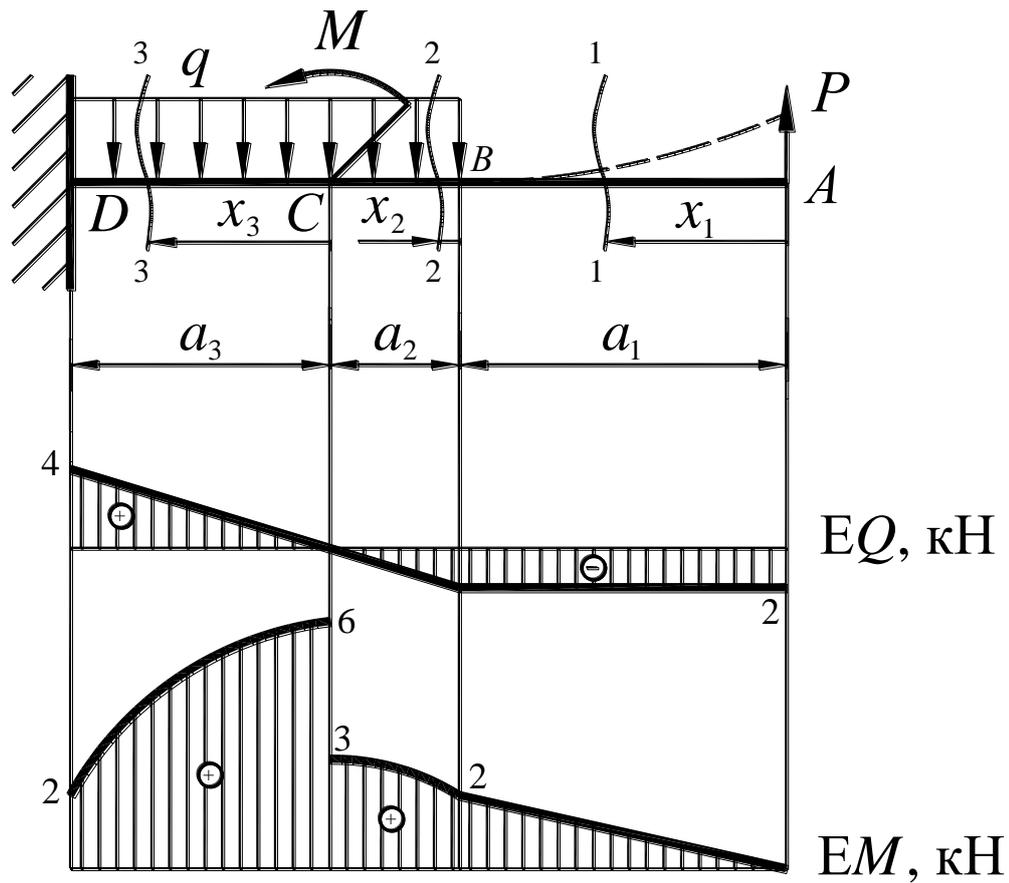
Рисунок 1. – Графічна умова до прикладу 1.

### Розв'язування:

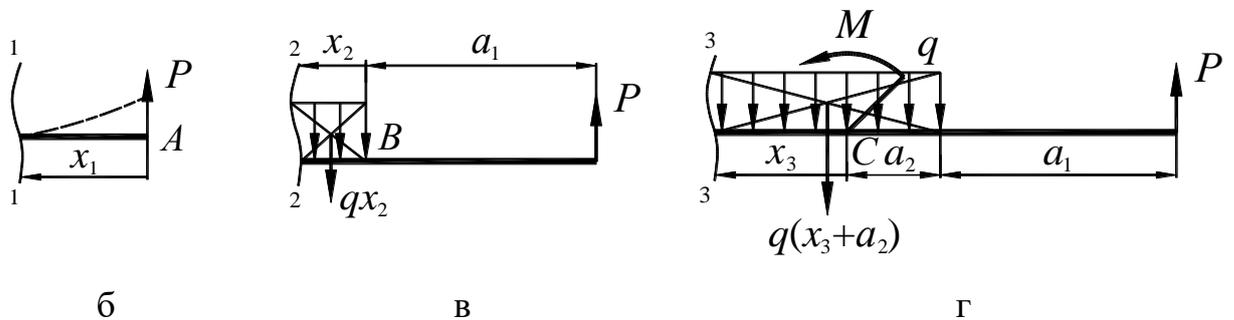
Побудуємо епюри внутрішніх поперечних сил і згинаючих моментів.

Оскільки балка має лише одну опору, її реакції можна не визначати. Для побудови епюр застосуємо метод перетинів.

Розбиваємо балку на ділянки навантаження, границі яких визначаються точками прикладення зовнішніх силових факторів. Отже, маємо три ділянки:  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  – рисунок 2, а.



а



б

в

г

Рисунок 2. – Розрахункові схеми і епюри до прикладу 1.

На першій ділянці (дальньої від опори) проводимо перетин 1-1 і умовно відкидаємо частину балки з опорою. Розглядаємо рівновагу частини балки, що залишилась. До неї прикладена лише зовнішня зосереджена сила  $P$ . Відстань від крайнього правого перетину  $A$  ділянки до перетину 1-1 позначаємо  $x_1$  – рисунок 2, б.

Внутрішня поперечна сила у перетині 1-1:

$$Q_1 = -P = -2 \text{ кН.}$$

Сила  $P$  викликає від'ємну внутрішню силу  $Q_1$ , оскільки прагне

повернути праву частину балки відносно перетину 1-1 проти ходу годинникової стрілки.

Будуємо епюру  $Q$  на ділянці  $AB$ . Вона буде мати вигляд горизонтальної прямої, оскільки значення  $Q_1$  в межах ділянки не змінюється. Пряма розташована нижче бази епюри, оскільки  $Q_1$  має від'ємне значення.

Внутрішній згинаючий момент у перетині 1-1:

$$\dot{I}_1 = Dx_1 = 2x_1.$$

Сила  $P$  викликає додатній внутрішній згинаючий момент  $M_1$ , оскільки прагне зігнути праву частину балки опуклістю вниз, як показано на рисунку 2, б. Оскільки в рівнянні присутня змінна величина  $x_1$ , то для побудови епюри необхідно обчислити значення  $M_1$  у граничних перетинах ділянки. Для цього підставимо у рівняння моменту значення  $x_1$  для відповідних перетинів.

У крайнє правому:

$$\dot{I}_1(\hat{A}) = \dot{I}_1(0) = 0.$$

У крайнє лівому:

$$\dot{I}_1(\hat{A}) = \dot{I}_1(a_1) = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру  $M$  на ділянці  $AB$ . Для цього на епюрі відмічаємо значення  $\dot{I}_1$  у крайніх перетинах та з'єднуємо їх прямою, оскільки на ділянці немає зовнішнього розподіленого навантаження.

На ділянці  $BC$  проводимо перетин 2-2 і умовно відкидаємо частину балки з опорою – рисунок 2, в. Розглядаємо рівновагу частини балки, що залишилась. До неї прикладені зосереджена сила  $P$  і розподілене навантаження  $q$ . Відстань від крайнього правого перетину  $B$  до перетину 2-2 позначаємо  $x_2$ . Замінюємо розподілене навантаження  $q$  зосередженою силою  $qx_2$ .

Внутрішня поперечна сила у перетині 2-2:

$$Q_2 = -P + qx_2 = 2x_2 - 2.$$

Визначаємо  $Q_2$  у крайніх перетинах ділянки  $BC$ :

$$Q_2(\hat{A}) = Q_2(0) = -2 \text{ кН}, \quad Q_2(\tilde{N}) = Q_2(a_2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру  $Q$  на ділянці  $BC$ . Для цього на епюрі відмічаємо значення  $Q_2$  у крайніх перетинах і з'єднуємо їх прямою лінією.

Внутрішній згинаючий момент у перетині 2-2:

$$\dot{I}_2 = D(a_1 + x_2) - qx_2 \frac{x_2}{2} = 2(1 + x_2) - 2x_2 \frac{x_2}{2} = -x_2^2 + 2x_2 + 2.$$

Визначаємо  $\dot{I}_2$  у крайніх перетинах ділянки  $BC$ :

$$\dot{I}_2(B) = \dot{I}_2(0) = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad \dot{I}_2(\tilde{N}) = \dot{I}_2(a_2) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 2 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру  $M$  на ділянці  $BC$ . Для цього на епюрі відмічаємо значення  $\dot{I}_2$  у крайніх перетинах та з'єднуємо їх параболою, оскільки на ділянці є розподілене навантаження. Опуклість параболи спрямовуємо назустріч розподіленому навантаженню, тобто вгору. Вершина параболи знаходиться під перетином  $C$ , оскільки внутрішня поперечна сила у цьому перетині дорівнює нулю.

На ділянці  $CD$  проводимо перетин 3-3 і умовно відкидаємо частину балки з опорою – рисунок 2, г. Розглядаємо рівновагу частини балки, що залишилась. До неї прикладені зосереджена сила  $P$ , розподілене навантаження  $q$  і зосереджений момент  $M$ . Відстань від крайнього правого перетину  $C$  до перетину 3-3 позначаємо  $x_3$ . Замінюємо розподілене навантаження  $q$  зосередженою силою  $q(x_3 + a_2)$ .

Внутрішня поперечна сила у перетині 3-3:

$$Q_3 = -P + q(x_3 + a_2) = -2 + 2(x_3 + 1) = 2x_3.$$

Визначаємо  $Q_3$  у крайніх перетинах ділянки  $CD$ :

$$Q_3(\tilde{N}) = Q_3(0) = 0, \quad Q_3(D) = Q_3(a_3) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру  $Q$  на ділянці  $CD$  аналогічно ділянці  $BC$ .

Внутрішній згинаючий момент у перетині 3-3:

$$\dot{I}_3 = D(a_1 + a_2 + x_3) - q(x_3 + a_2) \frac{x_3 + a_2}{2} + M = 2(1 + 1 + x_3) -$$

$$-2(x_3 + 1)\frac{x_3 + 1}{2} + 3 = -x_3^2 + 6.$$

Визначаємо  $\dot{I}_3$  у крайніх перетинах ділянки  $CD$ :

$$\dot{I}_3(\tilde{N}) = \dot{I}_3(0) = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad \dot{I}_3(D) = \dot{I}_3(a_3) = -2^2 + 6 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру  $M$  на ділянці  $CD$  аналогічно ділянці  $BC$ .

Визначаємо допустиме значення осьового моменту опору поперечного перетину балки із умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma = \frac{\dot{I}_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow [W_x] = \frac{\dot{I}_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Діаметр поперечного перетину балки:

$$[W_x] = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32[W_x]}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,197 \text{ м}.$$

Приймаємо  $d = 200$  мм.

**Приклад 2.** Підібрати номер двотавра для двохопорної сталеві балки – рисунок 3. Зовнішні силові фактори:  $\dot{I} = 5$  кН·м,  $q = 2$  кН/м. Допустиме нормальне напруження матеріалу балки  $[\sigma] = 160$  МПа.

#### **Розв'язування:**

Побудуємо епюри внутрішніх поперечних сил і згинаючих моментів.

Оскільки балка двохопорна, то перед побудовою епюр необхідно визначити реакцію хоча б однієї опори. В правій шарнірно-рухомій опорі виникає вертикальна реакція  $R_B$  - рисунок 4.

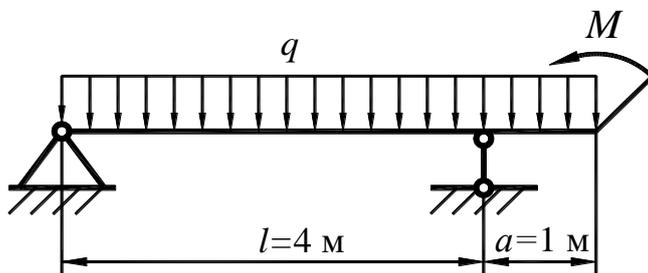


Рисунок 3. – Графічна умова до прикладу 2.

У лівій шарнірно-нерухомій опорі виникає теж тільки вертикальна реакція  $R_A$  (горизонтальна відсутня, оскільки балка не завантажена зовнішніми осьовими силами).

Для визначення реакції  $R_B$  складаємо рівняння моментів відносно опори

$A$ :

$$\sum \dot{I}_{A^3} = 0; M + R_B l - \frac{q(l+a)^2}{2} = 0;$$

$$R_B = \frac{\frac{q(l+a)^2}{2} - M}{l} = \frac{2(4+1)^2 - 5}{4} = 5 \text{ кН.}$$

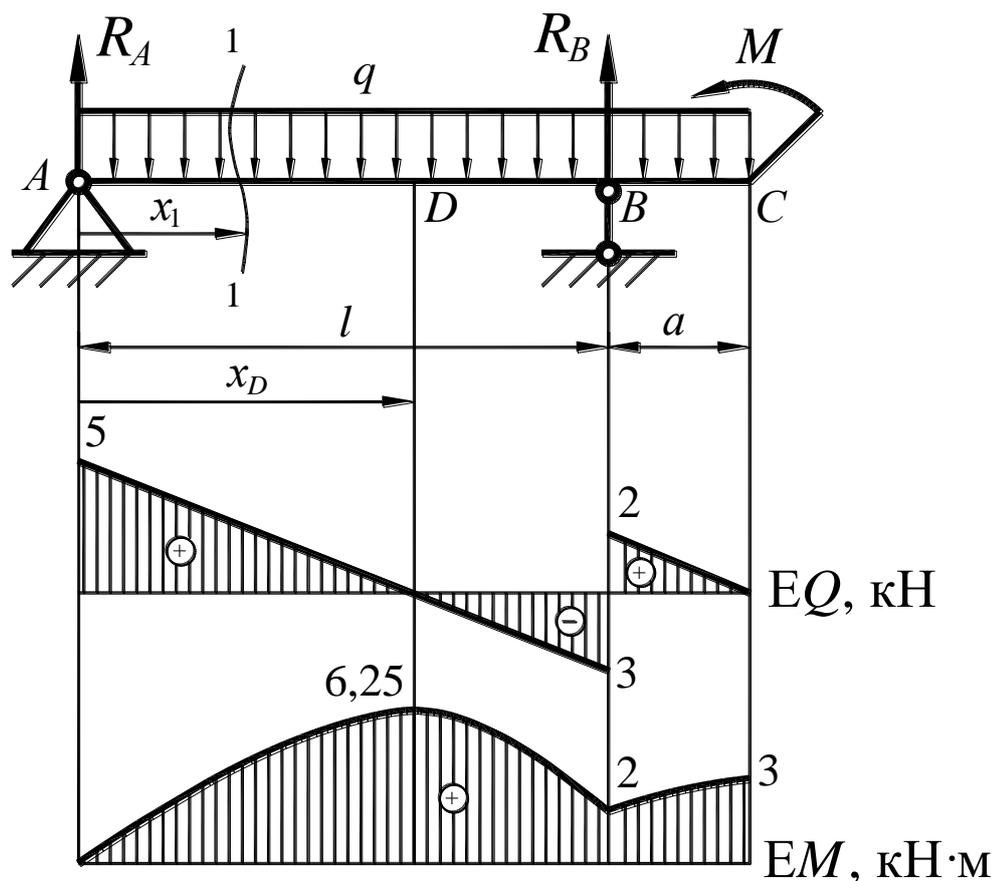


Рисунок 4 – Епюри до прикладу 2.

Для визначення реакції  $R_A$  складаємо рівняння проєкцій сил на вертикальну вісь:

$$\sum Y_i = 0; R_A + R_B - q(l+a) = 0;$$

$$R_A = q(l+a) - R_B = 2(4+1) - 5 = 5 \text{ кН.}$$

Для побудови епюр визначимо значення  $Q$  і  $M$  в граничних перетинах ділянок навантаження, тобто в перетинах  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

$Q_C = 0$ , оскільки в крайньому перетині  $C$  балки не прикладена зовнішня зосереджена сила.

$Q_A = R_A = 5$  кН, тобто  $Q_A$  дорівнює зовнішній зосередженій силі, прикладеній у крайньому перетині  $A$ . Значення  $Q_A$  додатне, оскільки відносно перетину, проведеному праворуч від опори  $A$  у будь-якому місці, сила  $R_A$  прагне повернути ліву від проведеного перетину частину балки за годинниковою стрілкою.

Оскільки у внутрішньому перетині  $B$  прикладена зовнішня зосереджена сила, треба визначати значення  $Q_B$ , розглядаючи рівновагу частин балки ліворуч і праворуч від перетину:

$$Q_B^{\ddot{}} = R_A - ql = 5 - 2 \cdot 4 = -3 \text{ кН}, \quad Q_B^{\dot{}} = qa = 2 \cdot 1 = 2 \text{ кН}.$$

Отже, відмічаємо на епюрі  $Q$  обчислені значення у граничних перетинах і з'єднуємо їх прямими лініями.

$\dot{I}_A = 0$ , оскільки в крайньому перетині  $A$  балки не прикладений зовнішній згинаючий момент.

$\dot{I}_B = \dot{I} = 5$  кН·м, тобто  $\dot{I}_B$  дорівнює зовнішньому згинальному моменту, прикладеному у крайньому перетині  $A$ . Значення  $\dot{I}_B$  додатне, оскільки момент  $M$  намагається зігнути балку опуклістю вниз.

Оскільки у внутрішньому перетині  $B$  не прикладений зовнішній згинаючий момент, для визначення  $\dot{I}_A$  достатньо розглянути рівновагу частини балки ліворуч чи праворуч від перетину:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_A^{\ddot{}} = \dot{I} - \frac{qa^2}{2} = 5 - \frac{2 \cdot 1^2}{2} = 4 \text{ кН·м}.$$

Відмічаємо на епюрі  $M$  обчислені значення у граничних перетинах. З'єднувати їх потрібно параболою, оскільки на обох ділянках є розподілене навантаження, причому параболи спрямовані опуклістю вгору. На ділянці  $BC$  вершина параболи розташована у перетині  $C$ , оскільки  $Q_C = 0$ . На ділянці  $AB$  вершина параболи розташована у перетині  $D$ , оскільки  $Q_D = 0$ . Для визначення  $M_D$  необхідно скласти рівняння  $Q$  і  $M$  для ділянки  $AB$  за допомогою метода перетинів. Проводимо у довільному місці ділянки перетин 1-1, умовно відкидаємо праву частину від нього, відстань від перетину  $A$  до

перетину 1-1 позначаємо  $x_1$ . Розглядаємо рівновагу лівої частини:

$$\dot{I}_1 = R_A x_1 - \frac{q x_1^2}{2} = -x_1^2 + 5x_1.$$

Визначаємо першу похідну отриманого рівняння моментів:

$$\frac{dM_1}{dx} = -2x_1 + 5.$$

Прирівнюючи її нулю, визначимо абсцису максимуму  $x_D$ :

$$\frac{dM_1}{dx} = 0; -2x_D + 5 = 0 \Rightarrow x_D = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ м.}$$

Підставляючи обчислене значення  $x_D$  у рівняння моментів на ділянці  $AB$ , визначимо  $\dot{I}_D$ :

$$\dot{I}_D = -x_D^2 + 5x_D = -2,5^2 + 5 \cdot 2,5 = 6,25 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Отже, наносимо значення  $\dot{I}_D$  на епюру і проводимо через точки  $A$ ,  $D$  і  $B$  дугу параболи з вершиною у точці  $D$ .

Визначаємо допустиме значення осевого моменту опору поперечного перетину балки із умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma = \frac{\dot{I}_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow [W_x] = \frac{\dot{I}_{\max}}{[\sigma]} = \frac{6,25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 39 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 39 \text{ см}^3.$$

З сортаменту прокатної сталі (додаток М) приймаємо двотавр № 10 з найближчим більшим до розрахованого значенням осевого моменту опору  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$ .

**Приклад 3.** Побудувати епюру дотичних напружень для балки двотаврового перетину (№ 12:  $I_x = 403 \text{ см}^4$ ,  $S_x = 38,5 \text{ см}^3$ ), якщо внутрішня поперечна сила у перетині  $Q = 10 \text{ кН}$ .

#### **Розв'язування:**

Схематизуємо дійсний перетин, представив його у вигляді трьох прямокутників – рисунок 5. Для побудови епюри визначимо за формулою Журавського дотичні напруження в характерних точках перетину.

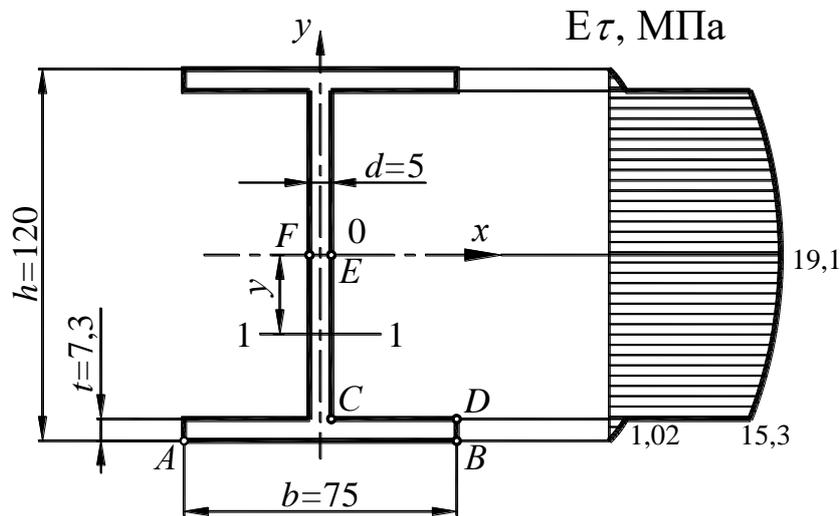


Рисунок 5. – Розрахункова схема і епюра дотичних напружень до прикладу 3.

Статичний момент площі перетину, розташованої нижче точок лінії  $AB$ , дорівнює нулю, тому  $\tau_{\hat{A},\hat{A}} = 0$ .

Статичний момент площі перетину, розташованої нижче точок лінії  $CD$ , дорівнює:

$$S_x^{C,D} = bt \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 75 \cdot 7,3 \left( \frac{120}{2} - \frac{7,3}{2} \right) = 309 \text{ мм}^3.$$

Дотичне напруження у точці  $D$ :

$$\tau_D = \frac{Q \cdot S_x^{C,D}}{b \cdot I_x} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 309 \cdot 10^{-9}}{75 \cdot 10^{-3} \cdot 403 \cdot 10^{-12}} = 1,02 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Дотичне напруження у точці  $C$ :

$$\tau_C = \frac{Q \cdot S_x^{C,D}}{d \cdot I_x} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 309 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 403 \cdot 10^{-12}} = 15,3 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Статичний момент площі перетину, розташованої нижче точок лінії  $EF$ , тобто половини перетину, визначаємо з сортаменту для двотавра № 12 (додаток М):  $S_x^{E,F} = 38,5 \text{ см}^3$ .

Дотичне напруження у точках лінії  $EF$ :

$$\tau_{E,F} = \frac{Q \cdot S_x^{E,F}}{d \cdot I_x} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 385 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 403 \cdot 10^{-12}} = 19,1 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Наносимо на епюрі отриманні значення напружень та з'єднуємо їх

параболічними дугами. Для верхньої половини перетину епюра буде симетричною в силу симетрії двотавра відносно осі  $x$ .

## Тема 7. Складний опір.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Які лінії отримують при перетині циліндра обертання площинами?
2. За якими лініями перетинається циліндрична поверхня площиною, паралельною твірній цієї поверхні?
3. Які криві утворюються при перетині конуса обертання площинами?
4. Яку криву отримують при перетині сфери будь-якою площиною?
5. У чому полягає загальний метод побудови точок перетину прямої лінії з поверхнею?
6. Укажіть способи, які використовуються для побудови проєкцій лінії перетину поверхонь?

2. Практичні завдання.

### Приклади розв'язування задач

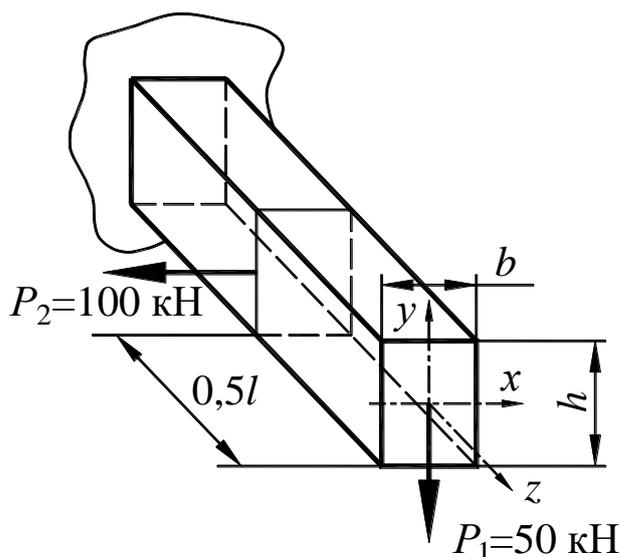


Рисунок 1. – Графічна умова до прикладу 1.

**Приклад 1.** Визначити максимальні нормальні напруження в балці прямокутного перетину

$b \times h = 12 \times 18$  см довжиною  $l = 1$  м.

#### Розв'язування.

Зовнішні сил  $P_1$  і  $P_2$  викликають складний вид деформації балки – косий згин. Розглянемо окремо дію на балку сил  $P_1$  і  $P_2$ .

При дії тільки сили  $P_1$  балка випробовує простий згин у вертикальній площині  $yz$  – рисунок 2, а. Максимальний момент  $\dot{I}_{\dot{a}}^{\max} = P_1 l$  виникає у опорному перетині.

Максимальні нормальні напруження:

$$\sigma_{\dot{a}}^{\max} = \frac{\dot{I}_{\dot{a}}^{\max}}{W_x} = \frac{6P_1 l}{bh^2} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 1}{12 \cdot 10^{-2} \cdot 18^2 \cdot 10^{-4}} = 77,16 \cdot 10^6 \text{ Їа} = 77,16 \text{ Їа} \quad .$$

При дії тільки сили  $P_2$  балка випробовує простий згин у горизонтальній площині  $xz$  – рисунок 2, б. Максимальний момент  $\dot{I}_{\dot{a}}^{\max} = 0,5P_2 l$  виникає у опорному перетині.

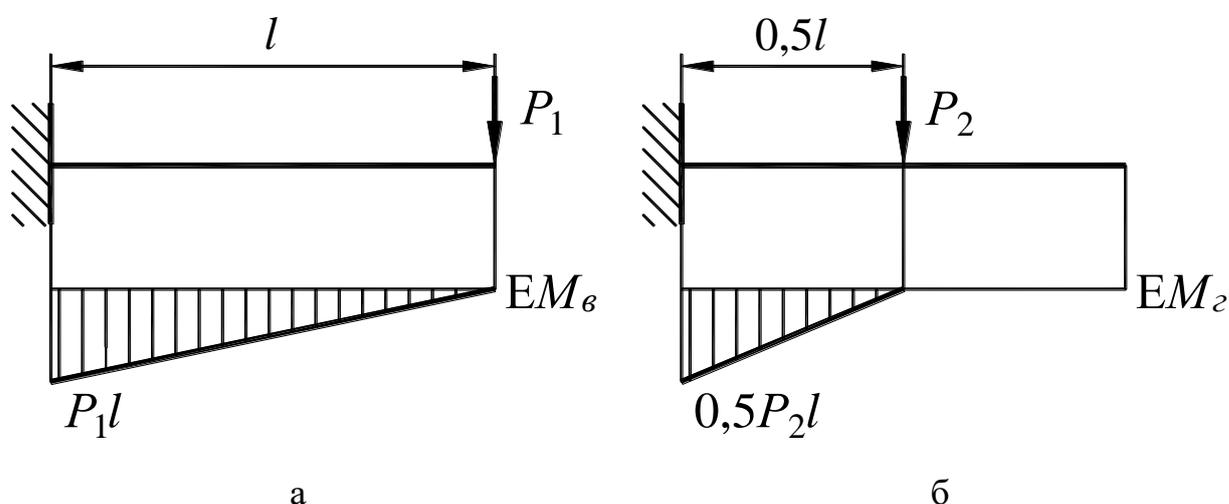


Рисунок 2. – Епюри згинальних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах

Максимальні нормальні напруження:

$$\sigma_{\dot{a}}^{\max} = \frac{\dot{I}_{\dot{a}}^{\max}}{W_{\dot{o}}} = \frac{6 \cdot 0,5P_2 l}{b^2 h} = \frac{6 \cdot 0,5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 1}{12^2 \cdot 10^{-4} \cdot 18 \cdot 10^{-2}} = 115,74 \cdot 10^6 \text{ Їа} = 115,74 \text{ Їа}.$$

Для визначення максимальних сумарних напружень розглянемо деформацію балки при дії окремо кожної з сил  $P_1$  і  $P_2$  – рисунок 3.

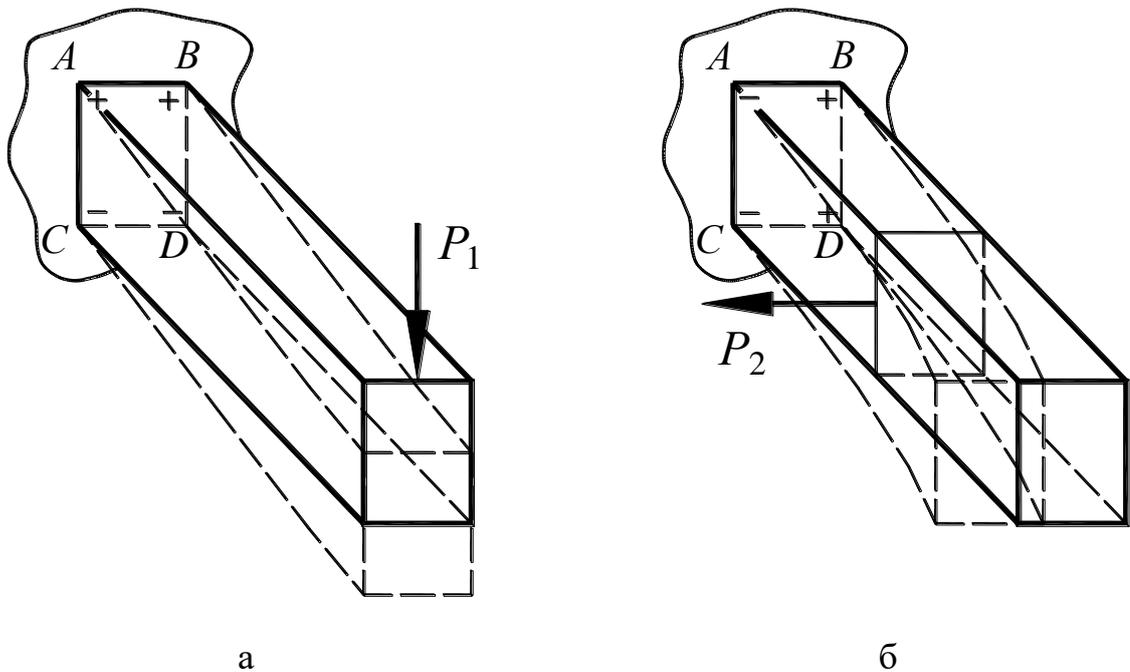


Рисунок 3. – Деформація балки під дією сил  $P_1$  і  $P_2$  кожної окремо  
 При згині у вертикальній площині верхні волокна балки розтягуються, а нижні стискаються – рисунок 47, а. У точках лінії  $AB$  опорного перетину виникають максимальні напруження розтягу  $\sigma_{\bar{a}}^{\max} = 77,16 \text{ МПа}$ , а у точках лінії  $DC$  – максимальні напруження стиску  $\sigma_{\bar{a}}^{\max} = -77,16 \text{ МПа}$ .

При згині у горизонтальній площині волокна з правого боку балки розтягуються, а з лівого стискаються – рисунок 3, б. У точках лінії  $BD$  виникають максимальні напруження розтягу  $\sigma_{\bar{a}}^{\max} = 115,74 \text{ МПа}$ , а у точках лінії  $AC$  - максимальні напруження стиску  $\sigma_{\bar{a}}^{\max} = -115,74 \text{ МПа}$ .

Отже, максимальні напруження розтягу виникають у точці  $B$ :

$$\sigma_{\bar{A}} = \sigma_{\bar{a}}^{\max} + \sigma_{\bar{a}}^{\max} = 77,16 + 115,74 = 192,90 \text{ МПа}.$$

Максимальні напруження стиску виникають у точці  $C$ :

$$\sigma_{\bar{N}} = -\sigma_{\bar{a}}^{\max} - \sigma_{\bar{a}}^{\max} = -192,90 \text{ МПа}.$$

**Приклад 2.** Визначити допустиме навантаження  $P$  з умови міцності сталевого бруса, якщо  $d = 40 \text{ мм}$ ,  $b_1 = 40 \text{ мм}$ ,  $b_2 = 100 \text{ мм}$  – рисунок 7.4, а.

**Розв’язування:**

Розіб’ємо брус на дві ділянки, які розділяються перепадом площі

поперечного перетину.

Проведемо на першій ділянці перетин 1-1 і розглянемо рівновагу нижньої частини – рисунок 4, б. Оскільки сила  $P$  спрямована вздовж геометричної осі ділянки, вона викличе її розтяг. Нормальні напруження у перетинах ділянки:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{b_1 d}.$$

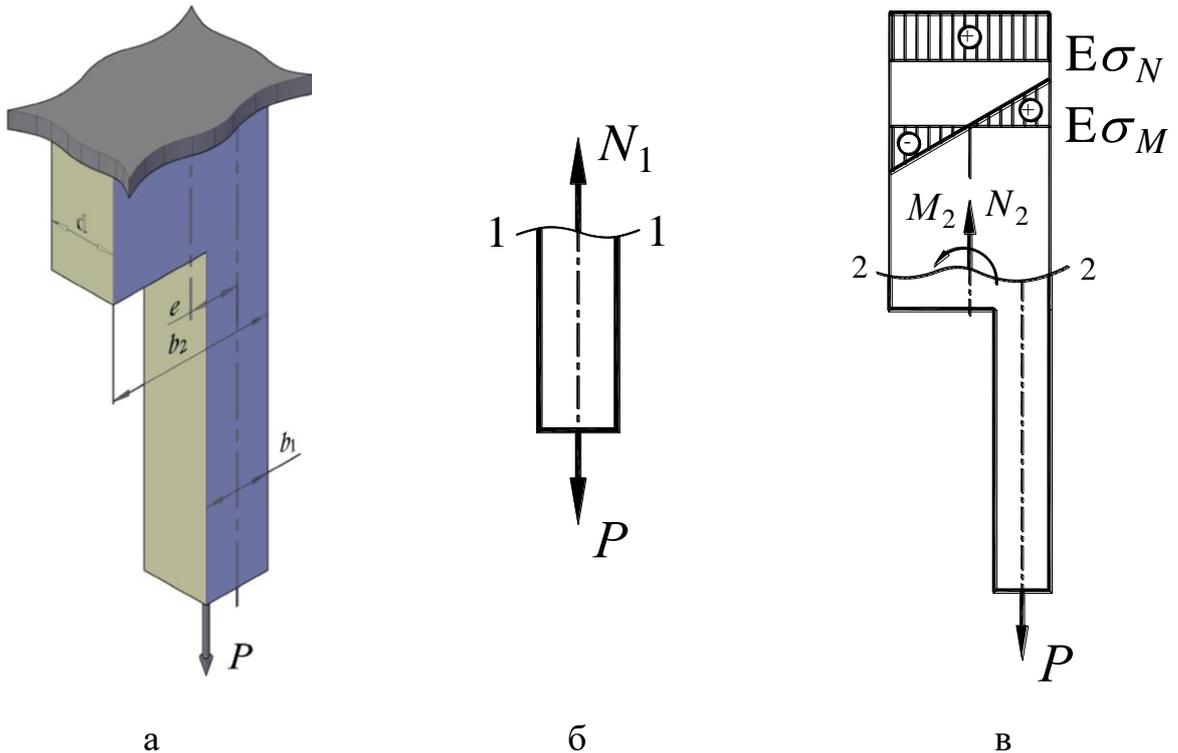


Рисунок 4. – Графічна умова і розрахункові схеми до прикладу 2.

Звідси допустиме навантаження з умови міцності ділянки:

$$[P_1] = [\sigma] b_1 d = 160 \cdot 10^6 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 256 \cdot 10^3 \text{ Н} = 256 \text{ кН}.$$

Проведемо на другій ділянці перетин 2-2 і розглянемо рівновагу нижньої частини – рисунок 4, в. Сила  $P$  викличе її позацентровий розтяг, оскільки прикладена на відстані  $e$  від геометричної осі ділянки. Внутрішні силові фактори, які виникають у перетині 2-2 внаслідок дії сили  $P$ :

$$N_2 = P, M_2 = eP.$$

Нормальні напруження у перетинах ділянки, які є наслідком внутрішнього зусилля  $N_2$ :

$$\sigma_N = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{b_2 d}.$$

Максимальні нормальні напруження розтягу, які виникають у крайніх правих лініях перетинів ділянки і є наслідком згинаючого моменту  $M_2$  – рисунок 4, в:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_2}{W_x} = \frac{6Pe}{b_2^2 d}.$$

Сумарні напруження розтягу у крайніх правих лініях перетинів ділянки:

$$\sigma_2 = \sigma_N + \sigma_{\text{max}} = \frac{P}{b_2 d} + \frac{6Pe}{b_2^2 d} = P \frac{6e + b_2}{b_2^2 d}.$$

Звідси допустиме навантаження з умови міцності ділянки:

$$[P_2] = [\sigma] \frac{b_2^2 d}{6e + b_2} = 160 \cdot 10^6 \cdot \frac{(100 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 30 \cdot 10^{-3} + 100 \cdot 10^{-3}} = 228571 \text{ Н} \approx 228,6 \text{ кН}.$$

Таким чином, для бруса допустиме навантаження дорівнює допустимому навантаженню для найслабшої другої ділянки.

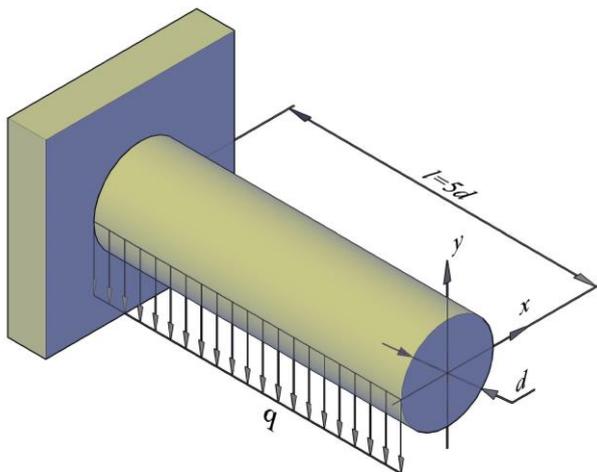


Рисунок 5. – Графічна умова до прикладу 3.

Розсічемо балку перетином 1-1, який розташований на відстані  $z$  від її вільного кінця, і відкинемо частину з опорою – рисунок б.

Розрахунковий момент за третьою теорією міцності:

$$\dot{I}_D^{\text{zz}} = \sqrt{\dot{I}_{\xi}^2 + \dot{I}_{\eta}^2} = \sqrt{\left(\frac{qz^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{qzd}{2}\right)^2} = \frac{qz}{2} \sqrt{z^2 + d^2}.$$

**Приклад 3.** Визначити максимальні напруження в перетинах балки.

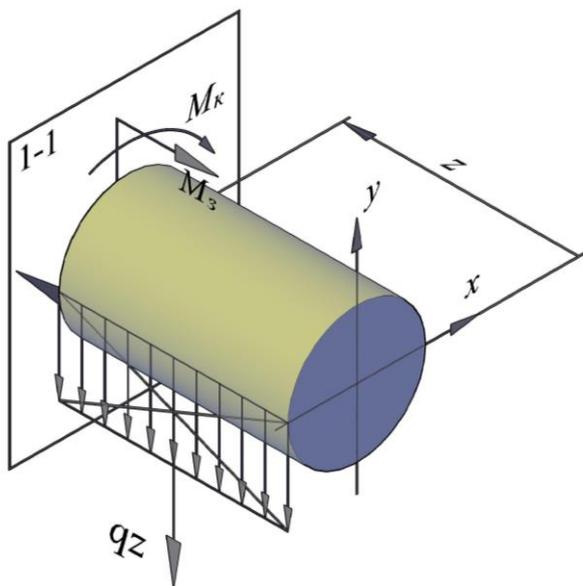
**Розв'язування:**

Розподілене навантаження  $q$  викличе згин з крученням балки, оскільки прикладене на відстані  $0,5d$  від її осі.

Еквівалентні напруження, яке враховують взаємну дію нормальних напружено згину і дотичних напружень кручення:

$$\sigma_e = \frac{\dot{I}_{\text{Д}}}{W_x} = \frac{32 \cdot \frac{qz}{2} \sqrt{z^2 + d^2}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16qz \sqrt{z^2 + d^2}}{\pi \cdot d^3},$$

де  $W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$  - осьовий момент опору круглого перетину.



Розподілене навантаження, яке діє на частину балки, що залишилася, замінимо зосередженою силою  $qz$ . Вона викличе в перетині 1-1 згинальний  $M_z$  і крутячий  $M_k$  моменти:

$$\dot{I}_{\zeta} = qz \cdot \frac{z}{2} = \frac{qz^2}{2};$$

Рисунок 6. – Розрахункова схема до прикладу 3.

$$\dot{I}_{\epsilon} = qz \cdot \frac{d}{2} = \frac{qzd}{2}.$$

Максимальні еквівалентні напруження отримаємо у защемленні при  $z = l = 5d$ :

$$\sigma_{e \max} = \frac{16q \cdot 5d \sqrt{(5d)^2 + d^2}}{\pi \cdot d^3} = \frac{80q \sqrt{26}}{\pi \cdot d}.$$

## Тема 8. Стійкість стиснутих стержнів

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. В чому суть явища втрати стійкості стиснутого стержня?
2. Яку силу називають критичною?

3. По якій формулі знаходиться величина критичної сили?
4. Як зміниться величина критичної сили для стрижня круглого поперечного перерізу при зменшенні діаметра в два рази?
5. Як зміниться величина критичної сили при зменшенні довжини стержня в два рази?
6. В яких межах застосовується формула Ейлера?
7. Що називають гнучкістю стрижня?
8. Як впливає на величину критичної сили спосіб закріплення кінців стрижня?
9. Чому дорівнює коефіцієнт приведення довжини для різних умов закріплення кінців стрижня?

2. Індивідуальне тестування.

### Приклад розв'язування задач

**Приклад 1.** Дерев'яний стояк прямокутного поперечного перетину з розмірами  $b \times h = 5 \times 10$  см стискається поздовжньою силою  $P$  – рисунок 1. Визначити допустиму силу  $P$ , якщо модуль пружності матеріалу стояка  $E = 10^4$  МПа, границя пропорційності  $\sigma_{i0} = 10$  МПа, коефіцієнт запасу стійкості  $\hat{E}_{\bar{N}} = 2$ .

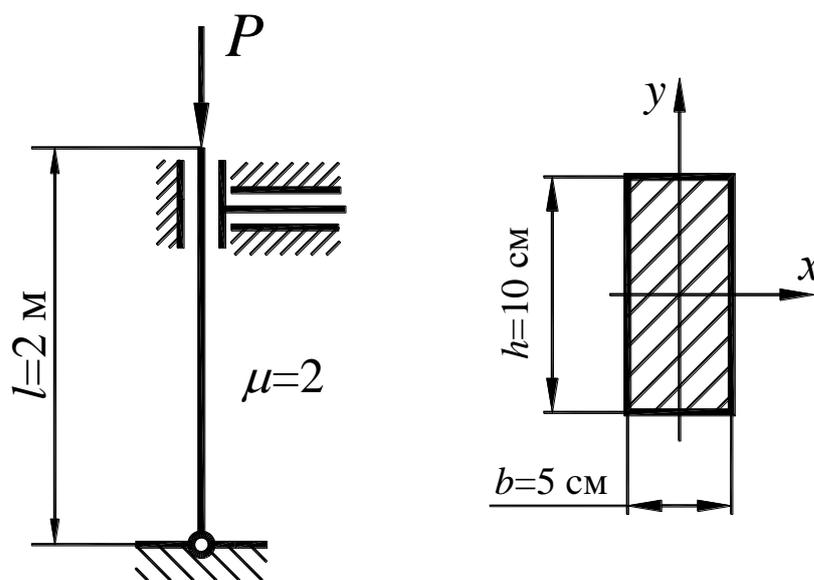


Рисунок 1. – Графічна умова до прикладу 1.

### Розв'язування:

Допустима сила  $P$  пов'язана з критичною силою співвідношенням:

$$D = \frac{D_{\text{êđ}}}{\hat{E}_{\tilde{N}}}.$$

Визначаємо граничну гнучкість дерев'яного стояка:

$$\lambda_{\text{ãđ}} = \pi \sqrt{\frac{\overset{\circ}{A}}{\sigma_{\text{ĩđ}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 10^4}{10}} = 99,34.$$

Визначаємо гнучкість дерев'яного стояка:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}} = \frac{2 \cdot 2}{1,443 \cdot 10^{-2}} = 277,2.$$

Тут  $\mu = 2$  - коефіцієнт приведення довжини для заданої схеми закріплення стояка;  $i_{\text{min}} = 1,443$  см - мінімальний радіус інерції поперечного перетину стояка, який був визначений за формулою:

$$i_{\text{min}} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{hb^3/12}{hb}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = 1,443 \text{ см.}$$

Оскільки гнучкість стояка більше граничної ( $\lambda = 277,2 > \lambda_{\text{ãđ}} = 99,34$ ), критичну силу визначаємо за формулою Ейлера:

$$D_{\text{êđ}} = \frac{\pi^2 \cdot \overset{\circ}{A} \cdot I_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 104,167 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 2)^2} = 6425 \text{ Н} = 6,425 \text{ кН.}$$

Тут  $I_{\text{min}} = 104,167$  см<sup>4</sup> - мінімальний момент інерції поперечного перетину стояка:

$$I_{\text{min}} = I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \cdot 5^3}{12} = 104,167 \text{ см}^4.$$

Допустимі навантаження при заданому коефіцієнті запасу стійкості:

$$P = \frac{D_{\hat{e}\delta}}{\hat{E}_{\hat{N}}} = \frac{6,425}{2} = 3,213 \text{ кН.}$$

**Приклад 2.** Дерев'яна колона довжиною 1,1 м і прямокутним поперечним перетином з розмірами  $a \times b = 10 \times 7$  см стиснута силою  $P = 50$  кН – рисунок 2. Визначити коефіцієнти запасу міцності і стійкості, якщо модуль пружності матеріалу колони  $\hat{A} = 10^4$  МПа, допустиме напруження  $[\sigma] = 10$  МПа, границя пропорційності  $\sigma_{i\delta} = 10$  МПа.

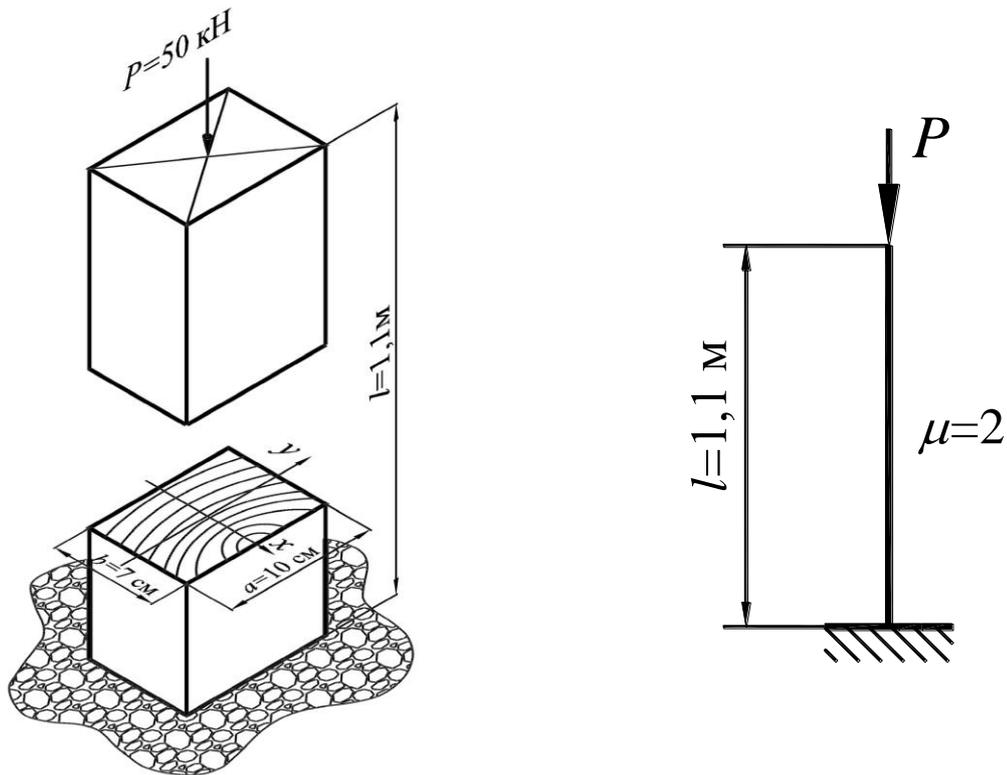


Рисунок 2. – Графічна умова і розрахункова схема до прикладу 2.

**Розв'язування:**

Визначаємо допустиме навантаження з умови міцності:

$$D_1 \leq [\sigma] \cdot F, \quad [D_1] = 10 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 10^{-4} = 70000 \text{ Н} = 70 \text{ кН.}$$

Коефіцієнт запасу міцності:

$$\hat{E}_i = \frac{[P_1]}{P} = \frac{70}{50} = 1,4.$$

Для визначення критичної сили з умови стійкості знайдемо граничну гнучкість і гнучкість дерев'яної колони.

Гранична гнучкість дерев'яної колони:

$$\lambda_{\bar{a}\bar{d}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\overset{\circ}{A}}{\sigma_{\bar{i}\bar{d}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 10^4}{10}} = 99,34.$$

Гнучкість дерев'яної колони:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,1}{2,021 \cdot 10^{-2}} = 108,86.$$

Тут  $\mu = 2$  - коефіцієнт приведення довжини для заданої схеми закріплення колони;  $i_{\min} = 2,021$  см - мінімальний радіус інерції поперечного перетину колони, який був визначений таким чином:

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{a}b^3/12}{\overset{\circ}{a}b}} = \frac{b}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2,021 \text{ см.}$$

Оскільки гнучкість колони більше граничної ( $\lambda = 108,86 > \lambda_{\bar{a}\bar{d}} = 99,34$ ), критичну силу визначаємо за формулою Ейлера:

$$D_2 = \frac{\pi^2 \overset{\circ}{A} I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^{10} \cdot 285,833 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 1,1)^2} = 582,27 \cdot 10^2 \text{ Н} = 58,227 \text{ кН.}$$

Тут  $I_{\min} = 285,833$  см<sup>4</sup> – мінімальний момент інерції поперечного перетину колони:

$$I_{\min} = I_y = \frac{\overset{\circ}{a}b^3}{12} = \frac{10 \cdot 7^3}{12} = 285,833 \text{ см}^4.$$

Коефіцієнт запасу стійкості:

$$\hat{E}_{\bar{N}} = \frac{D_2}{D} = \frac{58,227}{50} = 1,16.$$

Таким чином, коефіцієнт запасу міцності більше, ніж коефіцієнт запасу стійкості.

**Приклад 3.** Підібрати номер двотавра для стиснутого стержня, якщо прикладене навантаження  $P = 600$  кН. Допустиме напруження матеріалу стержня  $[\sigma] = 160$  МПа – рисунок 3.

**Розв'язування:**

Задача розв'язується способом поступових наближень. У першому наближенні приймаємо значення коефіцієнта зниження допустимого напруження  $\varphi_1 = 0,5$  (середня величина між максимальним і мінімальним значеннями).

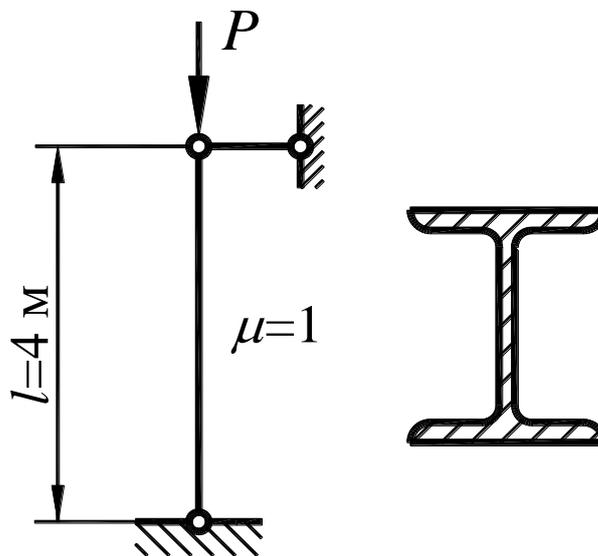


Рисунок 3. – Графічна умова до прикладу 3.

Тоді необхідна величина площі поперечного перетину з умови стійкості:

$$F_1 = \frac{P}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 75 \text{ см}^2.$$

З сортаменту прокатної сталі (додаток М) вибираємо найближче значення площі  $F_1' = 72,6 \text{ см}^2$ . Воно відповідає двотавру № 40. Мінімальний радіус інерції для цього двотавра  $i_{\min} = 3,03 \text{ см}$ .

Визначаємо гнучкість стержня:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 4}{3,03 \cdot 10^{-2}} = 132.$$

Тут  $\mu = 1$  – коефіцієнт приведення довжини для заданої схеми закріплення стержня.

Використовуючи додаток Е, обчислюємо за допомогою методу інтерполяції дійсне значення коефіцієнта  $\varphi$ . У першому наближенні

$$\varphi_1' = \varphi_{130} - \frac{\varphi_{130} - \varphi_{140}}{10} \cdot 2 = 0,4 - \frac{0,4 - 0,36}{10} \cdot 2 = 0,392.$$

Це менше прийнятого коефіцієнта  $\varphi_1 = 0,5$ , тому розраховуємо схему в

другому наближенні.

Приймаємо нове значення коефіцієнта зниження допустимого напруження  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,392}{2} = 0,446.$$

Повторюємо всі попередні розрахунки, які йдуть після прийняття значення коефіцієнта зниження допустимого напруження.

$$F_2 = \frac{P}{\varphi_2[\sigma]} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,446 \cdot 160 \cdot 10^6} = 84 \text{ см}^2.$$

З сортаменту прокатної сталі (додаток М) вибираємо найближче значення площі  $F_2' = 84,7 \text{ см}^2$ . Воно відповідає двотавру № 45. Мінімальний радіус інерції для цього двотавра  $i_{\min} = 3,09 \text{ см}$ .

Гнучкість стержня

$$\lambda_2 = \frac{1 \cdot 4}{3,09 \cdot 10^{-2}} = 129.$$

Цьому значенню гнучкості (додаток Е) відповідає  $\varphi_2' = 0,405$ . Різниця між коефіцієнтами  $\varphi_2$  і  $\varphi_2'$  велика, тому розраховуємо схему в третьому наближенні.

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,446 + 0,405}{2} = 0,42.$$

$$F_3 = \frac{P}{\varphi_3[\sigma]} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,42 \cdot 160 \cdot 10^6} = 89,3 \text{ см}^2.$$

З сортаменту прокатної сталі вибираємо найближче значення площі  $F_3' = 100 \text{ см}^2$ . Воно відповідає двотавру № 50. Мінімальний радіус інерції для цього двотавра  $i_{\min} = 3,23 \text{ см}$ .

Гнучкість стержня:

$$\lambda_3 = \frac{1 \cdot 4}{3,23 \cdot 10^{-2}} = 123,8.$$

Цьому значенню гнучкості (додаток Е) відповідає  $\varphi_3' = 0,43$ . Різниця між

коефіцієнтами  $\varphi_3$  і  $\varphi_3'$  задовільна, тому зупиняємося на двотавру № 50.

Визначаємо напруження стиску в прийнятому двотавру:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_3' F_3} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,43 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 13,95 \cdot 10^7 \text{ Па} = 139,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Умова міцності задовольняється.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. Динамічні навантаження

### Тема 9. Динамічні навантаження.

1. *Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. У чому розбіжність між статичними і динамічними навантаженнями?
2. Наведіть приклади динамічних навантажень.
3. Що називається числом степенів свободи заданої системи?
4. Дайте визначення системи з одним степенем свободи.
5. Вкажіть степінь свободи реальних систем і дайте відповідні пояснення.
6. В чому полягає принцип Даламбера?
7. Від яких факторів залежать напруження в ободі обертового колеса?
8. Дайте визначення поняття коефіцієнта динамічності?
9. У чому полягає статичний метод динамічного розрахунку?
10. Яке явище називається ударом і результатом чого воно є?
11. Приведіть формулу для визначення коефіцієнта динамічності при ударі.
12. Чому дорівнює коефіцієнт динамічності при раптовому прикладенню навантаження?
13. Від яких факторів залежить коефіцієнт динамічності при гармонічному навантаженні?
14. Які коливання називаються власними (вільними)?
15. Які коливання називаються вимушеними?

2. *Індивідуальне тестування.*

#### Приклади задач

**Приклад 1.** Визначити при допустимому напруженні  $[\sigma] = 70$  МПа необхідний діаметр тороса, на якому підвішений вантаж масою  $m_a = 3$  т, а, що піднімається з постійним прискоренням  $a = 4$  м/с<sup>2</sup> – рисунок 1. Масу

троса не враховувати.

**Розв'язування:**

Застосовуючи принцип Даламбера, прикладаємо до вантажу, що підіймається, силу інерції

$$D_3 = \delta_{\hat{a}} \dot{a}.$$

Напрямок сили інерції протилежний прискоренню (рисунок 1, б).

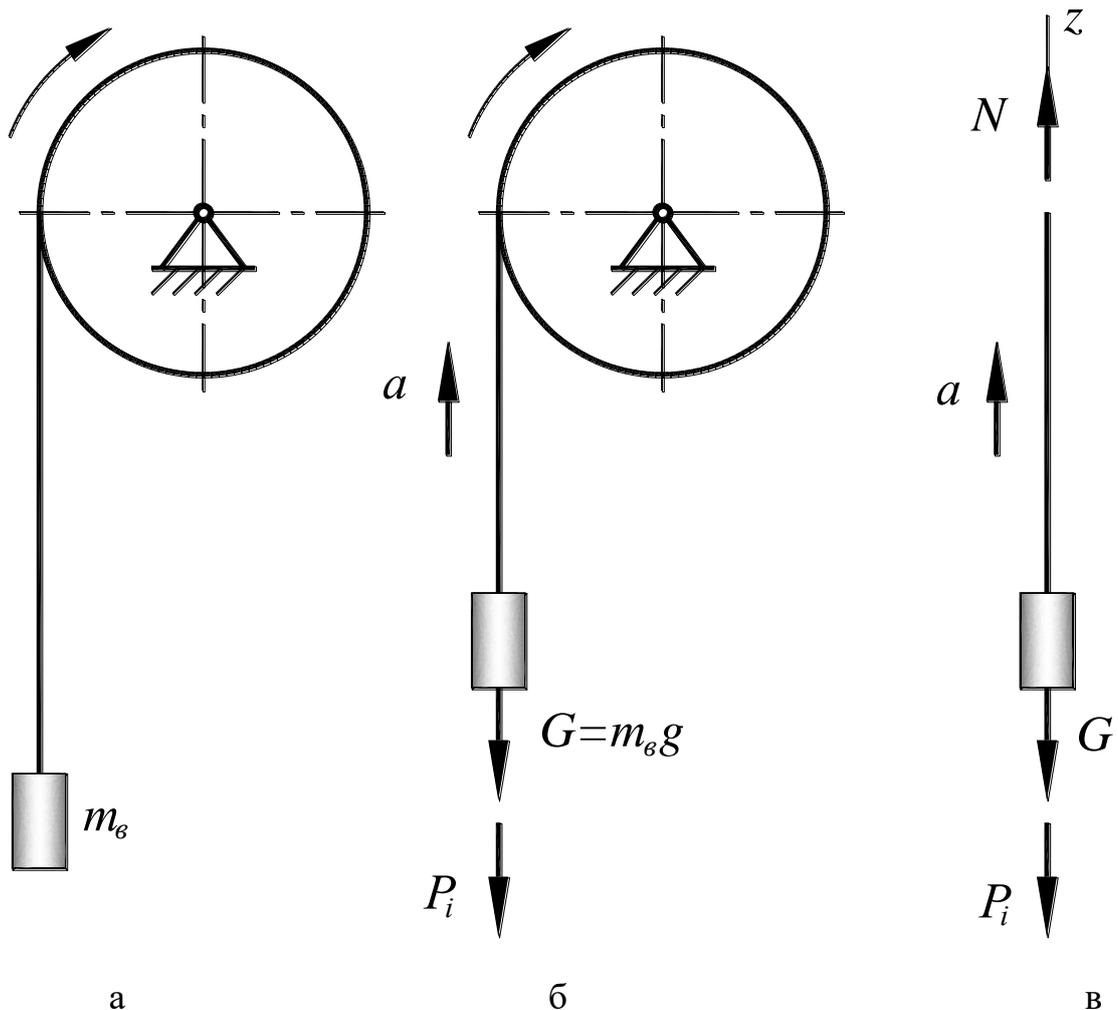


Рисунок 1. – Розрахункова схема до прикладу 1.

Застосовуючи метод перетинів, визначаємо поздовжнє зусилля, що виникає в поперечному перетині троса – рисунок 1, в. Умова рівноваги:

$$\sum Z_i = N - G - P_3 = 0,$$

де  $G = m_{\hat{a}} g$  - сила ваги вантажу.

Поздовжнє зусилля:

$$N = G + P_3 = m_{\hat{a}} g + m_{\hat{a}} a = m_{\hat{a}} (g + a).$$

Умова міцності:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{m_a(g + a)}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\sigma].$$

З умови міцності визначимо необхідний діаметр троса:

$$d \geq \sqrt{\frac{4m_a(g + a)}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot (9,81 + 4)}{\pi \cdot 70}} = 27,4 \text{ мм}; \text{ приймаємо } d = 28$$

мм.

**Приклад 2.** До вала діаметром  $d = 30$  мм, що рівномірно обертається, приварені два стержні з однаковими вантажами на кінцях – рисунок 2, а. Визначити з умови міцності вала при допустимому напруженні  $[\sigma] = 100$  МПа допустиму швидкість його обертання. Вал і стержні вважати невагомими. Силу ваги вантажів не враховувати.

#### ***Розв'язування:***

Застосовуючи принцип Даламбера, прикладаємо до вала відцентрові сили інерції вантажів (рисунок 2, б):

$$D_{s1} = \delta \cdot \dot{a}_1 = \delta \omega^2 l_1, \quad D_{s2} = \delta \cdot \dot{a}_2 = \delta \omega^2 l_2.$$

Для того, щоб одержати величини сили інерції в Н, необхідно масу підставляти в кг, а довжину в м.

$$\text{Враховуючи, що } l_2 = 1,5l_1, \text{ маємо } P_{s2} = 1,5P_{s1}.$$

Визначивши опорні реакції (рисунок 9.2, б), будемо епюру згинальних моментів (рисунок 2, в). Небезпечний перетин - у місці прикріплення правого стержня.

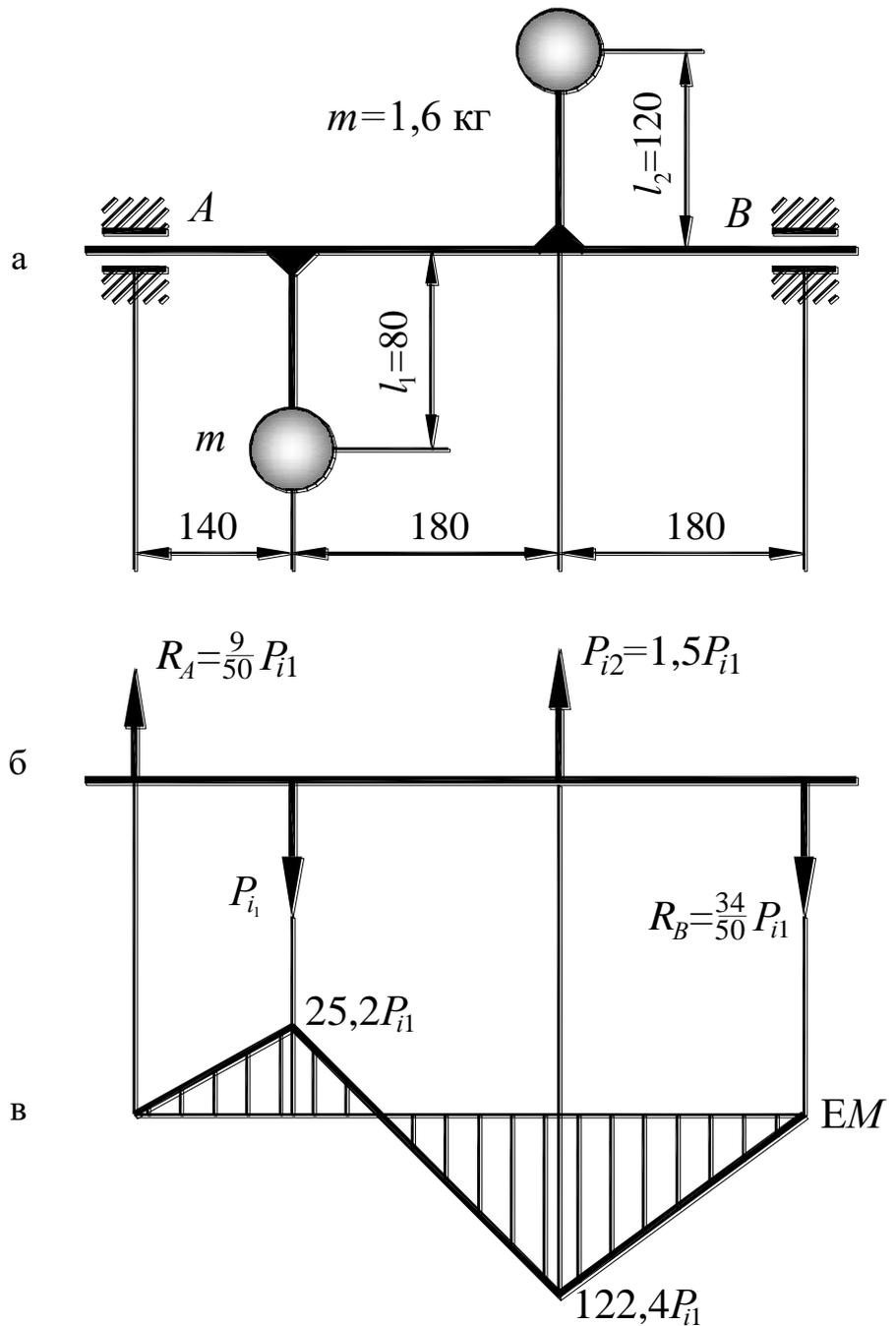


Рисунок 2 - Розрахункова схема до прикладу 2.

Умова міцності:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{122,4P_{i1}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{122,4m\omega^2 l_1}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} \leq [\sigma].$$

З умови міцності визначаємо допустиму швидкість обертання вала:

$$[\omega] = \sqrt{\frac{\pi \cdot d^3 [\sigma]}{32 \cdot 122,4ml_1}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot 30^3 \cdot 100}{32 \cdot 122,4 \cdot 1,6 \cdot 80 \cdot 10^{-3}}} = 130 \text{ рад/с.}$$

**Приклад 3.** На двотаврову балку довжиною  $l=2,5$  м (двотавр № 24:  $I_{\bar{D}} = 3460 \text{ см}^4$ ,  $W_{\bar{D}} = 289 \text{ см}^3$ ) яка вільно розташована на двох жорстких опорах, з висоти  $h=30$  мм падає вантаж вагою  $P=0,9$  кН – рисунок 3. Потрібно:

- 1) знайти найбільше нормальне напруження в балці;
- 2) вирішити аналогічну задачу за умови, що права опора замінена пружиною, податливість якої (тобто осідання від вантажу вагою 1 кН)  $\alpha=25$  мм/кН;
- 3) порівняти одержані результати.

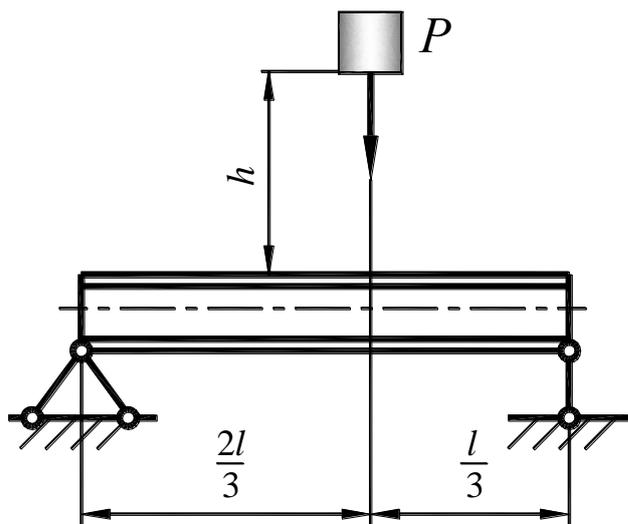


Рисунок 3.– Графічна умова до прикладу 3.

$$R_A = \frac{2}{3} P = \frac{2}{3} \cdot 0,9 = 0,6 \text{ кН.}$$

Будуємо вантажну епюру згинаючих моментів – рисунок 9.5, б, для чого визначаємо момент у перетині  $D$ :

$$\dot{M}_D = R_A \cdot \frac{1}{3} l = 0,6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 = 0,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Прикладаємо замість сили  $P$  одиничну силу  $\bar{D} = 1$  і визначаємо реакцію опори  $A$  – рисунок 9.5, в:

$$\sum \dot{M}_{\hat{A}i} = 0; \bar{R}_A \cdot l - \bar{P} \cdot \frac{2}{3} l = 0; \bar{R}_A = \frac{2}{3} \bar{P} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

### Розв'язування:

1. Розглянемо випадок, коли права опора не замінена пружиною.

Очевидно, що найбільше динамічне напруження виникатиме в тому перетині балки, куди падає вантаж.

Визначаємо статичний прогин балки за правилом Верещагіна.

Реакція опори  $A$  – рисунок 9.5, а:

$$\sum \dot{M}_{\hat{A}i} = 0; R_A \cdot l - P \cdot \frac{2}{3} l = 0;$$

Будуємо одиничну епюру згинаючих моментів – рисунок 4, г, для чого визначаємо момент у перетині  $D$ :

$$\bar{I}_D = \bar{R}_A \cdot \frac{1}{3} \cdot l = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 = 0,56.$$

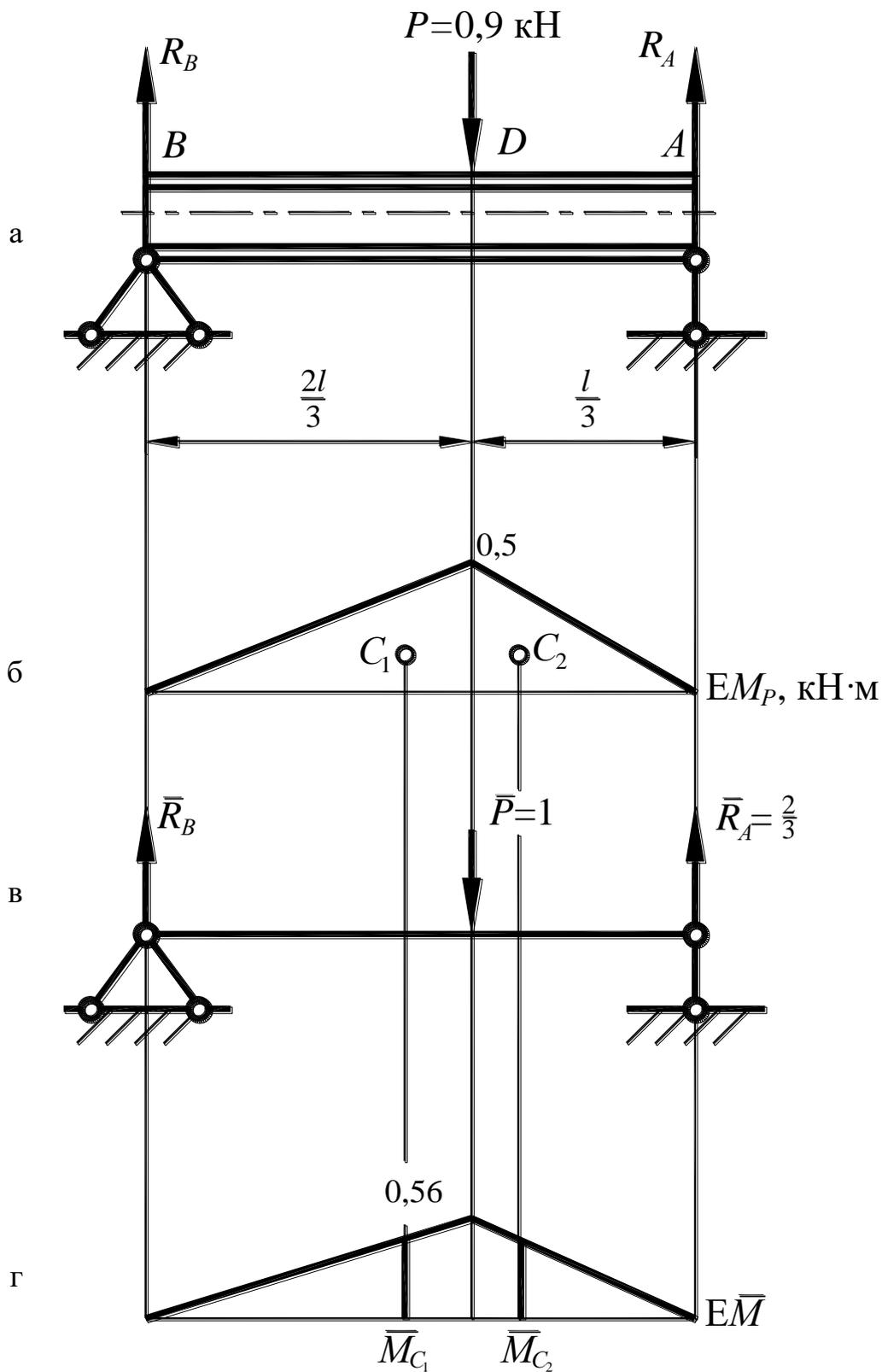


Рисунок 4.– Розрахункова схема для визначення статичного прогину

Розбиваємо вантажну епюру на елементарні фігури – два прямокутні трикутники з центрами ваги  $C_1$  і  $C_2$ .

Площі трикутників:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \dot{I}_D \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,5 = 0,42 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \dot{I}_D \cdot \frac{1}{3} l = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 = 0,21 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Моменти на одиничній епюрі, відповідні положенню центрів ваги елементарних фігур вантажної епюри:

$$\bar{I}_{\tilde{N}1} = \bar{I}_{\tilde{N}2} = \frac{2}{3} \cdot \bar{I}_D = \frac{2}{3} \cdot 0,56 = 0,37.$$

Статичний прогин:

$$\delta_{\tilde{n}\delta} = \frac{\sum \omega_i \cdot \bar{M}_{Ci}}{EI_{\delta}} = \frac{\omega_1 \bar{I}_{\tilde{N}1} + \omega_2 \bar{I}_{\tilde{N}2}}{EI_x} = \frac{(0,42 + 0,21) \cdot 0,37 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,034 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Розраховуємо коефіцієнт динамічності:

$$k_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\tilde{n}\delta}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{0,034}} = 43.$$

Найбільше нормальне статичне напруження:

$$\sigma_{\tilde{n}\delta} = \frac{\dot{I}_D}{W_{\delta}} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{289 \cdot 10^3} = 1,73 \text{ МПа}.$$

Визначаємо найбільше нормальне динамічне напруження:

$$\sigma_{\ddot{a}} = 43 \cdot 1,73 = 74,4 \text{ МПа}.$$

2. Розглянемо випадок, коли права опора балки замінена пружиною – рисунок 5.

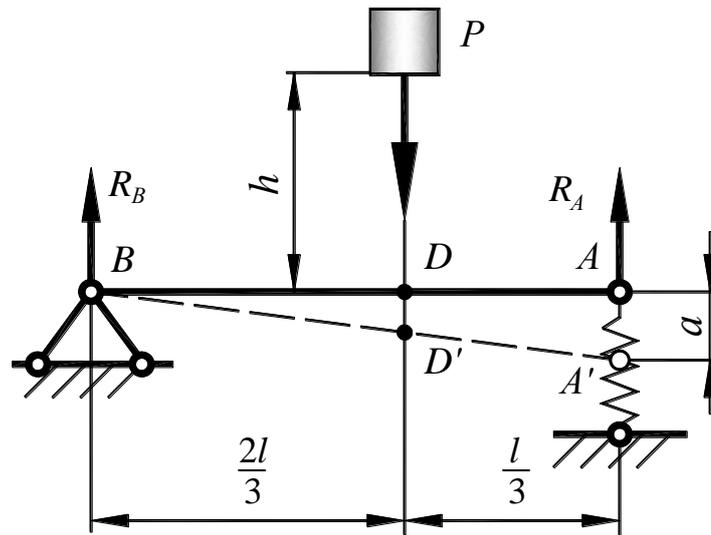


Рисунок 5. – Розрахункова схема балки з пружиною замість правої опори

Визначаємо статичну деформацію балки, що враховує переміщення перетину  $D$  в результаті вкорочення пружини і статичний прогин балки.

Вкорочення пружини під дією реакції  $R_A$ :

$$\dot{a} = R_A \alpha = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ мм.}$$

Переміщення перетину  $D$  в результаті вкорочення пружини. Оскільки  $\Delta \hat{A}A' \hat{A}' \sim \Delta \hat{A}DD'$ , одержимо:

$$\frac{DD'}{AA'} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow DD' = \frac{BD}{DA} \cdot AA' = \frac{2}{3} \cdot a = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10 \text{ мм.}$$

Статична деформація балки,

$$\Delta_{c\dot{o}} = \delta_{\tilde{n}\dot{o}} + DD' = 0,034 + 10 = 10,034 \text{ мм.}$$

Розраховуємо коефіцієнт динамічності:

$$k'_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{c\dot{o}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 30}{10,034}} = 3,6.$$

Найбільше нормальне динамічне напруження:

$$\sigma'_{\ddot{a}} = k'_{\ddot{a}} \sigma_{\tilde{n}\dot{o}} = 3,6 \cdot 1,73 = 6,2 \text{ МПа.}$$

Відношення найбільших нормальних динамічних напружень, які виникають при падінні вантажу на балку з пружиною і без неї:

$$\frac{\sigma_{\ddot{a}}}{\sigma'_{\ddot{a}}} = \frac{74,4}{6,2} = 12.$$

Таким чином, в результаті встановлення пружини динамічні напруження зменшилися в 12 разів.

### **Тема 10. Розрахунок товстостінних циліндричних судів.**

#### *1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Формули для розрахунку суду, навантаженого внутрішнім тиском  $p$ .
2. Схема навантаження суду внутрішнім тиском і епюри радіальних, кільцевих напружень та радіальних переміщень.
3. Розрахункові напруження на внутрішній поверхні циліндру за третьою теорією міцності
4. Формули для розрахунку суду, навантаженого зовнішнім тиском  $q$ .
5. Схема навантаження суду зовнішнім тиском і епюри радіальних, кільцевих напружень та радіальних переміщень.
6. Формули для розрахунку суду, навантаженого зовнішнім тиском  $q$  і внутрішнім тиском  $p$ .
7. Схема навантаження суду зовнішнім та внутрішнім тиском.
8. Формули для розрахунку двошарового циліндру з посадкою з натягом, який завантажений внутрішнім тиском  $p$  (матеріал обох циліндрів однаковий).
9. Схема навантаження двошарового циліндру внутрішнім тиском.

#### *2. Індивідуальне тестування.*

### **Приклад розв'язування задач**

**Приклад 1.** Перевірити міцність експериментальної камери високого тиску для обробки вишневого соку, якщо її внутрішній радіус  $r = 30$  мм, зовнішній радіус  $R = 50$  мм, робочій тиск у камері  $p = 300$  МПа. Матеріал камери – сталь 30ХМА з границею текучості  $\sigma_{0,2} = 1320$  МПа, модулем Юнга  $A = 2 \cdot 10^5$  МПа і коефіцієнтом Пуассона  $\mu = 0,3$ . Визначити характер

зміни товщини камери при робочому завантаженні.

**Розв'язування:**

Для одношарових камер максимальні розрахункові напруження виникають на внутрішній поверхні. За третьою теорією міцності:

$$\sigma_p^{III} = \frac{2p}{1-\eta^2} = \frac{2p}{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{2 \cdot 300}{1-\left(\frac{30}{50}\right)^2} = 937,5 \text{ МПа} < \sigma_{0,2} = 1320 \text{ МПа},$$

отже, умова міцності витримана.

Коефіцієнт запасу міцності:

$$n = \frac{\sigma_{0,2}}{\sigma_p^{III}} = \frac{1320}{937,5} = 1,41.$$

Для визначення товщини камери при робочому завантаженні обчислимо радіальні переміщення внутрішнього і зовнішнього радіусів камери:

$$\begin{aligned} \dot{e}_r &= \frac{pr^3}{E(R^2 - r^2)} \left[ (1 - \mu) + (1 + \mu) \frac{R^2}{r^2} \right] = \\ &= \frac{300 \cdot 10^6 \cdot 0,030^3}{2 \cdot 10^{11} (0,050^2 - 0,030^2)} \left[ (1 - 0,3) + (1 + 0,3) \frac{0,050^2}{0,030^2} \right] = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \end{aligned}$$

$$\dot{e}_R = \frac{2 \delta r^2 R}{E(R^2 - r^2)} = \frac{2 \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 0,030^2 \cdot 0,050}{2 \cdot 10^{11} (0,050^2 - 0,030^2)} = 0,08 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Значення радіусів при робочому завантаженні:

$$r_p = r + u_r = 30 + 0,11 = 30,11 \text{ мм};$$

$$R_p = R + u_R = 50 + 0,08 = 50,08 \text{ мм}.$$

Відносна зміна товщини камери:

$$\frac{R_p - r_p}{R - r} = \frac{50,08 - 30,11}{50 - 30} = 0,9985, \text{ тобто при робочому завантаженні}$$

товщина камери зменшується.

**Приклад 2.** Розрахувати експериментальну камеру високого тиску для обробки рідких харчових продуктів з максимальним робочим тиском  $p = 600$  МПа. Для забезпечення потрібного робочого об'єму внутрішній радіус камери треба прийняти  $r = 50$  мм. Матеріал камери – сталь 45ХН2МФА з границею текучості  $\sigma_{0,2} = 1830$  МПа, модулем Юнга  $\dot{A} = 2 \cdot 10^5$  МПа і коефіцієнтом Пуассона  $\mu = 0,3$ .

**Розв'язування:**

Розрахуємо одношарову камеру.

За третьою теорією міцності:

$$\sigma_p^{III} = \frac{2p}{1-\eta^2} \leq \sigma_{0,2}, \text{ звідси знаходимо коефіцієнт } \eta:$$

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{2\delta}{\sigma_{0,2}}} = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot 600}{1830}} = 0,59.$$

Зовнішній радіус камери:

$$R = \frac{r}{\mu} = \frac{50}{0,59} = 84,7 \text{ мм, після округлення } R = 85 \text{ мм.}$$

Розрахуємо двошарову камеру.

Допустиме значення внутрішнього тиску:

$$[\delta] = \sigma_{0,2}(1 - \eta), \text{ звідси знаходимо коефіцієнт } \eta:$$

$$\eta = 1 - \frac{[\delta]}{\sigma_{0,2}} = 1 - \frac{600}{1830} = 0,67.$$

Зовнішній радіус камери:

$$R = \frac{r}{\eta} = \frac{50}{0,67} = 74,6 \text{ мм, після округлення } R = 75 \text{ мм.}$$

Радіус поверхні спряження двох циліндрів і натяг третьою теорією міцності:

$$r_0 = \sqrt{R \cdot r} = \sqrt{75 \cdot 50} \approx 61 \text{ мм, приймаємо } r_0 = 60 \text{ мм;}$$

$$\Delta = \frac{2r_0}{E} p = \frac{2 \cdot 0,060}{2 \cdot 10^{11}} \cdot 600 \cdot 10^6 = 0,36 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Таким чином, при для двошарової камери сумарна товщина на 10 мм менша, ніж для одношарової камери.

**Приклад 3.** Розрахувати раціональну двошарову камеру високого тиску з внутрішнім об'ємом 3 л, якщо згідно експлуатаційних вимог висота робочої камери не повинна перевищувати 40 см. Робочій тиск у камері  $p = 500$  МПа. Матеріал камери – сталь 30ХМА з границею текучості  $\sigma_{0,2} = 1320$  МПа, модулем Юнга  $\overset{\circ}{A} = 2 \cdot 10^5$  МПа і коефіцієнтом Пуассона  $\mu = 0,3$ . Побудувати епюри окружних і радіальних напружень стінок камери при робочому навантаженні і без нього.

**Розв'язування:**

Визначаємо внутрішній радіус камери.

Робочий об'єм циліндричної камери:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

де  $h$  – висота камери;

$r$  – внутрішній радіус камери.

Приймаючи значення висоти камери згідно умовам задачі  $h = 0,4$  м, обчислимо внутрішній радіус камери:

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,4}} = 0,049 \text{ м, приймаємо } r = 50 \text{ мм.}$$

Допустиме значення внутрішнього тиску:

$$[\delta] = \sigma_{0,2} (1 - \eta), \text{ звідси знаходимо коефіцієнт } \eta:$$

$$\eta = 1 - \frac{[\delta]}{\sigma_{0,2}} = 1 - \frac{500}{1320} = 0,62.$$

Зовнішній радіус камери:

$$R = \frac{r}{\eta} = \frac{50}{0,62} = 80,7 \text{ мм, приймаємо з деяким запасом } R = 85 \text{ мм.}$$

Радіус поверхні спряження двох циліндрів і натяг третьою теорією міцності:

$$r_0 = \sqrt{R \cdot r} = \sqrt{85 \cdot 50} = 65,2 \text{ мм, приймаємо } r_0 = 65 \text{ мм;}$$

$$\Delta = \frac{2r_0}{E} p = \frac{2 \cdot 0,065}{2 \cdot 10^{11}} \cdot 500 \cdot 10^6 = 0,325 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Контактний тиск  $p_0$ :

$$p_0 = \frac{\Delta \cdot E}{4R^2} \cdot \frac{(R^2 - r_0^2)(r_0^2 - r^2)}{R^2 - r^2} = \frac{0,325 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}}{4 \cdot 0,085^2} \times \\ \times \frac{(0,085^2 - 0,065^2)(0,065^2 - 0,050^2)}{0,085^2 - 0,050^2} = 2,46 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Напруження у внутрішньому циліндрі:

- початкові від контактного тиску  $p_0$  на зовнішній поверхні:

$$\sigma_t = -p_0 \frac{1 + \eta_1^2}{1 - \eta_1^2} = -2,46 \cdot \frac{1 + 0,77^2}{1 - 0,77^2} = -9,58 \text{ МПа, } \sigma_r = -p_0 = -2,46 \text{ МПа,}$$

$$\text{де } \eta_1 = \frac{r}{r_0} = \frac{50}{65} = 0,77;$$

- початкові від контактного тиску  $p_0$  на внутрішній поверхні:

$$\sigma_t = -p_0 \frac{2}{1 - \eta_1^2} = -2,46 \cdot \frac{2}{1 - 0,77^2} = -12,04 \text{ МПа, } \sigma_r = 0;$$

- від дії внутрішнього тиску  $p$  з урахуванням контактного тиску  $p_0$  на зовнішній поверхні:

$$\sigma_t = p \frac{1 + \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 1} - p_0 \frac{1 + \eta_1^2}{1 - \eta_1^2} = 500 \cdot \frac{1 + \left(\frac{1}{0,77}\right)^2}{\left(\frac{1}{0,62}\right)^2 - 1} - 2,46 \cdot \frac{1 + 0,77^2}{1 - 0,77^2} = 829,2 \text{ МПа,}$$

$$\text{де } \eta_2 = \frac{r_0}{R} = \frac{65}{85} = 0,77;$$

$$\sigma_r = p \frac{1 - \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 1} - p_0 = 500 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{0,77}\right)^2}{\left(\frac{1}{0,62}\right)^2 - 1} - 2,86 = -216,8 \text{ МПа;}$$

- від дії внутрішнього тиску  $p$  з урахуванням контактного тиску  $p_0$  на

внутрішній поверхні:

$$\sigma_t = p \frac{1 + \eta^2}{1 - \eta^2} - p_0 \frac{2}{1 - \eta_1^2} = 500 \cdot \frac{1 + 0,62^2}{1 - 0,62^2} - 2,86 \cdot \frac{2}{1 - 0,77^2} = 1100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_r = -\delta = -500 \text{ МПа}.$$

Напруження на зовнішньому циліндрі:

- початкові від контактного тиску  $p_0$  на зовнішній поверхні:

$$\sigma_t = p_0 \frac{2}{\left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2 - 1} = 2,86 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{0,77}\right)^2 - 1} = 8,31 \text{ МПа},$$

$$\sigma_r = 0;$$

- початкові від контактного тиску  $p_0$  на внутрішній поверхні:

$$\sigma_t = p_0 \frac{1 + \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} = 2,86 \cdot \frac{1 + 0,77^2}{1 - 0,77^2} = 11,19 \text{ МПа},$$

$$\sigma_r = -p_0 = -2,86 \text{ МПа};$$

- від дії внутрішнього тиску  $p$  з урахуванням контактного тиску  $p_0$  на зовнішній поверхні:

$$\sigma_t = p \frac{2}{\left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 1} + p_0 \frac{2}{\left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2 - 1} = 500 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{0,62}\right)^2 - 1} + 2,86 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{0,77}\right)^2 - 1} =$$

$$= 632,76 \text{ МПа},$$

$$\sigma_r = 0;$$

- від дії внутрішнього тиску  $p$  з урахуванням контактного тиску  $p_0$  на внутрішній поверхні:

$$\sigma_t = p \frac{1 + \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 1} + p_0 \frac{1 + \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} = 500 \cdot \frac{1 + \left(\frac{1}{0,77}\right)^2}{\left(\frac{1}{0,62}\right)^2 - 1} + 2,86 \cdot \frac{1 + 0,77^2}{1 - 0,77^2}$$

= 850 МПа,

$$\sigma_r = p \frac{1 - \left(\frac{1}{\eta_2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\eta}\right)^2 - 1} - p_0 = 500 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{0,77}\right)^2}{\left(\frac{1}{0,62}\right)^2 - 1} - 2,86 = -217,24 \text{ МПа.}$$

Епюри напружень для двох оболонок камери зображені на рисунку 1. (на рисунку 1, а – епюри напружень від початкового тиску  $p_0$ , на рисунку 1, б – від внутрішнього тиску  $p$  з урахуванням контактного тиску  $p_0$ ).

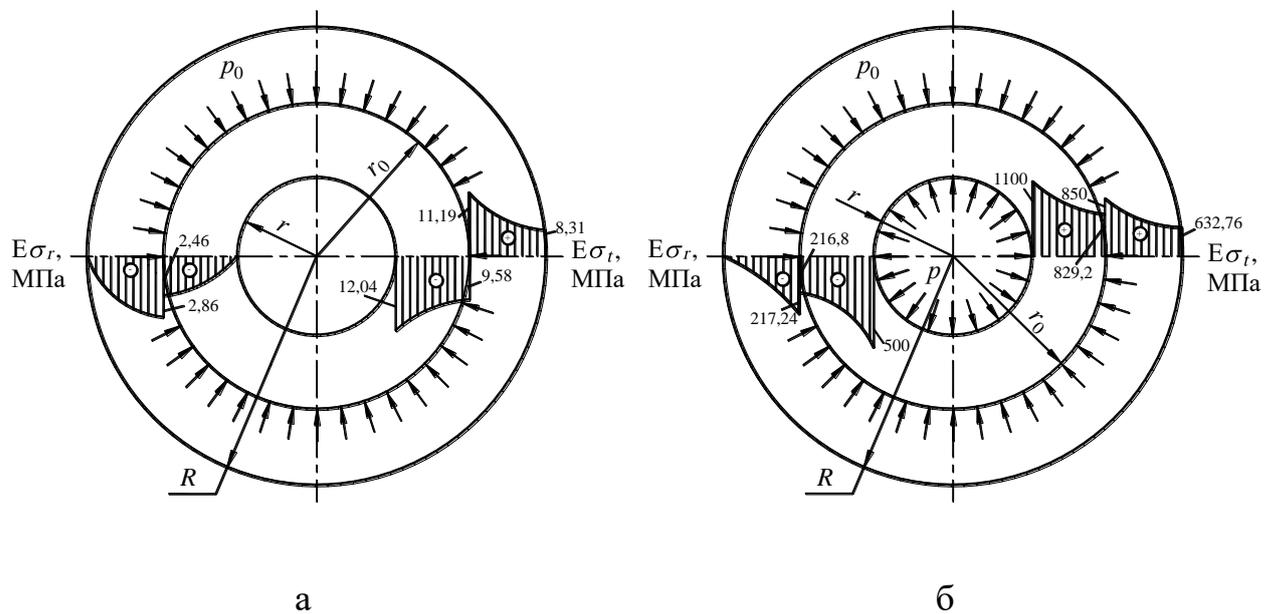


Рисунок 1. – Епюри напружень для двох оболонок камери

**ЧАСТИНА 3.**  
**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ**  
**РОБОТИ СТУДЕНТІВ**

# **ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Напружено-деформований стан**

## **Тема 1. Вступ. Метод перерізу. Види деформації.**

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

### **Міцність**

- А) здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись
- Б) здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій
- В) здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги
- Г) немає правильної відповіді

### **Жорсткість**

- А) здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись
- Б) здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій
- В) здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги
- Г) немає правильної відповіді

### **Стійкість**

- А) здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись
- Б) здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій
- В) здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги
- Г) немає правильної відповіді

### **Зовнішні навантаження поділяються за характером прикладання**

- А) зосереджена сила та розподілене навантаження
- Б) статичне навантаження та динамічні навантаження
- В) постійної дії (сталі), тимчасової дії
- Г) немає правильної відповіді

**До об'єктів розрахунку опору матеріалів належать**

- А) стрижень (брус), оболонка, пластина, масивне тіло
- Б) стрижень (брус), пластина, масивне тіло
- В) стрижень (брус), оболонка, масивне тіло
- Г) стрижень (брус), оболонка, пластина

**Основними властивостями твердого деформованого тіла є**

- А) пружність, пластичність, крихкість, однорідність, ізотропність, анізотропність, повзучість, стійкість
- Б) пружність, пластичність, крихкість, однорідність, ізотропність, анізотропність, повзучість, релаксація
- В) пружність, пластичність, крихкість, однорідність, ізотропність, анізотропність, повзучість, жорсткість
- Г) пружність, пластичність, крихкість, однорідність, ізотропність, анізотропність, повзучість, стійкість

**До простих деформацій відносять**

- А) центральний розтяг та стиск, кручення, згин, зсув
- Б) позацентровий розтяг та стиск, кручення, згин, зсув
- В) центральний розтяг та стиск, кручення, зсув
- Г) центральний розтяг та стиск, кручення, згин

**Напруження вимірюється**

- А) Н
- Б) Па
- В) см<sup>4</sup>
- Г) см<sup>3</sup>

**Релаксація напружень**

- А) зменшення напружень у матеріалі з часом за умови обмеження деформації
- Б) якщо властивості матеріалу не залежать від напрямку дії навантаження (прикладом такого матеріалу є сталь, чавун, крейда)
- В) якщо властивості матеріалу залежать від напрямку дії стислого навантаження (прикладом такого матеріалу є дерево)
- Г) це здатність матеріалу до деформування за умови тривалої дії навантаження

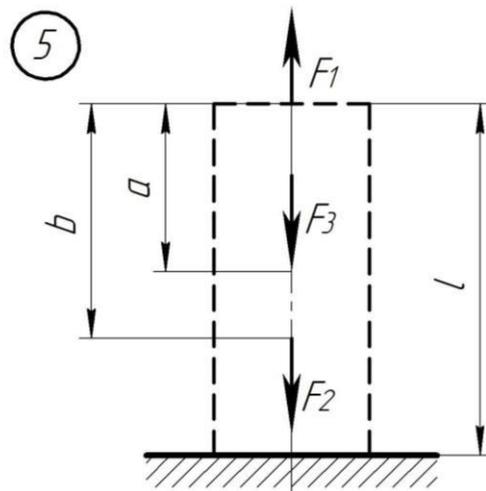
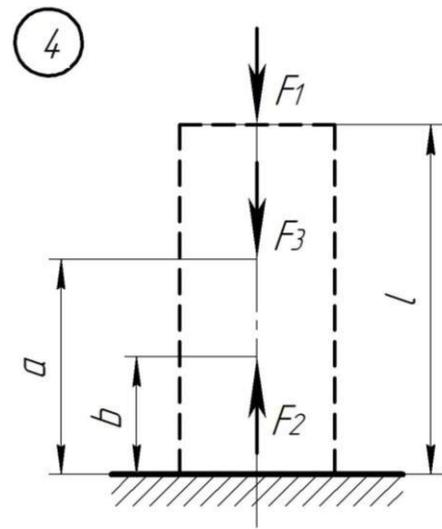
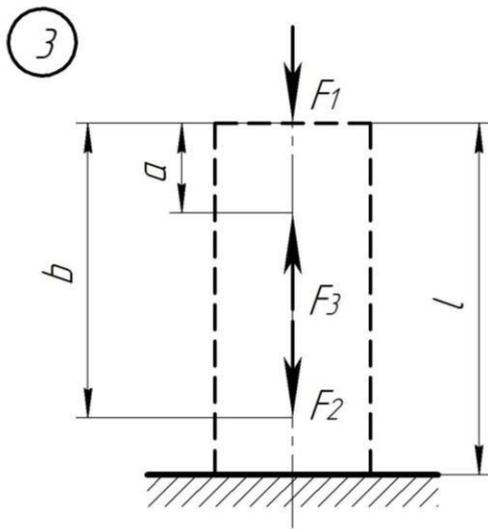
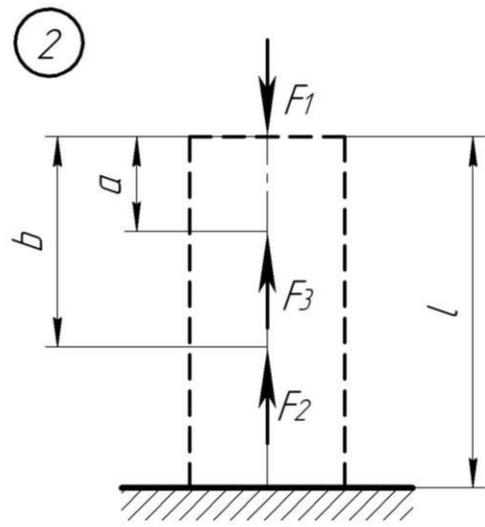
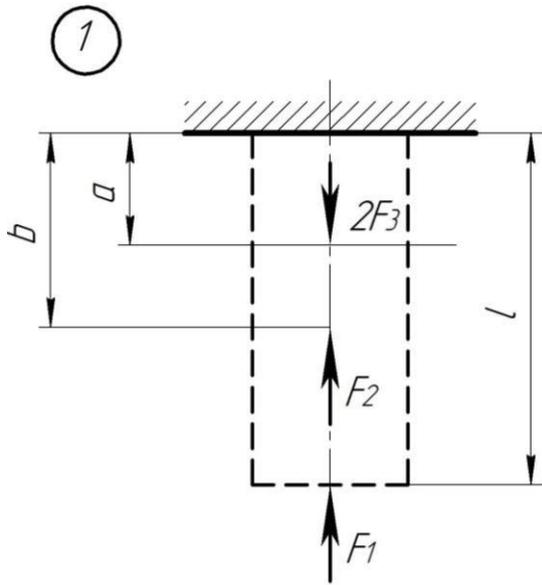
3. Задача для самостійного розв'язування.

Для заданого прямолінійного ступінчатого сталюого стержня визначити розміри поперечного перетину на всіх ділянках за умови, що форма перетину - круг; виконати ескіз стержня; побудувати епюри робочих (фактичних) нормальних напружень і лінійних переміщень стержня, якщо  $\ell = 8\text{м}$ ;  $a = k\ell$ ;

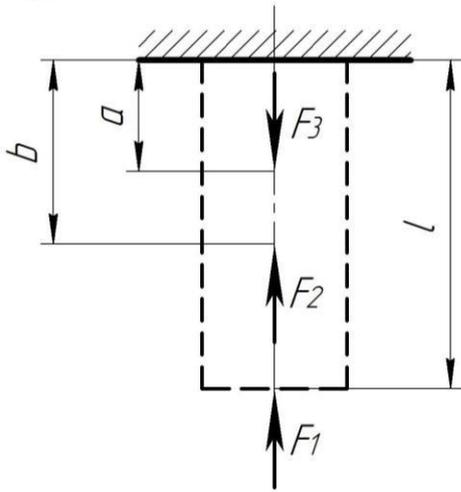
$b = ml$ ; матеріал стержня – сталь;  $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ ;  $E= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Варіанти завдань для виконання

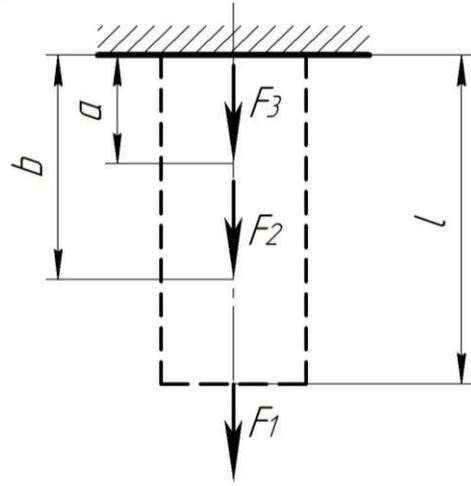
№ з/п	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$k$	$m$
1	25	30	50	0,2	0,5
2	10	40	20	0,4	0,7
3	20	10	60	0,1	0,4
4	15	20	40	0,3	0,6
5	30	25	10	0,25	0,65
6	25	50	25	0,35	0,75
7	40	15	30	0,45	0,8
8	20	30	50	0,15	0,45
9	50	20	40	0,2	0,8
0	60	10	20	0,4	0,8



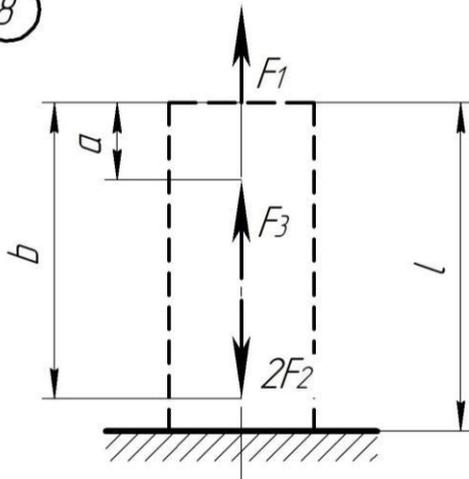
6



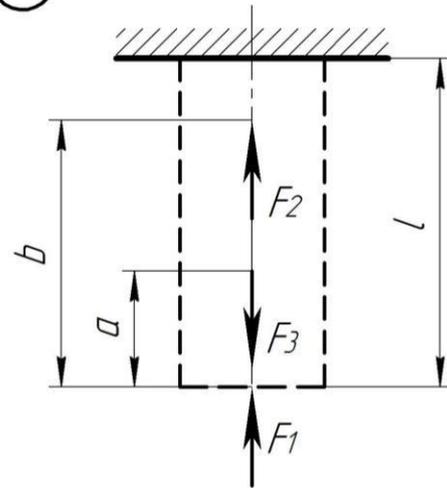
7



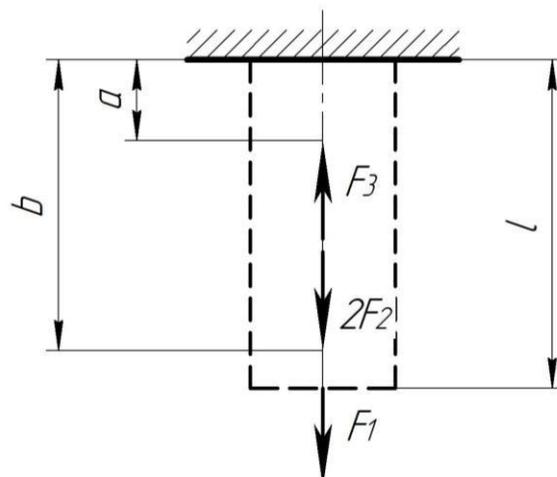
8



9



0



### **Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник/ В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### **Тема 2. Розтяг та стиск.**

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

#### **Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Для визначення поздовжньої сили для стрижня використовують метод перерізів. Він полягає**

А)  $N_z > 0$  – коли вона направлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від'ємна», викликаючи стиск

Б)  $N_z \leq 0$  – коли вона направлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від'ємна», викликаючи стиск

В)  $N_z = 0$  – коли вона направлена вздовж перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від'ємна», викликаючи стиск

Г) немає правильної відповіді

**До механічних властивостей матеріалу відносяться**

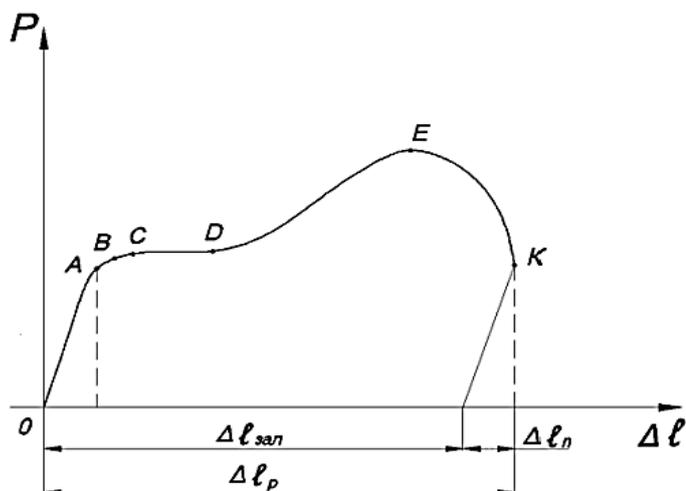
А) характеристики міцності, пластичності, в'язкості

Б) нормальні та дотичні напруження

В) повна та питома робота

Г) немає правильної відповіді

Згідно до діаграми розтягу-стиску руйнування відбувається в точці



- А) А
- Б) В
- В) С
- Г) К

**Нормальні зразки мають такі характеристики**

- А) виключно круглий зразок
- Б) круглий зразок з параметрами:  $\varnothing = 20$  мм,  $l = 10 \cdot d$
- В) виготовляються з м'якої сталі (Сталь 3)
- Г) немає правильної відповіді

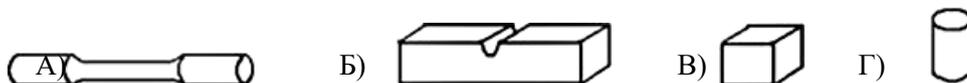
**При центральному розтягу-стиску використовують методи розрахунку**

- А) за нормальними та дотичними напруженнями
- Б) за міцністю, жорсткістю та стійкістю
- В) за руйнуючими навантаженнями; за допустимими напруженнями; за граничними станами
- Г) немає правильної відповіді

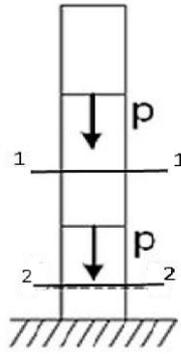
**Нормальний опір для пластичних матеріалів рівний**

- А) границі пропорційності
- Б) границі текучості
- В) границі пружності
- Г) границі міцності

**Зразок з маловуглецевої сталі призначений для на розтяг має вигляд**



Для даного стержня нормальні напруження будуть



- А) розтягуючим
- Б) розтягуючим і стискаючим
- В) рівні нулю
- Г) стискаючі

Границі міцності не існує при

- А) стиску крихких матеріалів
- Б) стиску пластичних матеріалів
- В) стиску анізотропних матеріалів
- Г) стиску пружних матеріалів

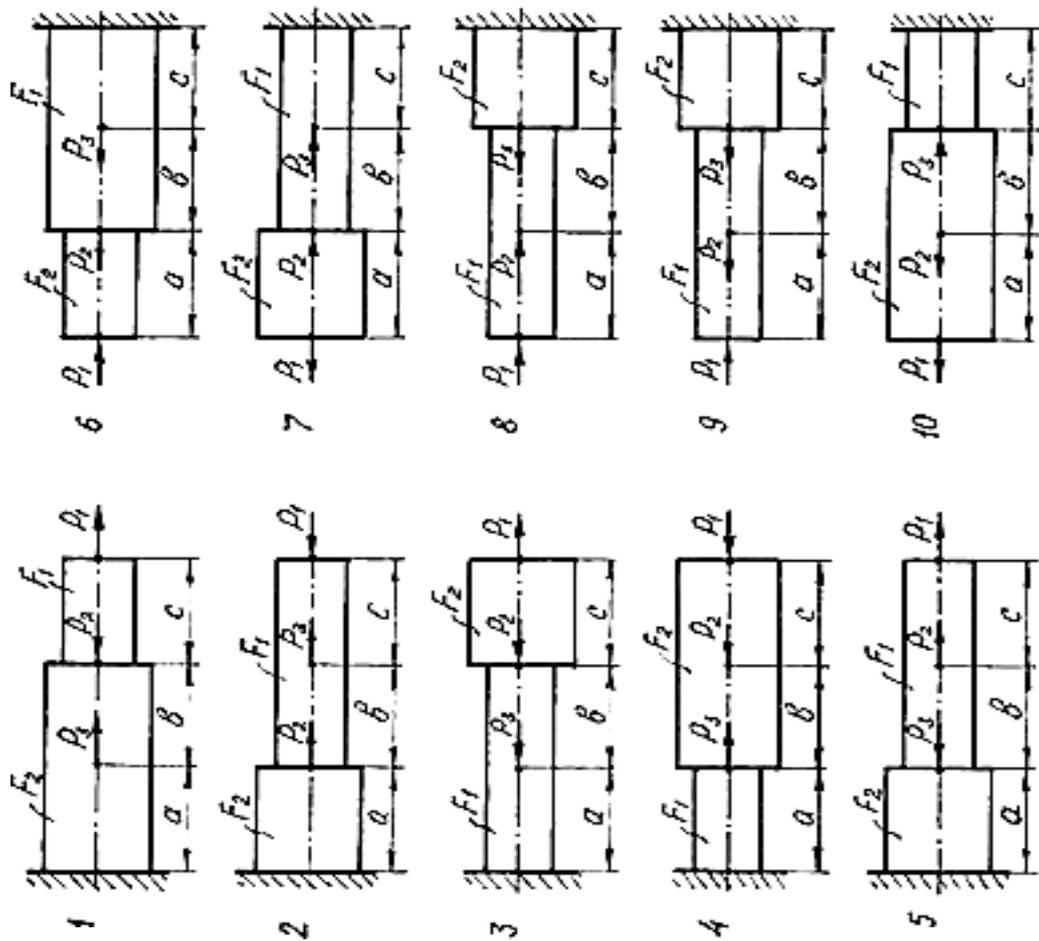
3. Задачі для самостійного розв'язування.

Для заданого статично визначеного стержня необхідно:

- 1) побудувати епюру поздовжніх сил;
- 2) із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стержня на кожній ступені;
- 3) побудувати епюру нормальних напружень;
- 4) визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Жорстко закріпити вільний кінець стержня, що розраховувався в першій частині задачі (з підібраними поперечними перерізами). Для отриманого статично невизначеного стержня:

- 1) розкрити статичну невизначеність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень;
- 3) визначити загальне подовження або укорочення стержня.



Варіанти завдань для виконання

Параметри задачі	Числові варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_1, \text{кН}$	40	50	65	40	80	55	60	45	50	30
$P_2, \text{кН}$	90	55	70	50	60	70	80	35	55	45
$P_3, \text{кН}$	100	60	35	65	70	90	70	30	70	85
$a, \text{м}$	0,3	0,4	0,5	0,3	0,9	0,1	0,3	0,7	0,8	0,4
$b, \text{м}$	0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	0,2
$c, \text{м}$	0,1	0,3	0,6	0,7	0,3	0,3	0,4	0,5	0,7	0,3
$[\sigma]_p, \text{МПа}$	200	160	180	200	180	200	160	180	160	200
$[\sigma]_{ст}, \text{МПа}$	100	80	110	90	90	110	110	110	90	100

### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### Тема 3. Фізико-механічні властивості матеріалів

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Задачі для самостійного розв'язування.

Вихідні дані до вирішення задачі:

1. Розрахункова схема заданої деталі з вказівкою її розмірів, розташуванням технологічних особливостей, таких як галтелі, виточки, отвори, тощо.

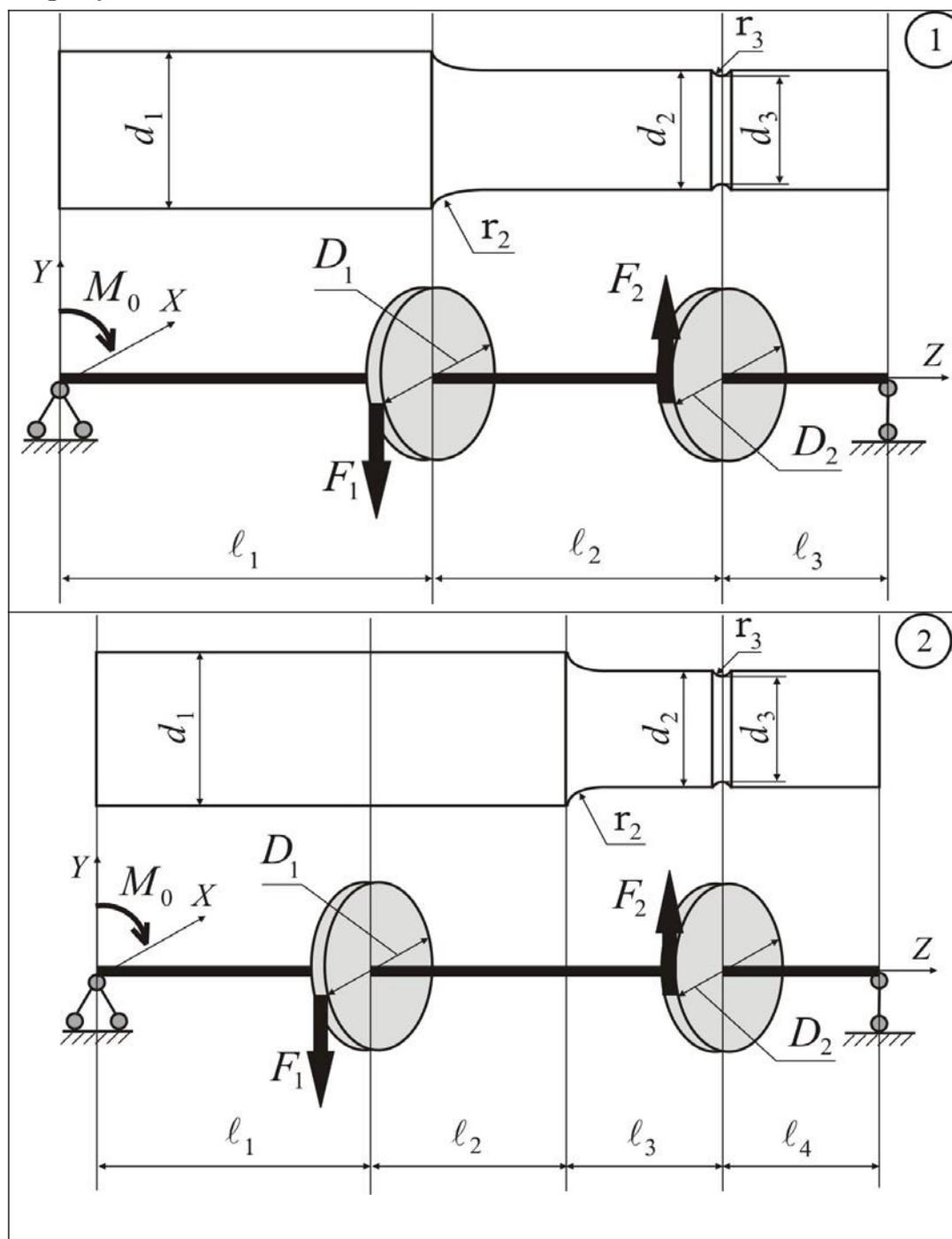
2. Зовнішнє навантаження у вигляді змінних у часі зосереджених зусиль з їх максимальними  $F_{max}$  та мінімальними  $F_{min}$  значеннями.

3. Властивості матеріалу деталі, які включають для нормальних та дотичних напружень відповідно:

- границі міцності матеріалу  $\sigma_B$ ,  $\tau_B$ ;
- границі текучості матеріалу  $\sigma_T$ ,  $\tau_T$ ;
- границі витривалості симетричного циклу  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$ ;
- коефіцієнти чутливості матеріалу до асиметрії циклу  $\Psi_\sigma$ ,  $\Psi_\tau$ .

№ вар.	Розмір колес, мм		Розміри вала, мм										Сили, кН			
	$D_1$	$D_2$	$\ell_1$	$\ell_2$	$\ell_3$	$\ell_4$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$r_2$	$r_3$	$F_1$		$F_2$	
													max	min	max	min
1.	200	300	250	300	300	250	50	40	35	5	3	2	3	1	9	2
2.	250	300	350	250	300	300	60	50	45	5	4	3	4	-2	15	1
3.	300	250	300	250	300	250	55	45	40	6	5	3	4	0	10	-1
4.	400	300	300	200	250	250	40	35	30	4	4	2	3	0.5	3	-2
5.	400	300	400	150	300	400	65	55	50	5	4	4	8	-4	16	2
6.	300	400	250	300	250	250	50	40	35	5	3	2	4.5	-2	-6.5	-0.5
7.	400	300	350	200	300	300	60	50	45	5	4	3	7.5	2.5	20	0
8.	400	200	300	150	300	300	55	45	40	6	5	3	3	0	15	-1
9.	300	400	400	300	300	400	40	35	30	4	4	2	2	-2	4	-1
10.	200	300	400	100	300	400	65	55	50	5	4	4	9	1	20	0

## Розрахункові схеми валів



### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. - 2003. - 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. - 2011. - 146 с.

## Тема 4. Теорії (гіпотези) міцності. Зріз і зминання.

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Які існують різновиди напруженого стану**

- А) статичний та динамічний
- Б) плоский, лінійний та об'ємний
- В) прикладений в точці та рівномірно розподілений
- Г) немає правильної відповіді

**Головні площини і головні напруження**

- А)  $\sigma_{\max}$  або  $\sigma_{\min}$ , ( $\tau \geq 0$ )
- Б)  $\sigma_{\max}$  або  $\sigma_{\min}$ , ( $\tau = 0$ )
- С)  $\sigma_{\max}$  або  $\sigma_{\min}$ , ( $\tau \leq 0$ )
- Г) немає правильної відповіді

**Під напруженим станом в певній точці розуміють**

- А) сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють у множині елементарних площадок, що проходять через точку
- Б) сукупність нормальних і дотичних напружень у будь-якому перерізі стрижня
- В) сукупність нормальних і дотичних напружень в поперечному перерізі стрижня
- Г) сукупність нормальних і дотичних напружень на будь-яких площинах що проходять через точку

**Головними перерізами називаються**

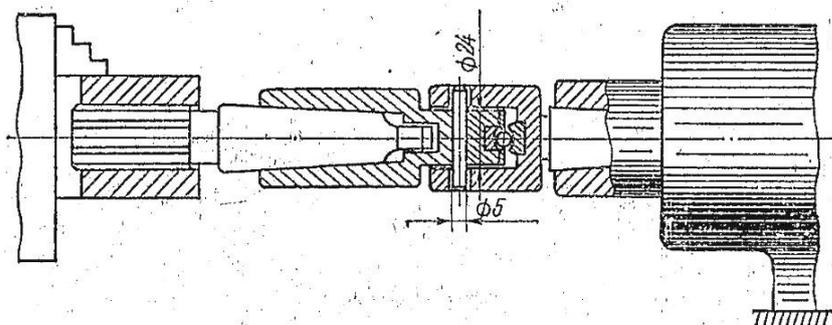
- А) перерізи, в яких діють екстремальні напруження;
- Б) перерізи, в яких напруження рівні нулю
- В) перерізи, в яких діють екстремальні дотичні напруження
- Г) перерізи, в яких діють екстремальні нормальні напруження

**Однією з гіпотез, що лежать в основі теорій міцності, є гіпотеза**

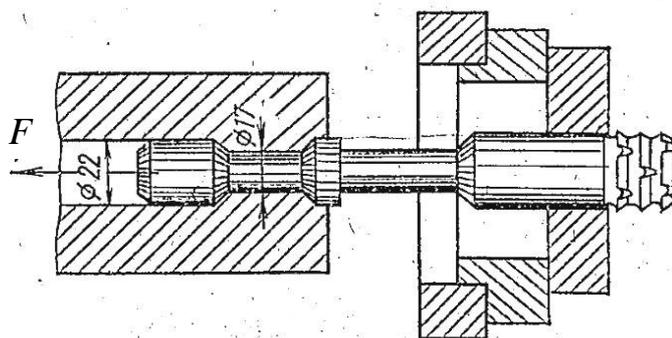
- А) причина руйнування всіх матеріалів одна й та сама
- Б) механізм руйнування всіх матеріалів однаковий
- В) умова руйнування в простому і складному напружених станах одна й та сама
- Г) один і той же матеріал в різних умовах руйнується по-різному

3. Задачі для самостійного розв'язування.

**Задача 1.** При остаточній операції розгортання застосовують плаваючий (шарнірний) патрон. Визначити напруження зрізу в перерізах штифта, якщо обертаючий момент, прикладений до патрона, дорівнює  $T=28$  Нм.



**Задача 2.** Перевірити міцність опорної площі замка хвостовика протяжки, якщо найбільше зусилля різання  $F = 75$  кН і допустиме напруження  $\sigma_{зм}=600$  МПа.



### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. - 2003. - 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. - 2011. - 146 с.

## Тема 5. Геометричні характеристики плоских перерізів.

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

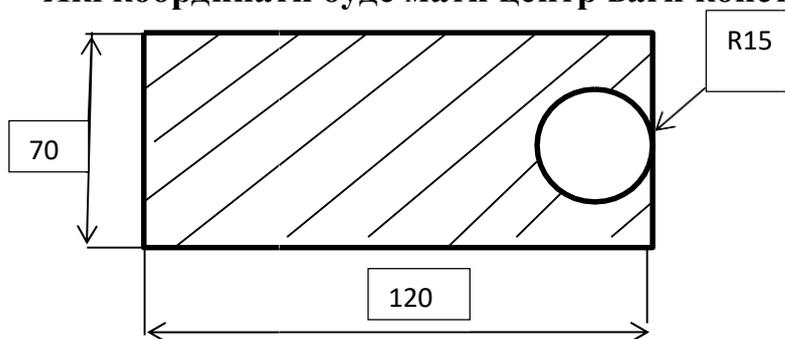
**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**До геометричних характеристик плоских перерізів НЕ відносять**

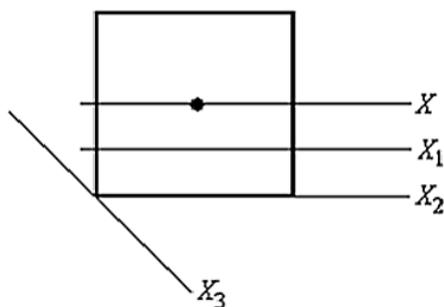
- А) статичний момент площі
- Б) осьові моменти інерції
- В) відцентрований момент інерції
- Г) нормальні напруження в перерізі

**Які координати буде мати центр ваги конструкції?**



- А) (5,9; 3,5)
- Б) (0; -0,35)
- В) (12; 7)
- Г) (0; 4,2)

**Для прямокутника статичний момент площі значення відносно осі**

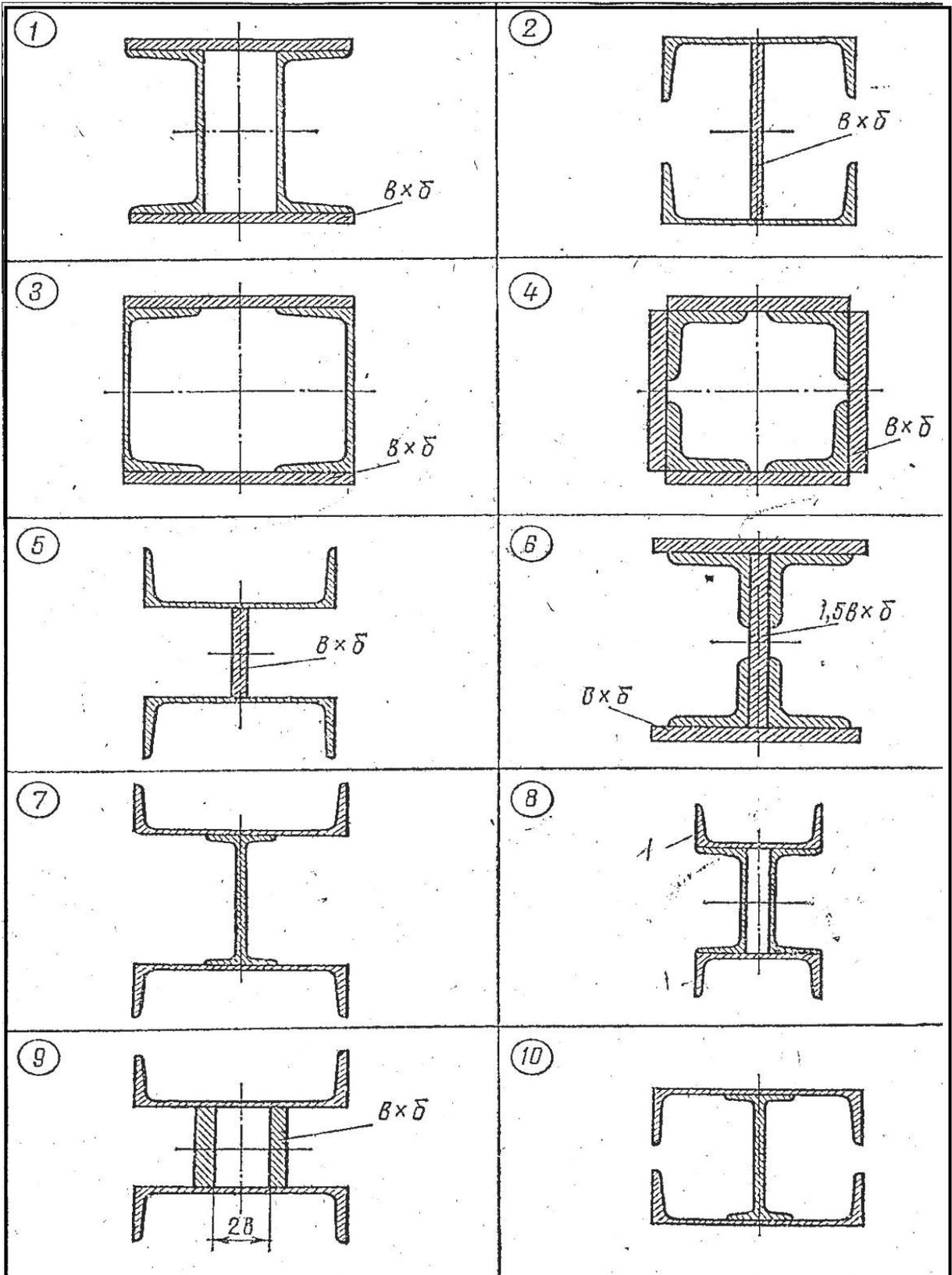


- А)  $X_1$
- Б)  $X$
- В)  $X_2$
- Г)  $X_3$

3. Задачі для самостійного розв'язування.

**Задача 1.** Обчислити головні моменти інерції перерізу. Дані для розв'язку наведені в таблиці.

Ва рі ант	Схема	$b \times \delta$	дво тавр	швелер ДСТУ 436-96	Куттик ДСТУ 2251-93	Ва рі ант	Схема	$b \times \delta$	дво тавр	швелер ДСТУ 436-96	Куттик ДСТУ 2251-93
1	1	160x16	–	14	–	16	6	–	20а	18а	–
2	2	200x18	–	16а	–	17	7	–	27	24	–
3	3	190x16	–	20	–	18	8	–	–	18	–
4	4	200x18	–	–	50x50x4	19	9	100x12	–	14	–
5	5	140x12	–	10	–	20	10	–	24а	18	–
6	6	–	12	14	–	21	1	240x24	–	24	–
7	7	–	24	20	–	22	2	250x22	–	22а	–
8	8	–	–	12	–	23	3	300x22	–	27	–
9	9	40x10	–	8	–	24	4	200x18	–	–	45x45x5
10	10	–	20	16	–	25	5	240x16	–	22	–
11	1	200x18	–	20	–	26	6	–	24а	24	–
12	2	220x20	–	18а	–	27	7	–	30	27	–
13	3	260x20	–	24а	–	28	8	–	–	22	–
14	4	220x10	–	–	56x56x5	29	9	140x14	–	20а	–
15	5	180x14	–	16	–	30	10	–	33	22	–



**Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. - 2003. - 158 с.

2.Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

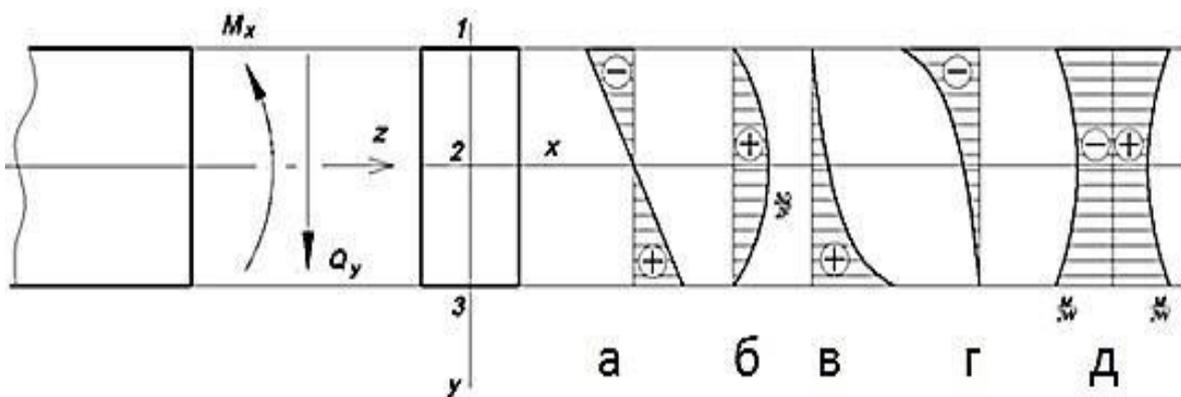
### Тема 6. Напружено-деформований стан стержнів

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

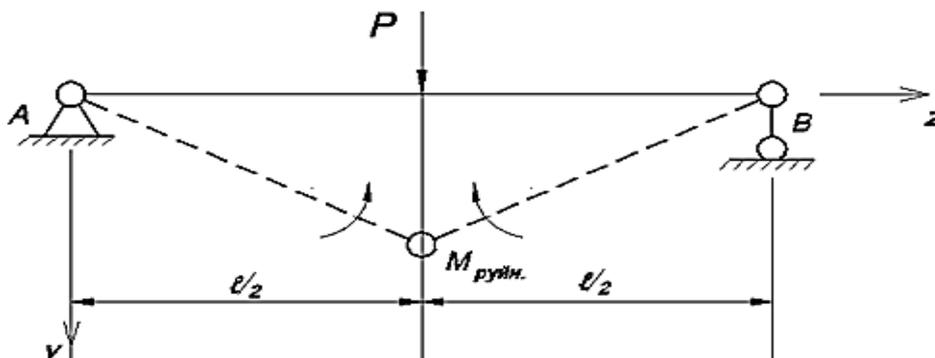
**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

Для прямокутного поперечного перерізу ешора дотичних напружень має вигляд

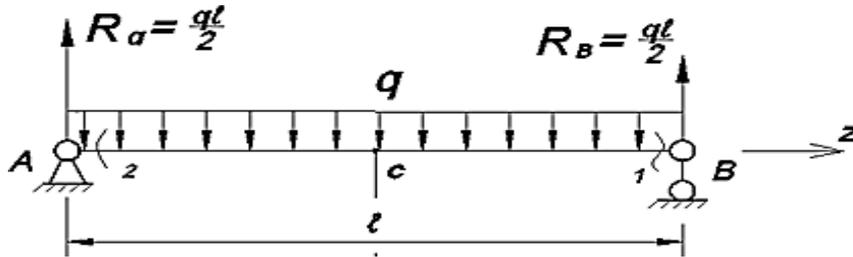


Найбільшого значення згинальний момент  $M_x$  досягне в точці дії сили



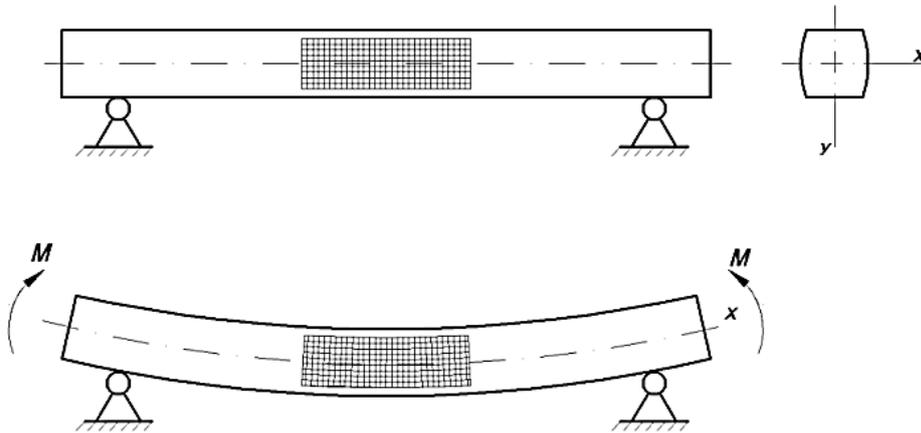
- А)  $R_a$
- Б)  $R_b$
- В)  $P$
- Г) немає правильної відповіді

Епюра згинального моменту  $Mx$  матиме вигляд



- А) параболи
- Б) лінійний
- В) синусоїди
- Г) немає правильної відповіді

На рисунку зображений випадок



- А) чистого згину
- Б) плоского згину
- В) поперечного згину
- Г) косоного згину

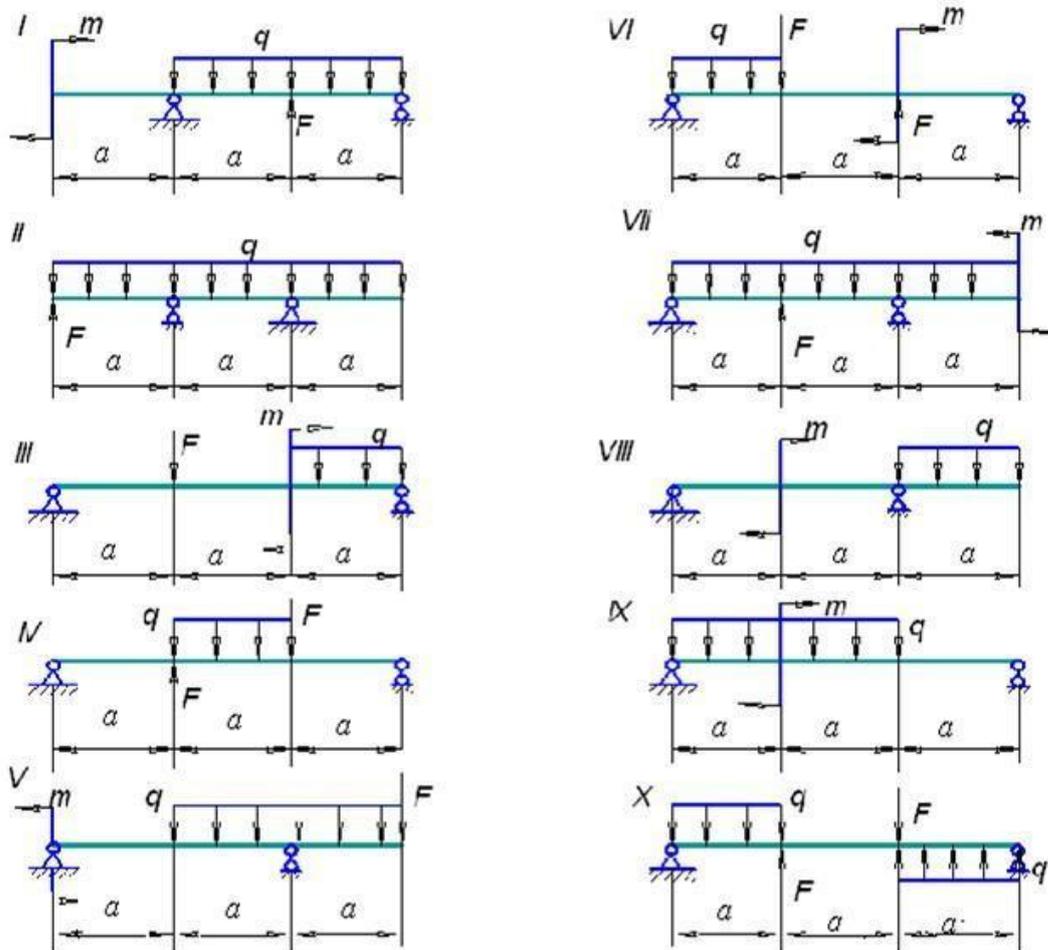
3. Задачі для самостійного розв'язування.

**Задача 1.** Визначити прогин вільного кінця балки будь-яким методом.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	a, м
1	10	5	7	2
2	20	10	8	1
3	30	2	12	3
4	40	3	14	2
5	15	4	10	5

6	25	7	9	4
7	35	8	13	3
8	5	12	14	4
9	45	4	17	2
10	10	7	9	1

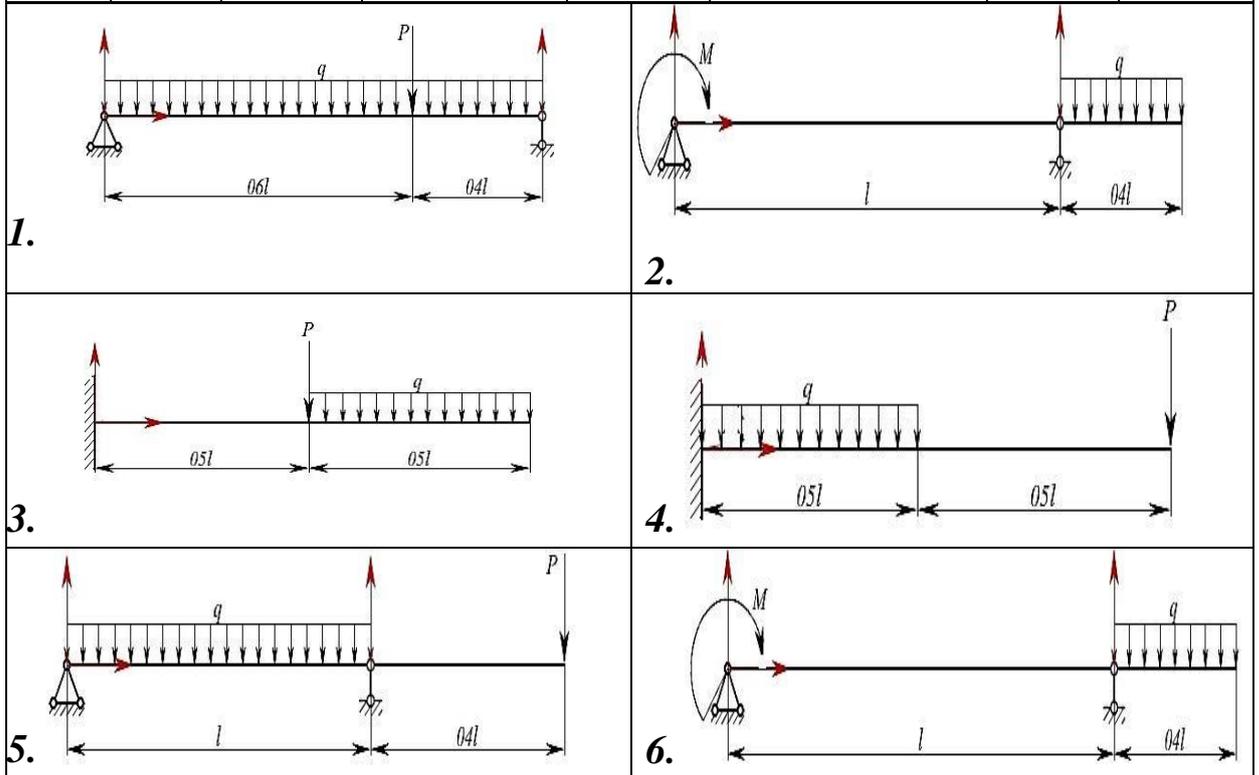


**Задача 2.** Виконати аналіз напруженого стану та повний розрахунок на міцність. Визначити переміщення та провести розрахунок на жорсткість при поперечному згинанні.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№ Вар.	№ Сх.	№ Рядка	Довжина, l (м)	P, МН	Навантаження q, МН/м	M, МН·м	1:(f/l)
1	1	1	3,0	0,010	0,005	0,004	1:500
2	2	2	3,2	0,011	0,006	0,005	1:520
3	3	3	3,4	0,012	0,007	0,006	1:540
4	4	4	3,6	0,013	0,008	0,007	1:560
5	5	5	3,8	0,014	0,009	0,008	1:580
6	6	1	4,0	0,015	0,010	0,009	1:600

7	7	2	4,2	0,016	0,011	0,010	1:620
8	8	3	4,4	0,017	0,012	0,011	1:640
9	9	4	4,6	0,018	0,013	0,012	1:660
10	0	5	4,8	0,019	0,014	0,013	1:680



### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### Тема 7. Кручення

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Задачі для самостійного розв'язування.

**Задача 1.** Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою  $Q$  в точці А і горизонтальною силою в точці В (обидві точки розташовані на осі балки).

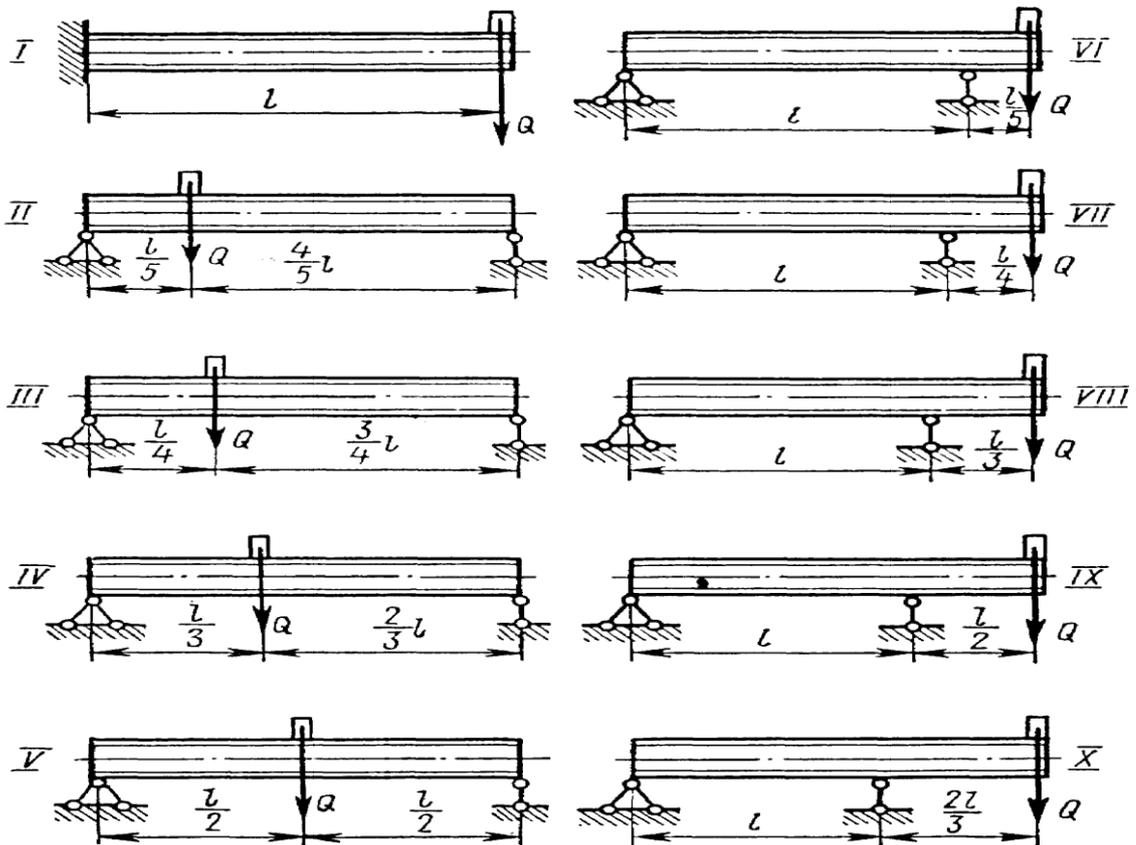
На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, напрямлені перпендикулярно до площини рисунку.

Необхідно:

1. побудувати епюри  $M_{\text{верт}}$  і  $M_{\text{гор}}$  і встановити положення небезпечного перерізу;
2. підібрати розміри поперечного перерізу  $h$  і  $b$  за допустимими напруженнями;
3. визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	$[\sigma]$ , МПа	$Q$ , кН	$L$ , м	$h/b$
1	12	8	1,2	1,2
2	10	9	1,5	1,5
3	11	5	1,8	1,8
4	9	3	1,3	1,3
5	9	5	1,4	1,4
6	8	2	1,9	1,9
7	12	1	1,0	1,0
8	11	8	1,1	1,1
9	8	9	1,5	1,5
10	8	5	1,3	1,3

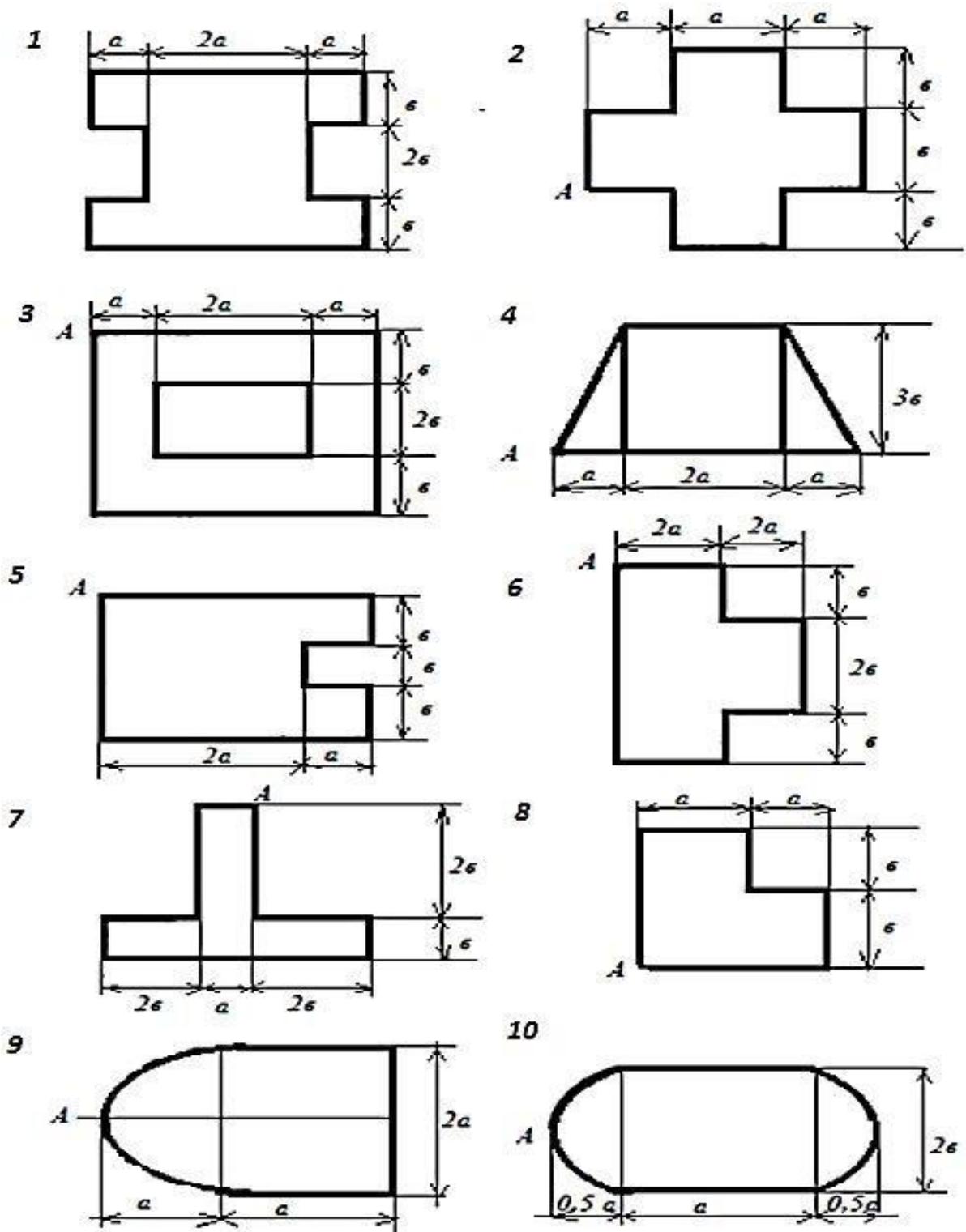


**Задача 2.** Чавунний короткий стрижень, стискається поздовжньою силою  $P$ , прикладеною в точці  $A$ . Необхідно:

- 1) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через  $P$  і розміри перерізу.
- 2) Знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання  $[\sigma]_{ст}$  і  $[\sigma]_{р}$ .

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	а, см	в, см	$[\sigma]_{ст}$	$[\sigma]_{р}$
1	5	6	120	30
2	3	5	130	45
3	5	7	100	22
4	7	8	160	27
5	8	8	60	23
6	5	9	90	25
7	7	6	80	28
8	6	4	100	30
9	5	8	70	46
10	9	4	100	23



### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. - 2003. - 158 с.

2.Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### Тема 8. Згин прямих стержнів

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Задачі для самостійного розв'язання.

**Задача 1.** Перевірити на стійкість стержень довжиною  $l = 60$  см з діаметром поперечного перетину  $d = 2$  см, один кінець якого шарнірно обіпертий, а інший кінець зацмелений. Величина стискувальної сили  $P = 40$  кН. Матеріал сталь 25,  $[\sigma] = 180$  МПа.

**Задача 2.** Перевірити на міцність і стійкість сосновий стояк, ослаблений отворами,  $[\sigma] = 10$  МПа (рисунок 1).

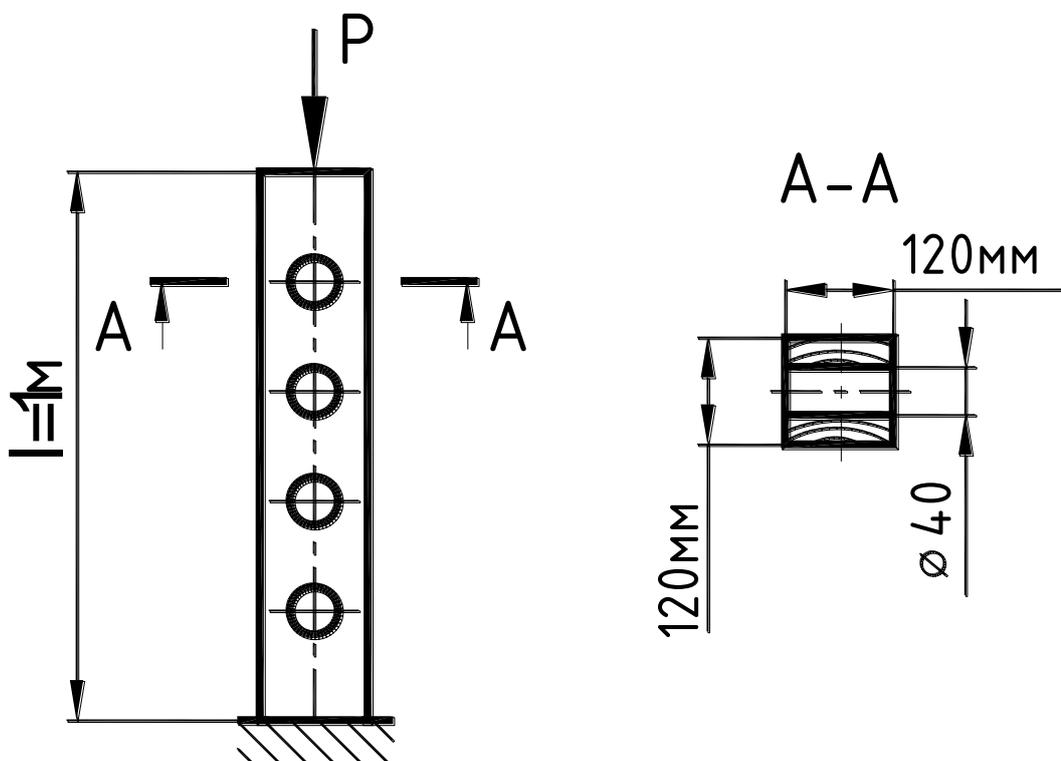


Рисунок 1. – Умова до задачі 2

**Задача 3.** Визначити розмір  $a$  (рисунок 2), який забезпечує рівностійкість стояка в головних площинах інерції. Визначити для такого стояка допустиму величину стискувальної сили. Поперечний перетин стояка складений з двох швелерів № 20 (додаток Д). Матеріал – сталь Ст.3,  $[\sigma]=160\text{МПа}$ .

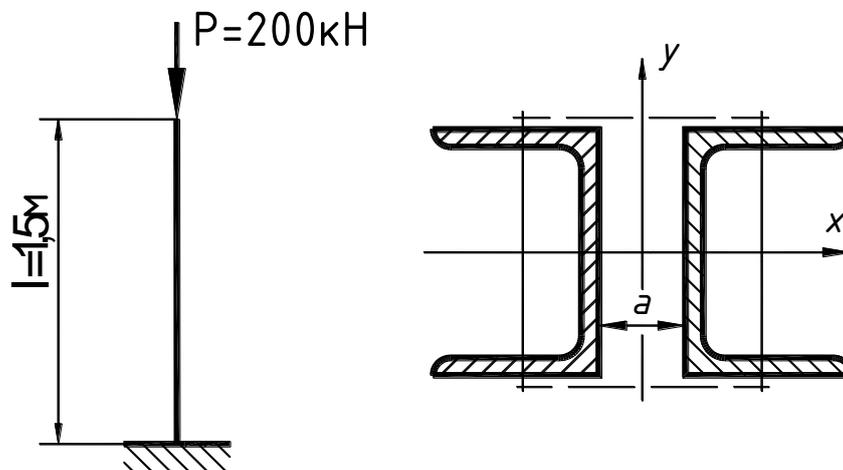


Рисунок 2. – Умова до задачі 3

**Задача 4.** Стержень прямокутного поперечного перетину стиснутий силами  $P$  (рисунок 3, а). Визначити розміри його перетину. Стержень повинен бути рівностійким в головних площинах інерції. Розрахункова схема приведена на рисунку 5, б. Матеріал – сталь Ст.3,  $[\sigma]=160\text{МПа}$ .

*Відповідь:*  $b = 53,2\text{ мм}$ ,  $h = 106,4\text{ мм}$ .

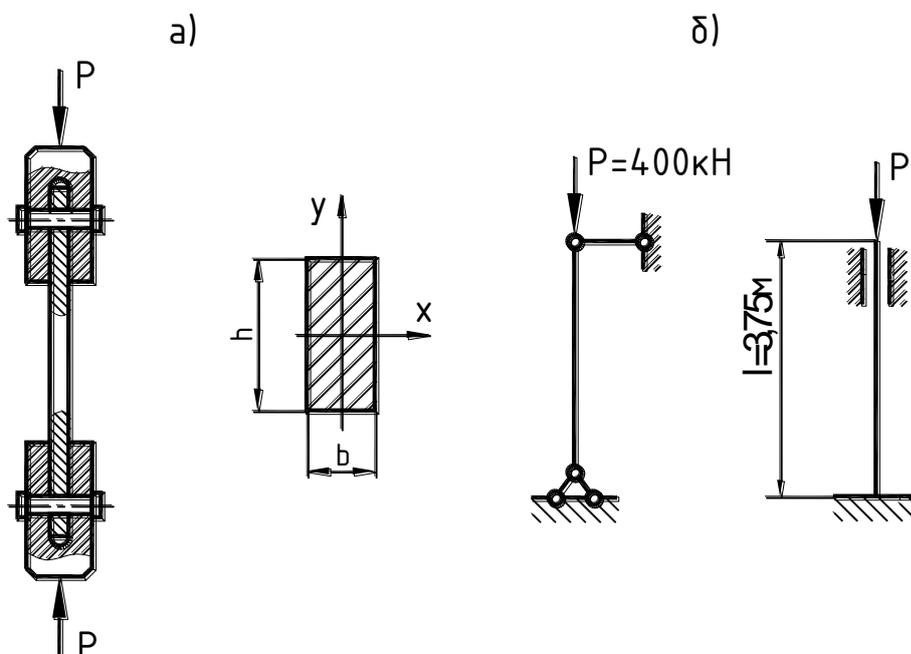


Рисунок 3 – Умова до задачі 4

### **Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

## **Змістовий модуль 2. Складний напружений стан та динамічні навантаження**

### **Тема 9. Складний опір.**

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

#### **Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Завдання для самостійного розв'язання.

**Задача 1.** Розрахунок вала редуктора на міцність. На вал насаджені зубчасті прямозубі колеса. До коліс прикладені колові сили  $F_{t1}$ ,  $F_{t2}$ ,  $F_{t3}$ .

Необхідно:

а) з умови рівноваги визначити величину  $F_{t1}$  або  $F_{t3}$ ;

б) побудувати епюри крутних моментів;

в) визначити сили, які згинають вал в горизонтальній і вертикальній площинах  $F_t$  і  $F_r$  ( $F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ), де  $F_r$  – радіальна сила;  $\alpha$  – нормальний кут зачеплення,  $\alpha = 20^\circ$ ;

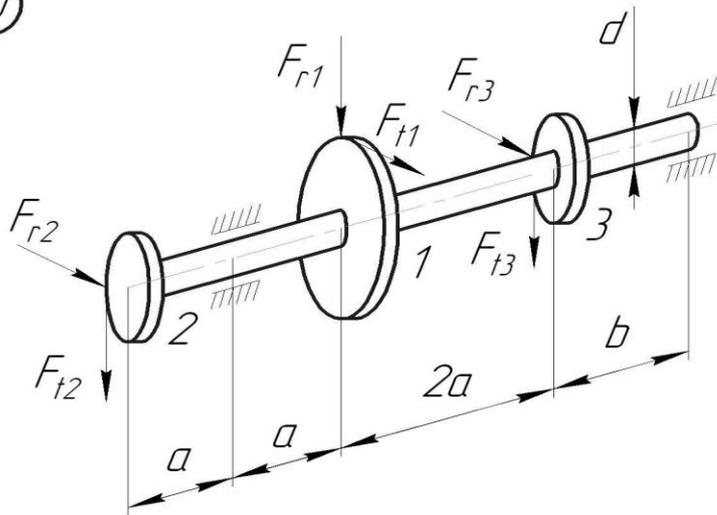
г) побудувати епюру сумарних згинальних моментів;

д) підібрати діаметр вала за третьою теорією міцності.

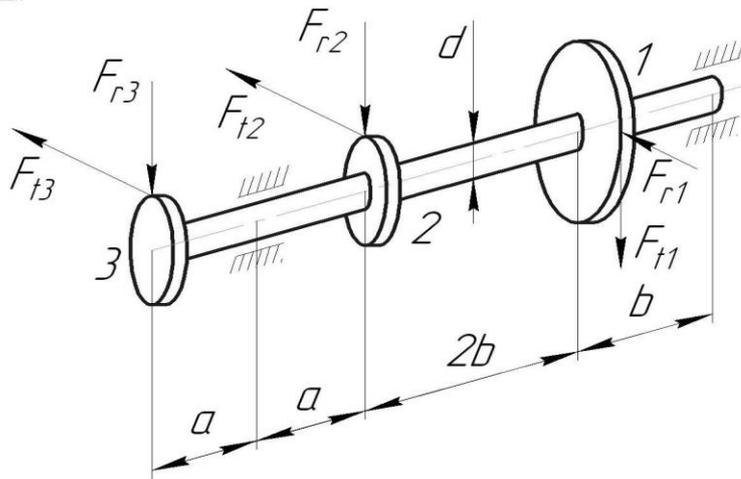
Дані для розв'язання задач взяти у таблиці 9.1.

№ варіанта	$F_{t1}$ кН	$F_{t2}$ кН	$F_{t3}$ кН	$[\sigma]$ , МПа	$a$ , м	$b$ , м	Ділильні діаметри зубчастих коліс, м		
							$d_1$	$d_2$	$d_3$
1	-	6,0	6,0	120	0,08	0,10	0,12	0,10	0,08
2	5,5	6,5	-	120	0,10	0,08	0,09	0,11	0,15
3	-	7,0	6,5	140	0,09	0,12	0,18	0,12	0,09
4	6,0	7,5	-	140	0,11	0,13	0,10	0,14	0,18
5	-	8,0	7,0	160	0,13	0,14	0,18	0,15	0,10
6	6,5	6,0	-	120	0,12	0,09	0,08	0,11	0,16
7	-	6,5	7,5	140	0,14	0,12	0,14	0,12	0,09
8	7,0	7,0	-	140	0,12	0,14	0,08	0,13	0,16
9	-	7,5	8,0	160	0,15	0,16	0,16	0,14	0,12
10	7,5	8,0	-	160	0,10	0,14	0,11	0,15	0,20

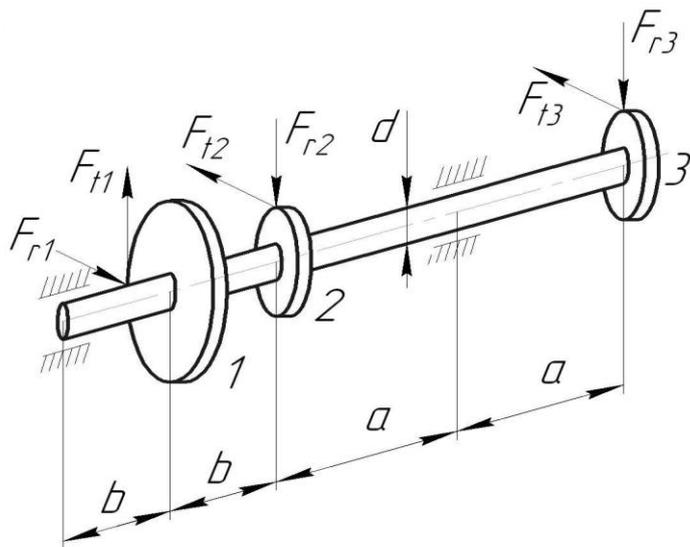
00



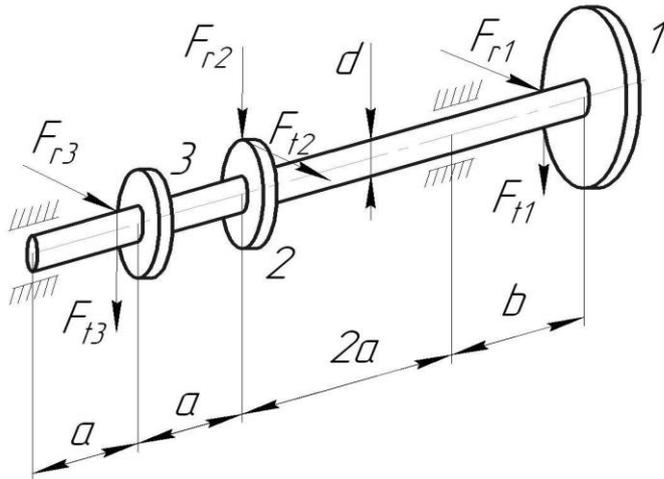
01



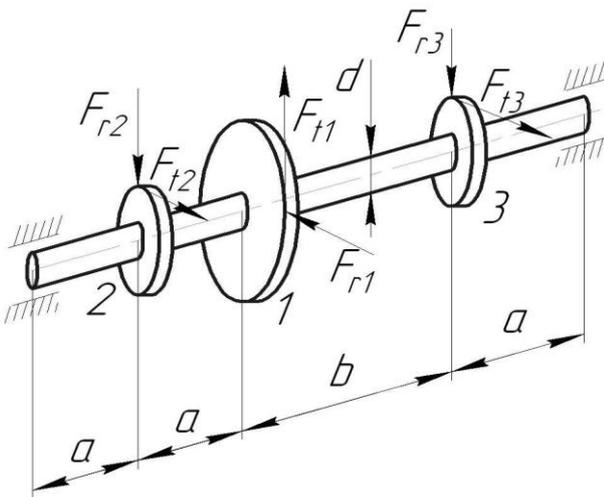
02



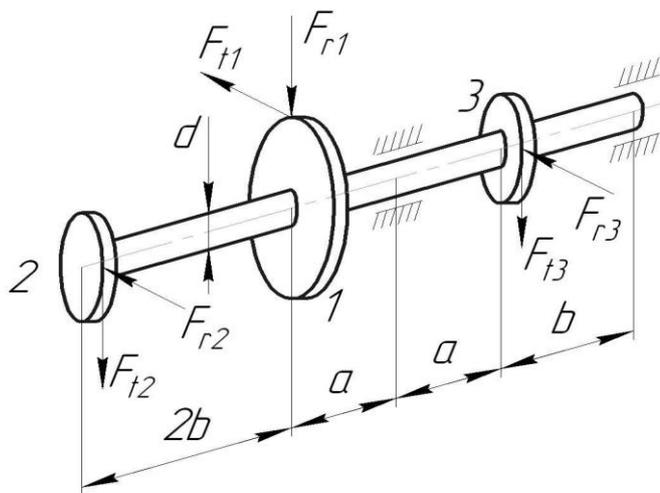
03



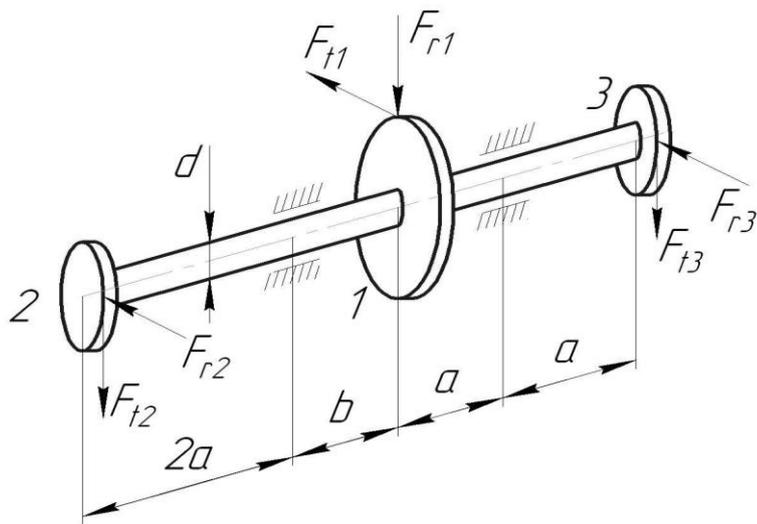
04



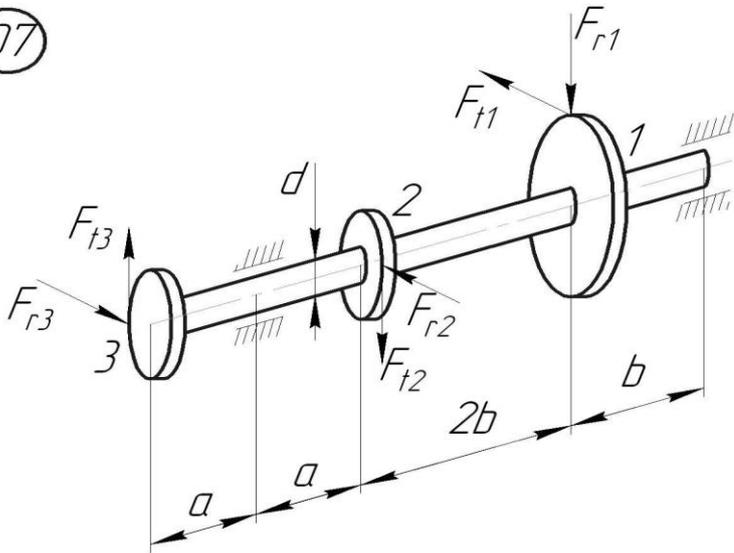
05



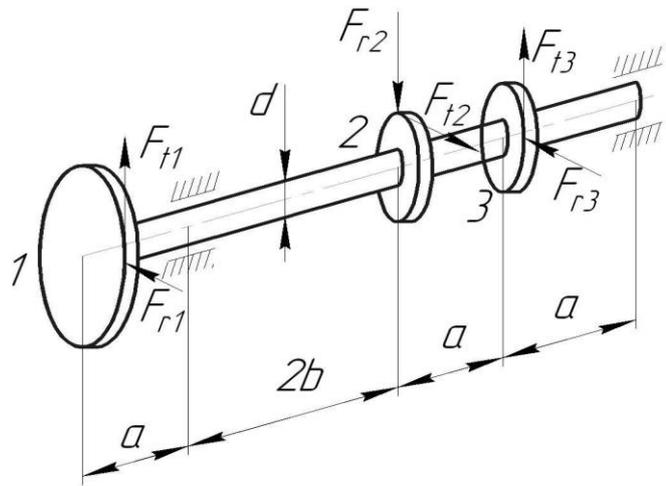
06



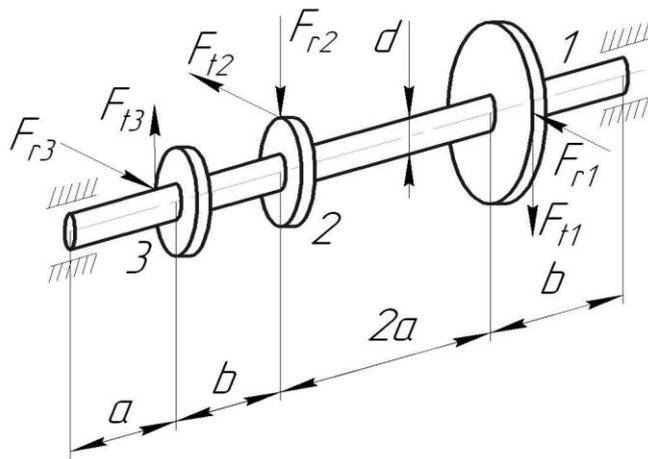
07



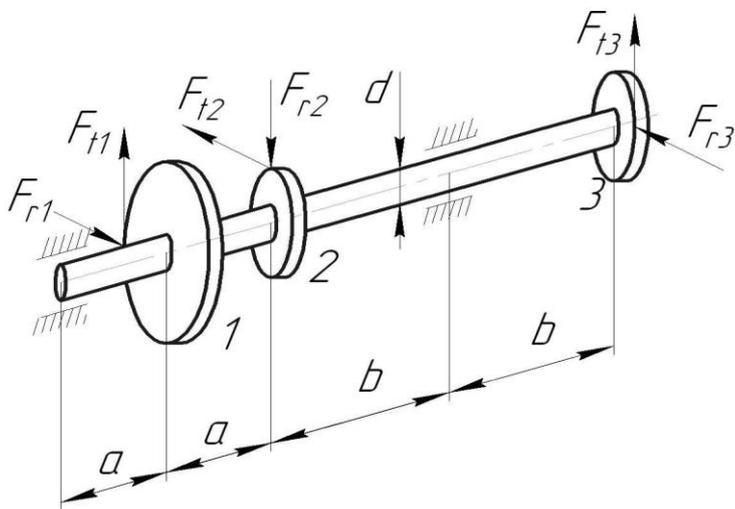
08



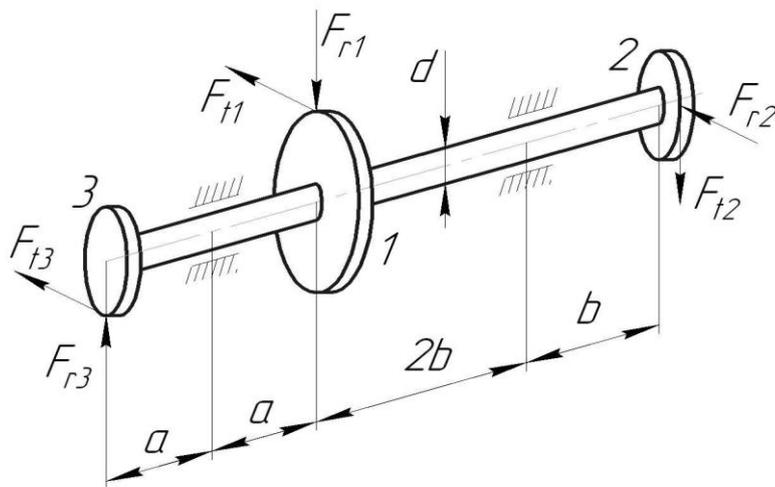
09



10



11



### **Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### **Тема 10. Динамічні навантаження**

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

#### **Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

#### **Ознакою динамічних навантажень**

А) незалежність величини від часу

Б) значне збільшення деформацій і переміщень системи в порівнянні зі статичними навантаженнями

В) зміна напрямку реакцій опор у порівнянні зі статичними навантаженнями

Г) немає правильної відповіді

#### **До задач динаміки опору матеріалів відносяться**

А) розрахунки на повзучість

Б) розрахунки на дію ударного навантаження

В) розрахунки на пластичність

Г) розрахунки на стійкість

#### **На якому принципі заснований загальний метод розрахунку на міцність при динамічних навантаженнях**

А) на принципі суперпозиції

Б) на принципі Даламбера

В) на принципі Ейлера

Г) немає правильної відповіді

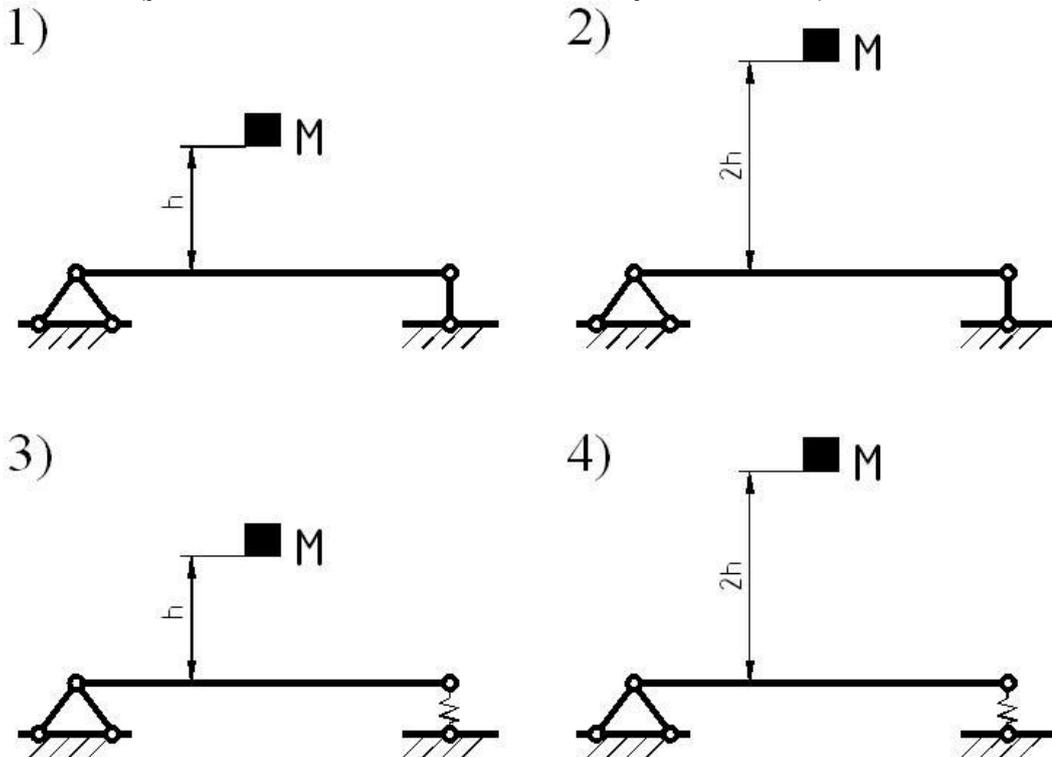
**Ознакою ударного навантаження є**

- А) постійна величина і напрямок
- Б) стрибкоподібна зміна напрямку навантаження
- В) стрибкоподібна зміна швидкості взаємодії тіл, що співударяються
- Г) поступова зміна напрямку навантаження

**Динамічний коефіцієнт показує**

- А) у скільки разів динамічні напруження і переміщення більше статичних
- Б) у скільки разів динамічні навантаження більше статичних
- В) швидкість зміни напрямку динамічних навантажень
- Г) швидкість зміни величини динамічних навантажень

**Яка схема відповідає найменшому значенню коефіцієнта динамічності (у всіх випадках маса вантажу однакова)**



**Яка міра сприяє зниженню динамічних напружень при ударі**

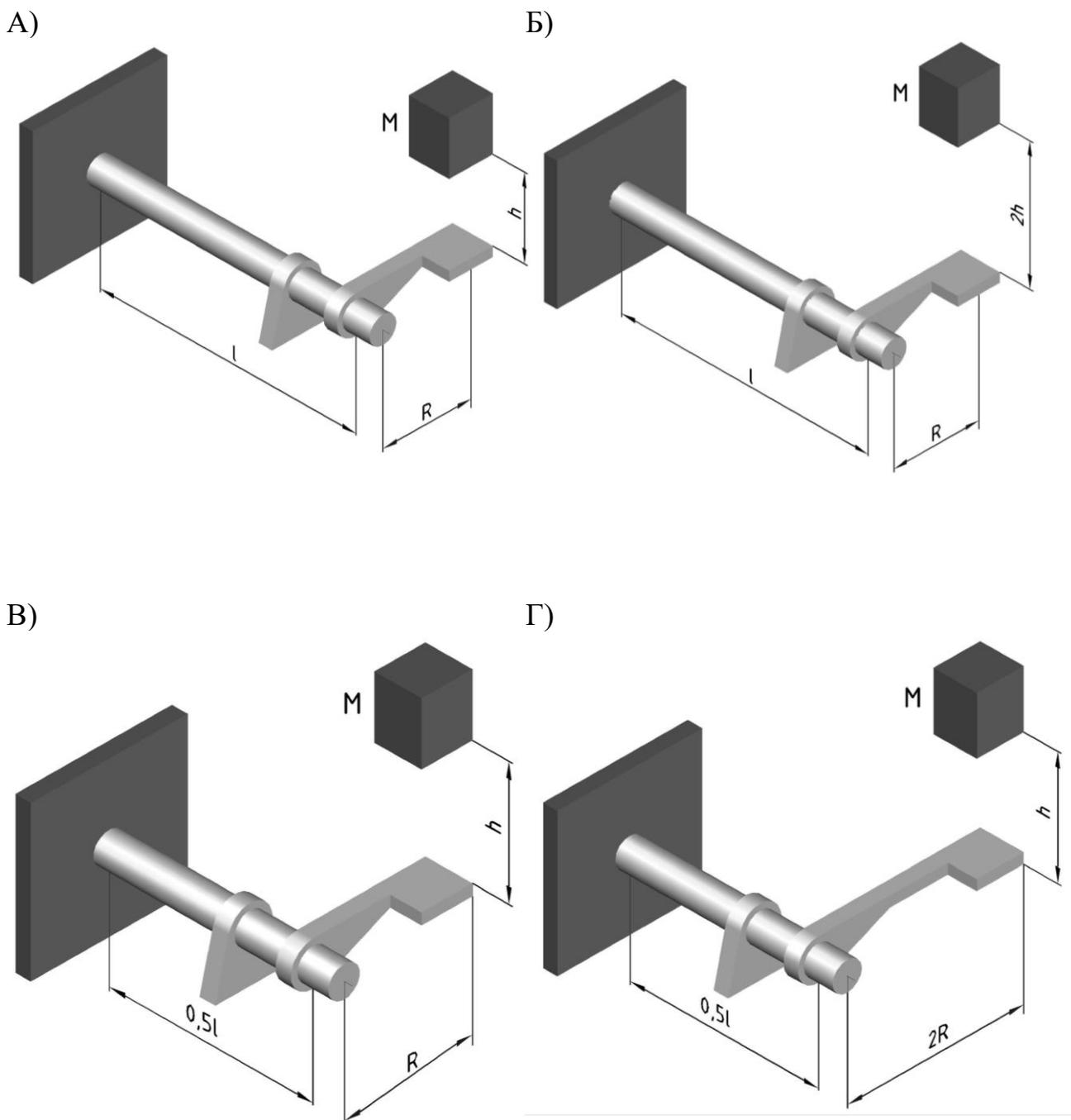
- А) збільшення ударного навантаження
- Б) застосування матеріалів з великою ударною в'язкістю
- В) збільшення жорсткості системи
- Г) зменшення маси системи

**Явище скручувального удару у машинобудуванні виникає**

- А) при обертанні неврівноважених мас
- Б) при падінні мас на обертові вали

- В) при гальмуванні швидкообертювх валів
- Г) при передачі обертового руху на великі відстані

**Яка схема відповідає найменшому коефіцієнту динамічності при скручувальному ударі**



3. Завдання для самостійного розв'язання.

**Задача 1.** На сталеву балку двотаврового поперечного перетину (№ 24а) з висоти  $h=10$  мм посередині прольоту падає вантаж масою  $M=100$  кг (рисунок 1). Зпівставити найбільші статичні і динамічні напруження в поперечному перетині балки і прогин під вантажем для випадків згину балки

в площині найбільшої і найменшої жорсткості.

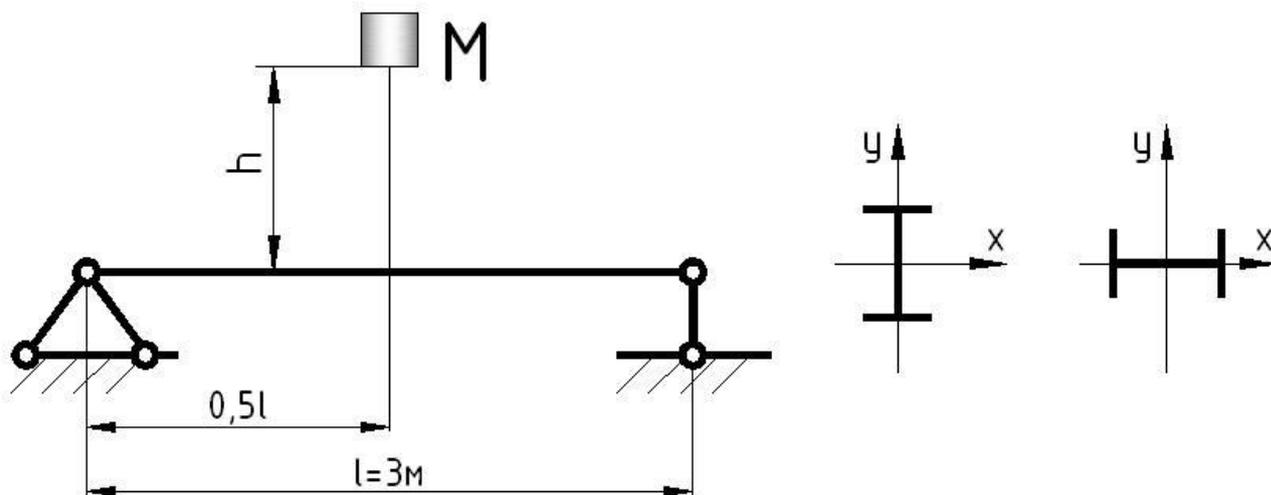


Рисунок 1 – Графічна умова до задачі 1

**Задача 2.** На канаті діаметром  $d=15$  мм з коефіцієнтом заповнення  $k_o=0,8$  і довжиною  $l=100$  м за допомогою пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c=5 \cdot 10^5$  Н/м закріплений вантаж вагою  $G=5$  кН (рисунок 2, а). Вантаж опускається з постійною швидкістю  $v$ . Визначити допустиму швидкість переміщення вантажу з умови аварійного затискання каната у верхньому перетині, якщо допустиме напруження  $[\sigma]=100$  МПа, модуль пружності матеріалу каната  $E=1,4 \cdot 10^5$  МПа.

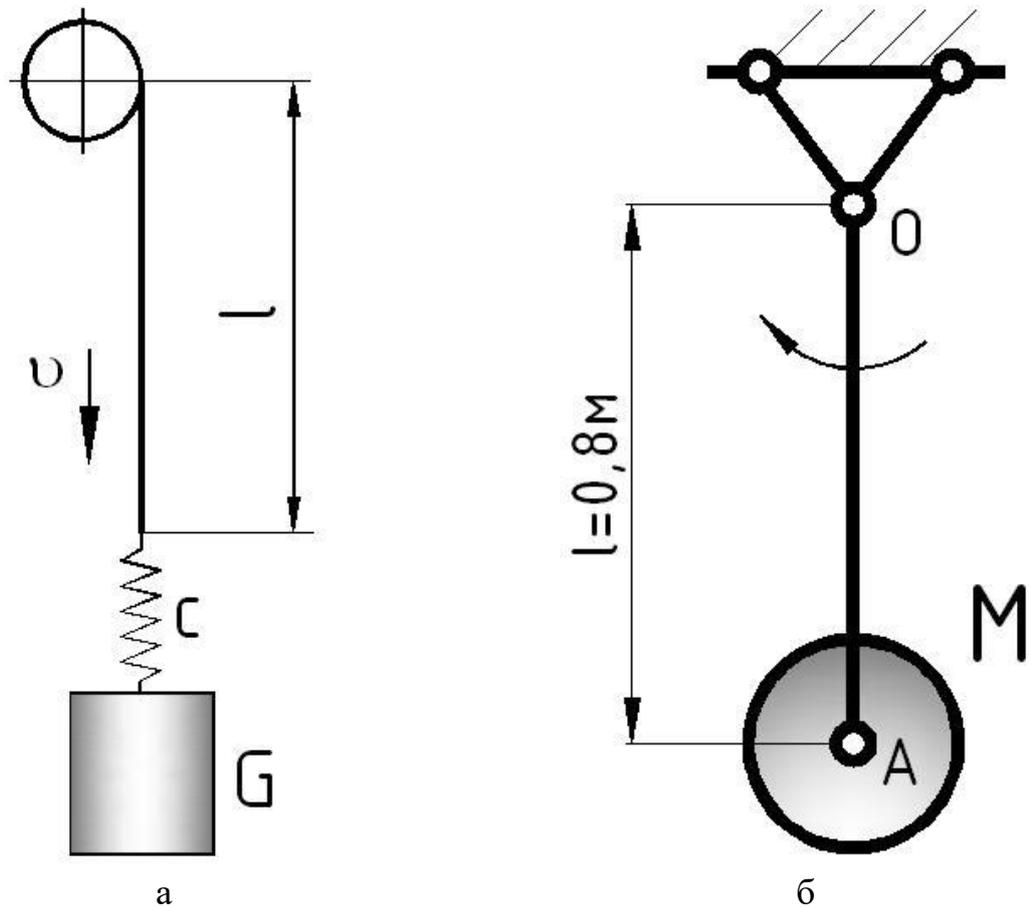


Рисунок 2. – Графічні умови до задач 2 і 3

**Задача 3.** Сталевий круглий дріт діаметром  $d=2$  мм, що рівномірно обертається навколо горизонтальної осі, перпендикулярної до площини креслення в точці  $O$ , несе на кінці  $A$  вантаж масою  $M=2$  кг (рисунок 2, б). Визначити частоту обертання дроту, при якому відбудеться його руйнування, якщо границя міцності матеріалу дроту  $\sigma_{мц}=785$  МПа.

**Задача 4.** До круглого сталевого стержня  $AB$  діаметром  $d=30$  мм посередині прольоту жорстко прикріплений круглий сталевий стержень  $CD$  діаметром  $d_1=20$  мм (рисунок 3). Стержень  $AB$  разом із стержнем  $CD$  обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю  $\omega=30$  рад/с. Визначити найбільші нормальні напруження в обох стержнях.

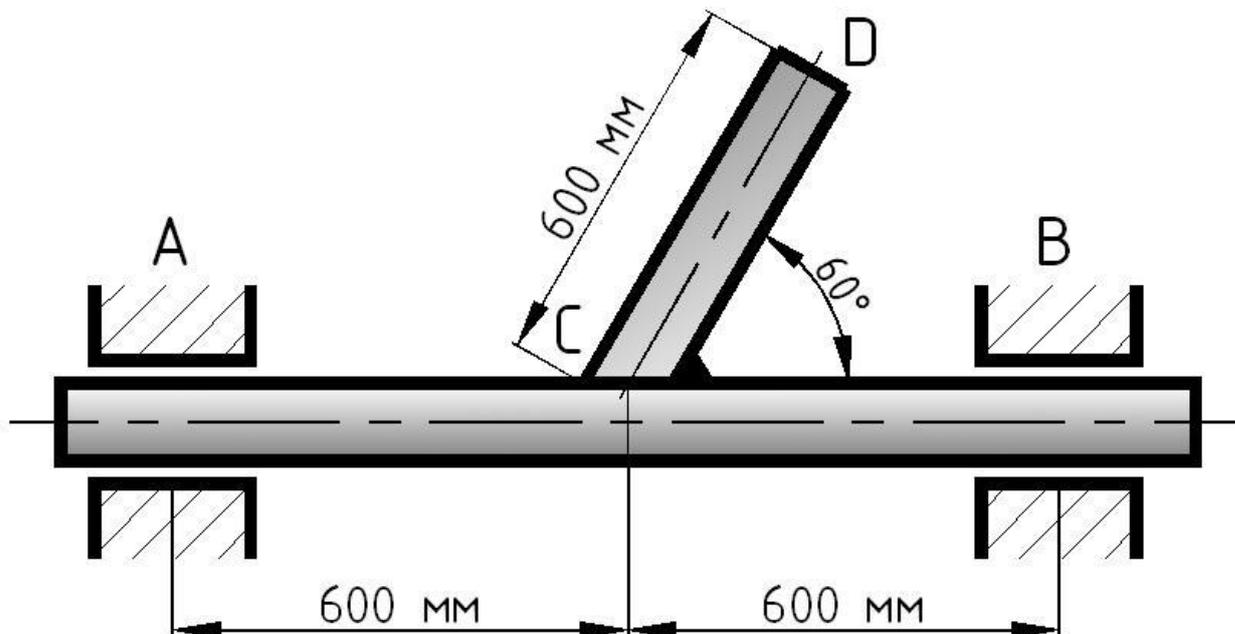


Рисунок 3. - Графічні умови до задач 4.

**Задача 5.** Суцільний сталевий диск постійної товщини і діаметром  $d=800$  мм рівномірно обертається з частотою обертання  $n=3000$  об/мин. Визначити найбільше нормальне напруження в диску.

**Задача 6.** На двотаврову балку № 18 падає вантаж масою  $M=600$  кг (рисунок 4). Швидкість вантажу в момент удару  $v=59$  м/с. Визначити найбільше нормальне напруження і найбільший прогин балки.

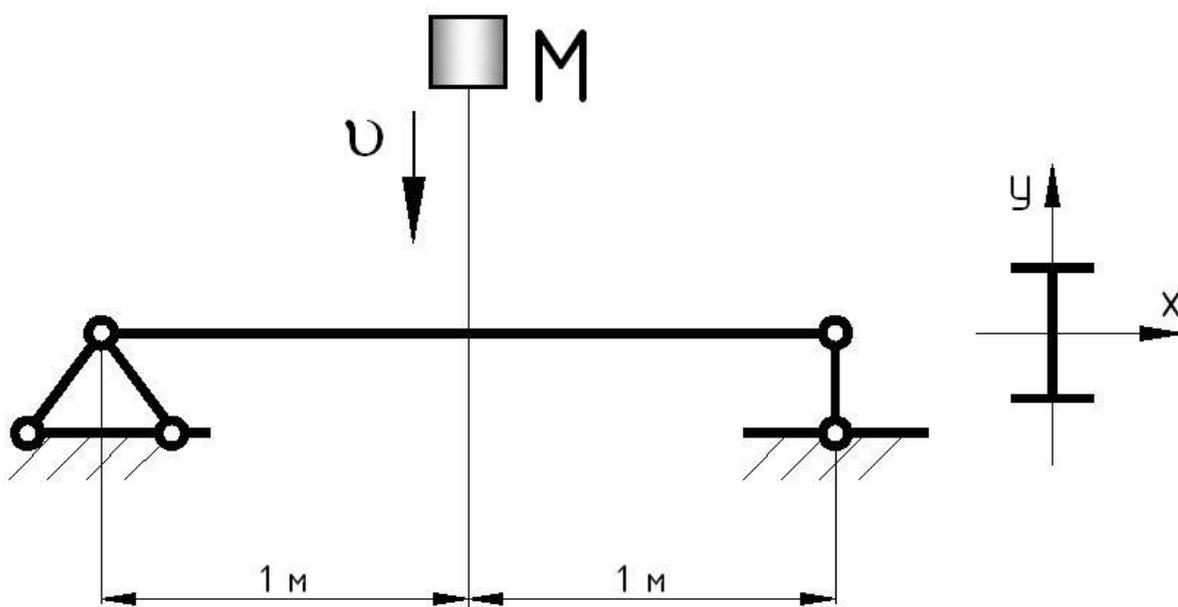


Рисунок 4.- Графічна умова до задачі 6

### **Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### **Тема 11. Стійкість стиснутих стержнів**

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

#### **Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

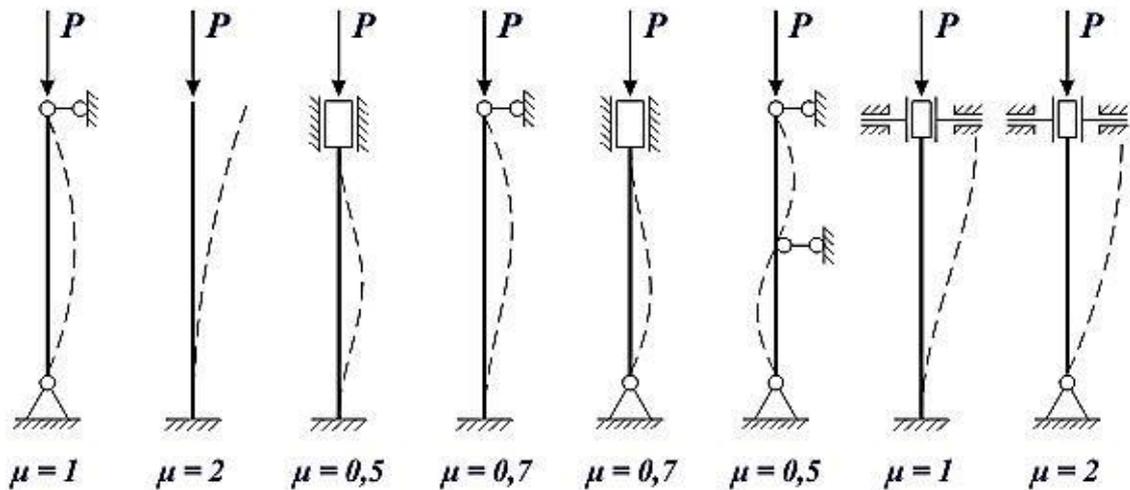
2. Завдання для самостійного розв'язання.

**Задача 1.** Для стрижня із заданою довжиною, опорними закріпленнями і типом поперечного перерізу необхідно:

1) із умови стійкості стержня підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 допустиме напруження  $[\sigma] = 160$  МПа;

2) із умови стійкості окремих гілок стержня визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$



### Варіанти завдань для самостійного виконання

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, кН	700	300	400	560	670	450	600	340	590	650
L, м	9	8	10	6	7	8	5	4	7	9

### Рекомендована література:

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

### Тема 12. Розрахунок циліндричних судин.

**Форми контролю:** опитування, перевірка задач.

### Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Задачі для самостійного розв'язання.

**Задача 1.** Визначити допустиме значення кутової швидкості циліндричної частини ротора центрифуги, якщо внутрішній діаметр ротора 1200 мм, діаметр завантажувального отвору 840 мм, довжина обичайки 900 мм, виконавча товщина стінки 14 мм, густина середовища в апараті 1500 кг/м<sup>3</sup>, густина матеріалу апарату 7850 кг/м<sup>3</sup>, допустиме напруження 120 МПа,  $\varphi = 0,9$ .

**Задача 2.** Розрахувати реакцію опор циліндричного барабану барабанної сушарки, що опирається на два бандажі, якщо довжина барабану 10000 мм, діаметр барабану 1200 мм, відстань між опорами 8200 мм, відстань від опори до вінцевої шестерні 2050 мм, відстань від опори до краю барабану 900 мм, маса матеріалу в сушарці 4200 кг, навантаження на барабан від вінцевої шестерні 7500 Н.

**Задача 3.** Визначити допустиме значення кутової швидкості конічної частини ротора центрифуги, якщо внутрішній діаметр ротора 1000 мм, діаметр завантажувального отвору 800 мм, довжина обичайки 600 мм, подвійний кут конусності 60° виконавча товщина стінки 10 мм, густина середовища в апараті 1600 кг/м<sup>3</sup>, густина матеріалу апарату 7850 кг/м<sup>3</sup>, допустиме напруження 120 МПа,  $\varphi = 0,9$ .

**Задача 4.** Розрахувати реакцію опор циліндричного барабану барабанної сушарки, що опирається на два бандажі, якщо довжина барабану 8000 мм, діаметр барабану 1000 мм, відстань між опорами 6500 мм, відстань від опори до вінцевої шестерні 1900 мм, відстань від опори до краю барабану 750 мм, маса матеріалу в сушарці 3800 кг, навантаження на барабан від вінцевої шестерні 6800 Н.

#### **Рекомендована література:**

1. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 1: Навч. посібник/ В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. - Вінниця: ВНТУ. – 2003. – 158 с.

2.Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Ч. 2: Навч. посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, І. Ю. Кириця. - Вінниця: ВНТУ. – 2011. – 146 с.

Навчальне видання

*Мельник Ольга Євгенівна*

*Цвіркун Люмила Олександрівна*

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ  
«ОПР МАТЕРІАЛІВ»**

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет  
економіки і торгівлі  
імені Михайла Туган-Барановського  
50042, Дніпропетровська обл.,  
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої  
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.