МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Г.В. Дейниченко, Л.О. Цвіркун, О.В. Омельченко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Кривий Ріг
2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Г.В. Дейниченко, Л.О. Цвіркун, О.В. Омельченко

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Затверджено на засіданні
кафедри загальноінженерних
дисциплін та обладнання
Протокол № 13
від «09» квітня 2021 р.

Рекомендовано навчально-
методичною радою ДонНУЕТ
Протокол №8
від «29» квітня 2021 р.

Кривий Ріг
2021

УДК 531/534.01(076)
Д27
Ц 67
О 46

Рекомендовано до видання Вченою радою Донецького національного університету економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського (протокол № 8_ від 29.04.2021 р.).

Рецензенти:

Хорольський В. П., д.т.н., професор кафедри загальноінженерних дисциплін та обладнання Донецького національного університету економіки та торгівлі ім. М. Туган-Барановського.

Погребняк А. В., доцент, д.т.н., професор кафедри транспортних технологій та міжнародної логістики, Університету митної справи та фінансів.

Дейниченко Г.В., Цвіркун Л.О., Омельченко О.В.

Д27 Дейниченко Г.В., Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка : навч. посіб. Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2021. 107 с.

Навчальний посібник призначений для студентів всіх форм навчання у процесі вивчення дисципліни «Теоретична механіка», а саме розділу «Статика твердого тіла». Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв’язування задач, задачі для самостійного розв’язування, які можна використовувати, як завдання для контрольних робіт. Наявність контрольних запитань із кожної теми надає студентам змогу самостійного контролю рівня засвоєння навчального матеріалу. Наведено список рекомендованої літератури.

УДК 531/534.01(076)
© Дейниченко Г.В., Цвіркун Л.О.,
Омельченко О.В., 2021

ЗМІСТ

ВСТУП……..4

1. СИЛИ ТА ОПЕРАЦІЇ З СИЛАМИ…….....5
1.1. Класифікація систем сил…….5
1.2. Деякі аксіоми статики……..7
1.3. Геометричне додавання та розкладання сил……9
1.4. Проектування сил на вісь та на площину.
Аналітичне додавання сил……....20
Приклади розв’язування задач

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ СТАТИКИ……..21
2.1. Основні задачі статики……...21
2.2. Деякі визначення……22
2.3. Основні аксіоми статики……22
2.4. В'язі та їх реакції……23
2.5. Момент сили……27
Приклади розв’язування задач

3. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ…….....41
3.1. Пара сил. Момент пари……..41
3.2. Теорема про моменти сил пари……42
3.3. Теорема про еквівалентність пар, що лежать в одній площині…….44
3.4. Теорема про еквівалентність пар у просторі……...45
3.5. Додавання пар сил……..45
3.6. Умови рівноваги пар в площині та в просторі……46
3.7. Лемма про паралельне перенесення сили……47
Приклади розв’язування задач

4. УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМ СИЛ…….…53
4.1. Зведення довільної системи сил до даного центра……55
4.2. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту..56
4.3. Випадки зведення просторової системи сил до даного центра…….57
4.4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил……58
4.5. Окремі випадки рівноваги системи сил……...60
4.6. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої відносно осі……64
Приклади розв’язування задач

5. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ…….……71
5.1. Рівновага системи тіл……71
5.2. Приклади розв'язання задач……..73

6. ТЕРТЯ……..84
6.1. Закони тертя ковзання Кулона……..84
6.2. Реакція шорсткої в'язі. Кут та конус тертя……..86
6.3. Тертя кочення……88
6.4. Приклади розв'язування задач……..89

7. ЦЕНТР ВАГИ…….....96
7.1. Центр паралельних сил……..96
7.2. Центр ваги твердого тіла……..97
7.3. Координати центрів ваги однорідних тіл……....98
7.4. Способи визначення координат центрів ваги тіл……...99
7.5. Центри ваги простіших фігур……101

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ……105

ВСТУП

Пропонований навчальний посібник призначений для студентів всіх форм навчання у процесі вивчення дисципліни «Теоретична механіка». Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв’язування задач, задачі для самостійного розв’язування, які можна використовувати, як завдання для контрольних робіт. Наявність контрольних запитань із кожної теми надає студентам змогу самостійного контролю рівня засвоєння навчального матеріалу. Наведено список рекомендованої літератури.

Основною метою вивчення дисципліни є формування системи знань основних теоретичних положень і принципів механіки, практичних навичок у процесі розв’язування задач теоретичної механіки й побудови розрахункових схем.

Головне завдання навчальної дисципліни полягає в ознайомлені студентів з методами вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об'єктів, які моделюються у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; навчанні студентів застосовувати знання основних понять та законів механіки.

Предмет: вивчення основних теоретичних положень і принципів теоретичної механіки.

ТЕМА 1. СИЛИ ТА ОПЕРАЦІЇ З СИЛАМИ

План

1.1. Класифікація систем сил.
1.1.1. Система збіжних сил.
1.1.2. Довільна плоска система сил.
1.1.3. Довільна просторова система сил.
1.2. Деякі аксіоми статики.
1.2.1. Принцип приєднання та виключення еквівалентної нулю системи сил.
1.2.2. Правило паралелограма.
1.3. Геометричне додавання та розкладання сил.
1.3.1. Додавання двох сил.
1.3.2. Додавання системи сил.
1.3.3. Розкладання сил.
1.4. Проектування сил на вісь та на площину. Аналітичне додавання сил.
1.4.1. Проекція сили на вісь.
1.4.2. Проекція сили на площину.
1.4.3. Метод подвійного проектування.
1.4.4. Аналітичне задання сил.
1.4.5. Аналітичне додавання сил.

Теоретична механіка поділяється на три розділи: статику, кінематику і динаміку.

Статика займається вивченням властивостей сил та законів рівноваги матеріальних тіл. Статика в свою чергу має такі розділи: статика твердого тіла і статика рідких, газоподібних, пружних та інших систем.

Кінематика вивчає суто геометричні форми механічного руху без з'ясування умов та причин, які цей рух викликають.

Динаміка – це найбільш загальна частина механіки, яка вивчає механічний рух в залежності від фізичних факторів, тобто від причин, що викликають цей рух.

1.1. Класифікація систем сил

Сила – міра механічного впливу на тіло з боку інших тіл, що характеризує величину та напрям цього впливу в даний момент часу.

Під механічною дією на тіло з боку інших тіл розуміється така їх дія, яка приводить до зміни швидкості даного тіла, або до його деформації.

Сила, як вектор, визначається трьома елементами: напрямком, або лінією дії; числовим значенням; точкою прикладання. Точкою прикладання сили, як наведено на рисунку 1.1, називається матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена. Лінією дії сили називається пряма CD, вздовж якої спрямовується сила. Сила є вектором і зображується графічно відрізком AB зі стрілкою на кінці. Довжина цього спрямованого відрізка у обраному масштабі відповідає модулю сили, а стрілка позначає напрям вектора сили.

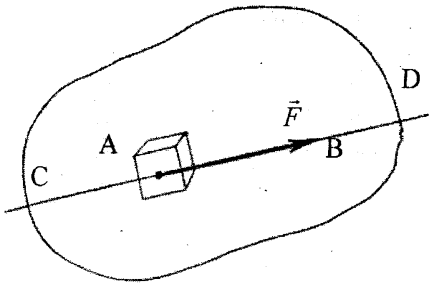


Рисунок 1.1 – Дія сили на тіло

Система сил – це сукупність сил, що діють на дане тіло або механічну систему.

Еквівалентні системи сил – це системи сил, які чинять однакову механічну дію на одне й теж тверде тіло.

Рівнодійна даної системи сил – це одна сила, яка еквівалентна цій системі сил.

Еквівалентна нулю (зрівноважена) система сил – це така система сил, під дією якої тверде тіло не змінює свого руху, зокрема продовжує залишатися в рівновазі.

Зовнішні сили – це сили, що діють на матеріальні точки даної механічної системи з боку матеріальних точок , які не входять в цю систему.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між точками однієї механічної системи.

Зосереджена сила – це сила, яка прикладена до якоїсь конкретної точки тіла.

Розподілені сили – це сили, які діють на всі точки даного об'єму або поверхні, або довжини тіла.

Системи сил можна класифікувати наступним чином: система збіжних сил, плоска та просторова; плоска система паралельних сил; довільна плоска система сил; просторова система паралельних сил; довільна просторова система сил.

1.1.1. Система збіжних сил

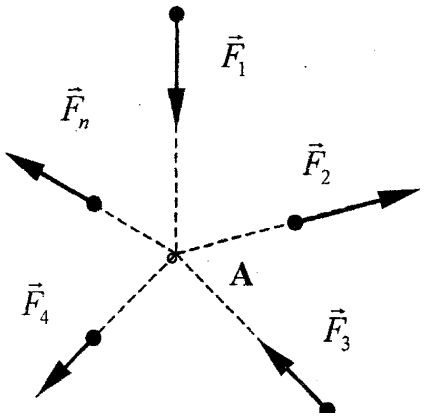


Рисунок 1.1.1 – Система збіжних сил

Системою збіжних сил називається така система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці

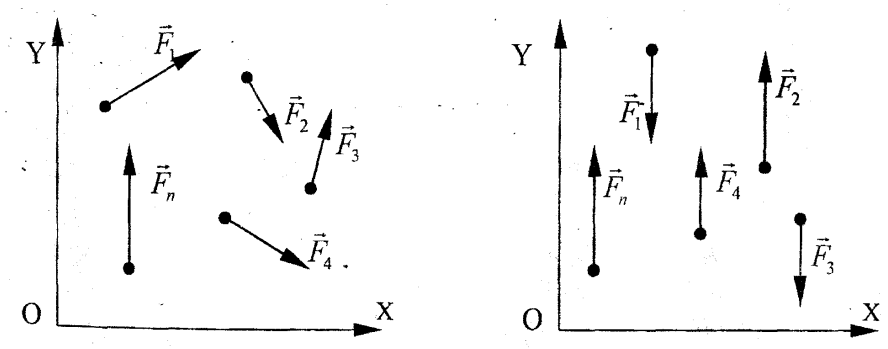
Система збіжних сил наведена на рисунку 1.1.1.

Коли така система складається з сил, що розташовані в одній площині, то це буде плоска система збіжних сил. Просторову ж систему збіжних сил відзначає довільна орієнтація сил в зберіганні спільної точки перетину ліній їх дії.

1.1.2. Довільна плоска система сил

Довільною плоскою системою сил називається така система сил, лінії дії яких розташовані в одній площині та в ній орієнтовані довільно.

Довільна плоска система сил наведена на рисунку 1.1.2,а.



а) Довільна плоска система сил

б) Плоска система паралельних сил

Рисунок 1.1.2 – Плоска система сил

У випадку, коли всі сили паралельні одна одній, то така система сил буде називатися плоскою системою паралельних сил. Плоска система паралельних сил наведена на рисунку 1.1.2,б.

1.1.3. Довільна просторова система сил

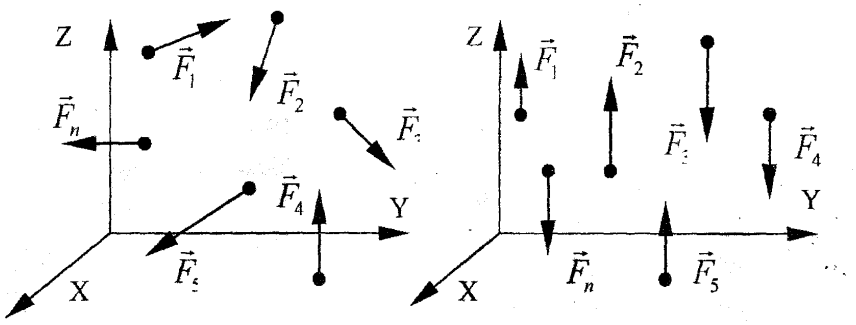
Довільною просторовою системою сил називається така система сил, лінії дії яких орієнтовані в просторі довільним чином.

Це найзагальніший випадок дії сили. Ця система сил наведена на рисунку 1.1.3,а.

Якщо сили паралельні між собою, але не лежать в одній площині, то така система сил називається просторовою системою паралельних сил. ***Дана просторова система паралельних сил наведена на рисунку 1.1.3,б.***

1.2. Деякі аксіоми статики

Механіка базується на деяких положеннях, що ґрунтуються на досвіді, та які приймаються без доказів і звуться аксіомами.



а) Довільна просторова система сил

б) Просторова система паралельних сил

Рисунок 1.1.3 – Просторова система сил

Аксіоми статики встановлюють ті основні положення, які дають змогу з'ясувати як властивості сил, так і необхідні та достатні умови рівноваги твердих тіл.

До числа аксіом статики, які допомагають з'ясувати властивості сил, що прикладені до абсолютно твердого тіла, належать дві аксіоми: принцип приєднання та виключення еквівалентної нулю системи сил та правило паралелограма.

1.2.1. Принцип приєднання та виключення еквівалентної нулю системи сил

Дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї додати або від неї відняти еквівалентну нулю систему сил.

Ця аксіома встановлює, що дві системи сил, які відрізняються на зрівноважену систему сил, між собою еквівалентні.

1.2.2. Правило паралелограма

Дві сили, що прикладені до тіла в одні точці, мають рівнодіючу, яка прикладена у тій же точці і зображується діагоналлю паралелограма, що збудований на цих силах, як на сторонах.

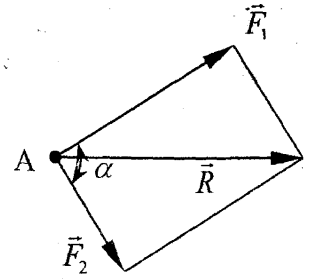


Рисунок 1.2.2 – Правило паралелограма

Вектор $\overline{R}$, який дорівнює діагоналі паралелограма, що побудований на векторах $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, як наведено на рисунку 1.2.2, називається геометричною сумою векторів

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

1.3. Геометричне додавання та розкладання сил

1.3.1. Додавання двох сил

У випадку двох сил, прикладених в одній точці, їх сума знаходиться за правилом паралелограма або за допомогою побудови силового трикутника (рисунок 1.3.1). Для побудови силового трикутника оберемо довільну точку B, назвемо її полюсом та від неї відкладемо вектор, який зображує одну з сил (наприклад, $\overline{F}_1$) у деякому масштабі, а потім від його кінця – вектор, що зображує другу силу – $\overline{F}_2$ (у тому ж масштабі).

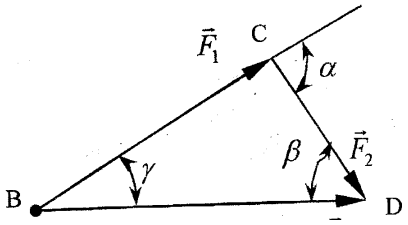


Рисунок 1.3.1. Побудова силового трикутника

З'єднуючи початок першого вектора з кінцем другого, одержимо замикаючий вектор, який зображує рівнодіючу силу $\overline{R}$ в обраному масштабі.

Збудований силовий трикутник являє собою половину паралелограма. Модуль рівнодіючої $\overline{R}$ визначається як сторона BD трикутника BCD за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)} =$$
$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

Застосовуючи теорему синусів, можна визначити кути β та γ, які складають сили $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ з силою $\overline{R}$:

$$\frac{F_1}{\sin\beta} = \frac{F_2}{\sin\gamma} = \frac{R}{\sin(180-\alpha)} = \frac{R}{\sin\alpha} .$$

1.3.2. Додавання системи сил

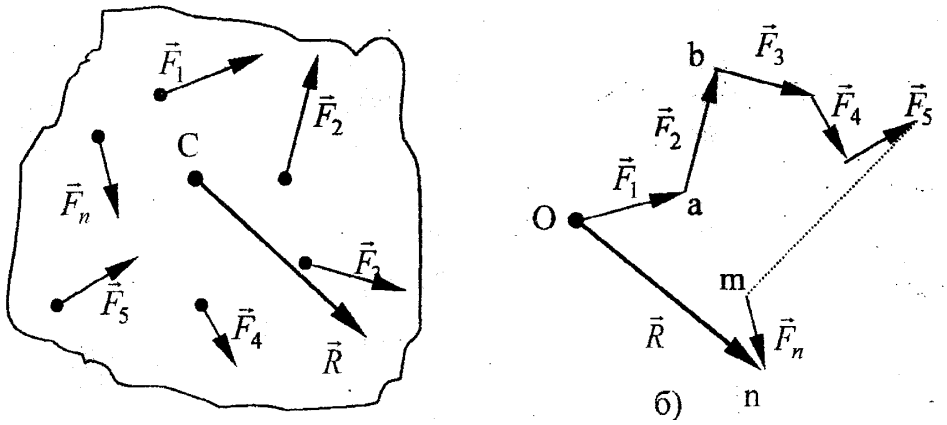
При додаванні довільної системи сил можна скористуватися формальним послідовним додаванням за правилом паралелограма, або також формальною побудовою так званого силового багатокутника.

Перший засіб незручний тим, що занадто захаращує креслення, на якому зображена система сил, що прикладена до тіла.

Цієї незручності нема у другому засобі, який до того ж є й більш простим. Припустимо, задана довільна система сил $\{\overline{F}_k\}$ (задля простоти на рисунку 2.4.2,а. показано плоску систему сил). З довільної точки О (рисунок 1.3.2,б) відкладаємо вектор *Oa*, який зображує в обраному масштабі силу $\overline{F}_1$, з точки *a* відкладаємо вектор *ab*, який зображує силу $\overline{F}_2$, та від кінця *m* вектора передостанньої сили відкладаємо вектор *On*, який зображує силу $\overline{R}$.

Замикаючий вектор $\overline{R}$ який зображує геометричну суму додаваємих сил:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ .$$



а)

Довільна система сил Побудова силового багатокутника

Рисунок 1.3.2 – Додавання системи сил

Ця геометрична сума носить назву головного вектора даної системи сил. Фігура, яка побудована на рисунку 1.3.2,б називається силовим (векторним) багатокутником, а головний вектор певної системи сил зображається замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого з цих сил.

Дія ж, яку чинять на тіло чи то прикладена до нього система сил, чи то головний вектор цієї системи, може бути різною і залежати від положення точки прикладення сили $\overline{R}$ на тілі.

1.3.3. Розкладання сил

Розкладання сил становить собою операцію, протилежну додаванню збіжних сил.

Розкласти дану силу на складові (компоненти) – значить знайти таку систему сил для якої дана сила є рівнодіючою.

Розглянемо силу $\overline{R}$, яка прикладена в точці *A*, як наведено на рисунку 1.3.3,а. У відповідності з визначенням її можна уявити як рівнодіючу двох сил. При цьому, якщо не було додаткових умов, то можна побудовою силових трикутників підібрати нескінченну безліч таких двох складових сил.

Розкладання сили на дві складові. Додатковими умовами для вирішення поставленої задачі можуть, у першу чергу, бути відомі напрями складових сил, котрі лежать в одній площині з силою, як наведено на рисунку 1.3.3,б.

Напрями складових сил $\overline{P}$ та $\overline{Q}$ задані кутами α та β.

Якщо провести прямі, які паралельні заданим напрямам, будемо мати паралелограм сил.

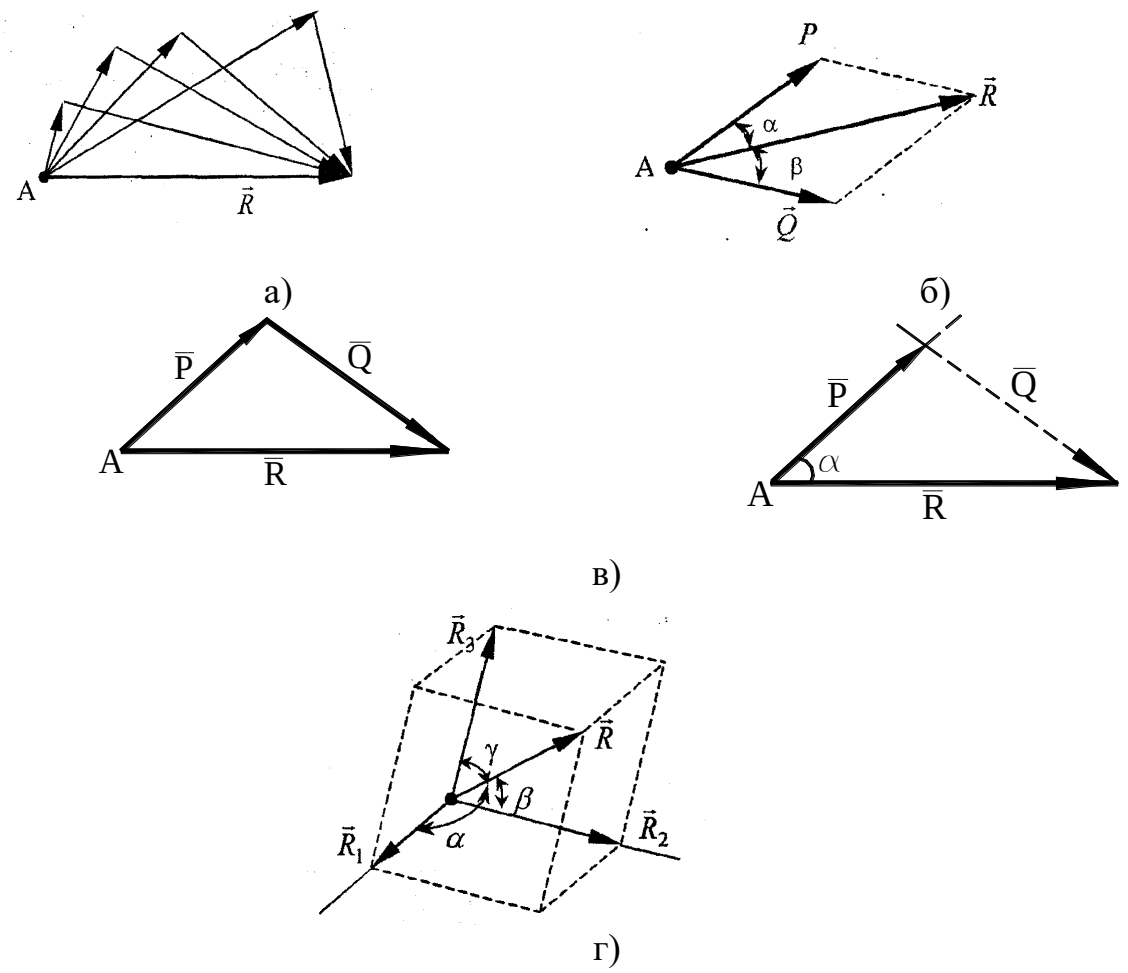


Рисунок 1.3.3 – Розкладання сил

При розкладанні сили на дві складові можливі часткові випадки в залежності від вигляду додаткових умов. Цими умовами є: задані величини складових $\overline{P}$ та $\overline{Q}$, задані величина і напрям однієї з складових (рисунок 1.3.3,в).

Розкладання на три складові. Для вирішення цієї задачі, як додаткові умови, повинні бути задані напрями складових, які не лежать в одній площині. Тоді задача зводиться до побудови такого паралелепіпеда, у якого діагональ зображує дану силу $\overline{R}$, а ребра паралельні тим напрямам, що задані (рисунок 1.3.3, г).

1.4. Проектування сил на вісь та на площину. Аналітичне додавання сил

Дуже часто побудова силового багатокутника та визначення головного вектора є занадто складною та громіздкою задачею. В такому разі звертаються до, так званого, аналітичного метода, тобто метода, який використовує проектування сил на вісь та площину.

1.4.1. Проекція сили на вісь

Проекцію вектора сили на вісь називається скалярна величина, яка дорівнює узятій з відповідним знаком довжині відрізку, який міститься між проекціями початку та кінця сили на цю вісь.

Проекція сили на вісь має знак, який визначається наступним чином: якщо переміщення від початку проекції сили на вісь до її кінця відбувається в додатному напрямі вісі, то проекція має знак "+"; якщо це переміщення відбувається в протилежному напрямі, то проекція має знак "-", а якщо сила перпендикулярна осі, тоді її проекція дорівнює нулю (рисунок 1.4.1).

Тобто проекція сили на вісь, дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямком сили та додатним напрямком осі.

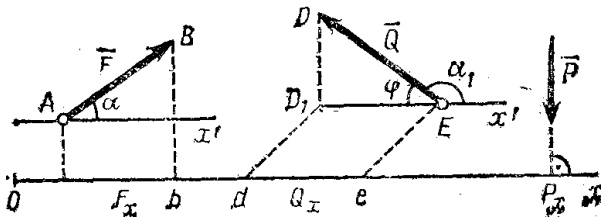


Рисунок 1.4.1 – Проекція сили на вісь

Використовуючи це правило, визначаємо, що знак проекції сили $\overline{F}$ на рисунку – додатній.

$$F_x = F\cos\alpha .$$

1.4.2. Проекція сили на площину

Проекцією сили на площину називається вектор, який міститься між проекціями початку та кінця даної сили на площину (рисунок 1.4.2).

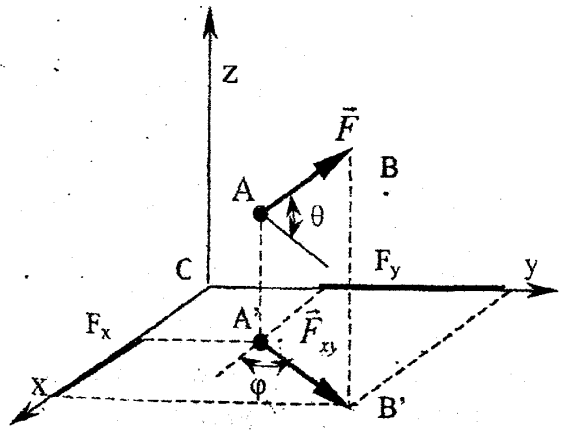


Рисунок 1.4.2 – Проекція сили на площину

Модуль вектора проекції F_{xy} дорівнює:

$$F_{xy} = F \cos\theta,$$

де θ кут між напрямом сили $\overline{F}$ та її проєкцією $\overline{F}_{xy}$.

Тоді, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є векторною величиною і, в свою чергу, може бути спроектована на будь-які вісі.

1.4.3. Метод подвійного проектування

Коли не задано кута між силою та віссю, то для находження проекції сили на вісь краще спочатку знайти її проекції на площину, в якій лежить дана вісь, а потім знайдену проекцію спроектувати на цю вісь (наприклад, вісь X), як наведено на рисунку 1.4.2.:

$$F_x = \left|\overline{F}_{xy}\right| \cos\varphi = \left|\overline{F}\right| \cos\theta \cos\varphi.$$

Цей метод іноді називають методом подвійного проектування.

1.4.4. Аналітичне задання сил

Задання сили потребує знання величини сили, її напрямку та точки прикладення. Величина сили може бути визначена як довжина вектора в деякому масштабі. Для визначення ж точки прикладення та напрямку вектора сили необхідно вибрати якусь систему координат, зокрема це може бути прямокутна декартова система координат *OXYZ*. В механіці ми будемо користуватися правою системою координат (правою трійкою) (рисунок 1.4.4).

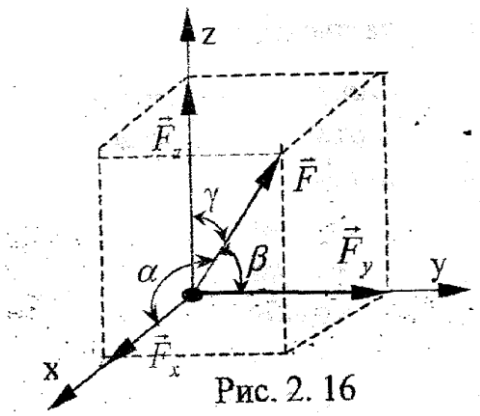


Рисунок 1.4.4. Аналітичне задання сил

Задати силу аналітичне означає вміти побудувати її в даній системі координат. Зробити це можливо двома способами.

Завдяки першому способу аналітичне задати силу означає:

1. Задати систему координат.
2. Задати точку прикладення сили її координатами.

3. Задати величину сили, тобто довжину її вектора.
4. Задати кути α, β, γ, які вектор сили утворює з вісями координат.

Однак, частіше при вирішенні задач статики використовують інший спосіб завдання сили, який відрізняється від попереднього тим, що пункти 3 та 4 заміняються, одним, в якому повинні бути задані проекції F_x, F_y, F_z, сили $\overline{F}$.

$$F_x = F\cos\alpha; F_y = F\cos\beta; F_z = F\cos\gamma.$$

Возведемо в квадрат ліві та праві частини цих рівнянь та додамо їх. Ураховуючи, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, одержимо: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Таким чином, якщо знати проекції вектора сили на вісі координат, завжди можливо одержати величину вектора сили. Напрям цього вектора визначається за допомогою напрямних косинусів: $\cos\alpha = \frac{F_x}{F}; \cos\beta = \frac{F_y}{F}; \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$.

1.4.5. Аналітичне додавання сил

За великої кількості сил, що прикладені до тіла, особливо, якщо система сил - просторова, геометричним способом додавання сил користуватися надзвичайно важко. У цьому випадку слід користуватися аналітичним способом додавання сил.

Проекція вектора суми на яку-небудь вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій додаваємих векторів на цю ж вісь. Розглянемо плоску довільну систему сил $\{\overline{F}_k\}$, що прикладені до тіла, та багатокутник цих сил з головним вектором $\overline{R}$, як наведено на рисунку 1.4.5.

Проведемо вісь *X* та спроектуємо на неї сили. Тобто:

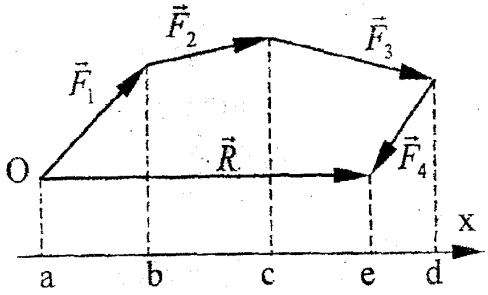


Рисунок 1.4.5 – Багатокутник сил

$$F_{1X} = |ab|; F_{2X} = |bc|; F_{3X} = |cd|; F_{4X} = |de|; R_X = |ae|.$$

З рисунку видно, що

$$|\overline{ae}| = |\overline{ab}| + |\overline{bc}| + |\overline{cd}| - |\overline{de}|.$$

Замінюючи, довжини відрізків позначеннями проекцій сил, отримаємо:

$$R_X = F_{1X} + F_{2X} + F_{3X} - F_{4X} = \sum_{K=1}^{4} F_{KX}.$$

Цей результат справедливий для будь-якої системи сил та для будь-якої осі. Якщо вибрати в якості осей – вісі декартової системи координат *OXYZ*, то проекції головного вектора будуть мати вигляд:

$$R_X = \sum_{k=1}^{n} F_{kX}; R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}.$$

Так як проекції головного вектора $\overline{R}$ тепер нам відомі, то відомим є і головний вектор $\overline{R}$, тобто додавання сил виконано.

Таким, чином, для додавання будь-якої заданої системи сил необхідно знати проекції цих сил на вісі координат та алгебраїчне додати усі однойменні проекції.

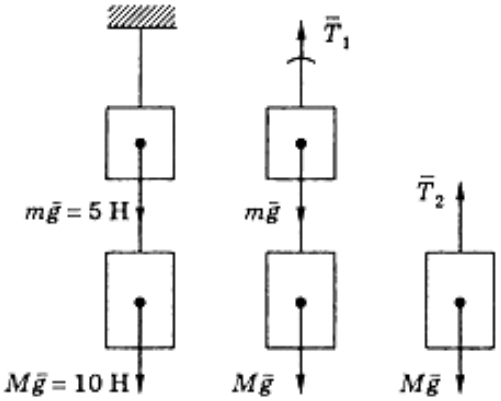
Приклад 1

Два вантажу, в 10 Н і 5 Н, що висять на одній мотузці, укріплені на ній в різних місцях, причому більший вантаж висить нижче меншого. Яке натяг мотузки, якщо верхній кінець її прикріплений до нерухому точку?

Розв'язування:

Складемо рівняння рівноваги двох вантажів

$$T_1 - mg - Mg = 0 \Rightarrow$$
$$T_1 = g(m + M) = 10 + 5 = 15.$$



Складемо рівняння рівноваги нижнього вантажу

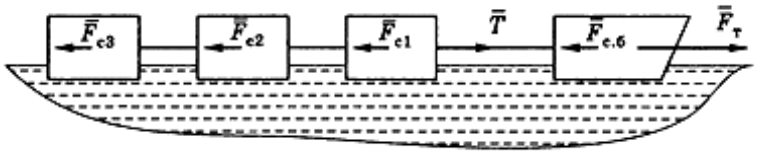
$$T_2 - Mg = 0 \Rightarrow$$
$$T_2 = Mg = 10 \text{ Н}.$$

Відповідь: 10Н; 15Н.

Приклад 2

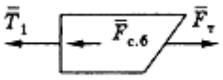
Буксир тягне три баржі різних розмірів, такі одна за одною. Сила тяги гвинта буксира в даний момент дорівнює 18 кН. Опір води руху буксира дорівнює 6 кН; опір води руху першої баржі – 6 кН, другий баржі – 4 кН і третьої – 2 кН. Наявний канат витримує безпечно розтягувальну силу в 2 кН. Скільки канатів треба протягнути від буксира до першої баржі, від першої до другої і від другої до третьої, якщо рух – прямолінійний і рівномірний ?

Розв'язування:



На рисунку позначені сила тяги гвинтообуксира; сила опору буксира; сумарна сила натягу всіх канатів; сила натягу канатів між буксиром і баржею 1; сила опору баржі 1; сила натягу канатів між 1 і 2 баржею; сила опору баржі 2; сила опору баржі 3; сила натягу канатів між 2 і 3 баржею; допустиме навантаження на один канат.

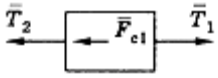
Складемо рівняння рівноваги буксира



$$F_т - T_1 - F_{c.б} = 0,$$

$$T_1 = F_т - F_{c.б} = 18 - 6 = 12 \text{ кН}.$$

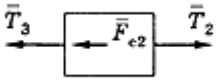
Складемо рівняння рівноваги баржі 1



$$T_1 - T_2 - F_{c1} = 0,$$

$$T_2 = T_1 - F_{c1} = 12 - 6 = 6 \text{ кН}.$$

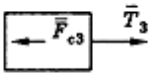
Складемо рівняння рівноваги баржі 2



$$T_2 - T_3 - F_{c2} = 0,$$

$$T_3 = T_2 - F_{c2} = 6 - 4 = 2 \text{ кН}.$$

Складемо рівняння рівноваги баржі 3



$$T_3 - F_{c3} = 0,$$

$$T_3 = F_{c3} = 2 \text{ кН}.$$

Кількість канатів, необхідна між буксиром і баржі 1, так само:

$$\frac{T_1}{[T]} = \frac{12}{2} = 6;$$

між баржами 1 і 2:

$$\frac{T_2}{[T]} = \frac{6}{2} = 3;$$

між баржами 2 і 3:

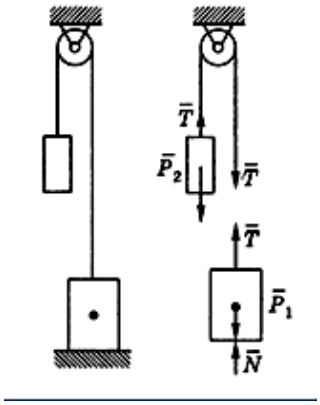
$$\frac{T_3}{[T]} = \frac{2}{2} = 1.$$

Відповідь: 6; 3; 1.

Приклад 3

На дні шахти знаходиться людина ваги 640 Н; за допомогою каната, перекинутого через нерухомий блок, людина утримує вантаж в 480 Н.

Розв'язування:



Нехай P_1 = 640 Н – вага людини;
P_2 = 480 Н – вага вантажу;
N – сила тиску людини;
T – сила натягу нитки.

Складемо рівняння рівноваги для вантажу і людини:

$$T - P_2 = 0, \qquad (1)$$
$$T - P_1 + N = 0. \qquad (2)$$

З (1) і (2) знаходимо

$$N = P_1 - T = P_1 - P_2 = 640 - 480 = 160 \text{ Н}.$$

З (2) випливає: N= P1-T. Якщо N = 0, то

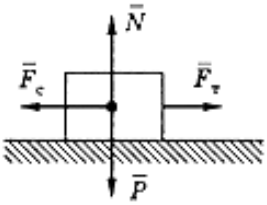
$$T = P_1 = 640 \text{ Н}, \; P_{2\max} = P_1 = 640 \text{ Н}.$$

Відповідь: 1) 160 Н; 2) 640 Н.

Приклад 4

Поїзд йде за прямолінійним горизонтальному шляху з постійною швидкістю; вага поїзда, не рахуючи електровоза, 12 103 кН. Яка сила тяги електровоза, якщо опір руху поїзда одно 0,005 тиску поїзда на рейки?

Розв'язування



Позначимо: F – сила тяги;
P – вага поїзда;
F – сила опору руху поїзда;
N – сила реакції рейок.

Складемо рівняння рівноваги. Так як рух поїзда є прямолінійним і рівномірним, то прикладені до поїзду сили врівноважені:

$$\begin{cases} F_т - F_c = 0, \\ N - P = 0, \\ F_c = 0,005N. \end{cases}$$

З системи знайдемо:

$$F_т = F_c = 0,005N = 0,005 \cdot 12 \cdot 10^3 = 60 \text{ кН}.$$

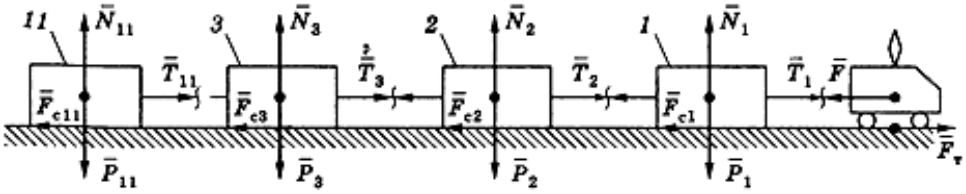
Відповідь: 60 кН.

Приклад 5

Пасажирський поїзд складається з електровоза, багажного вагона ваги 400 кН і 10 пасажирських вагонів ваги 500 кН кожен. З якою силою будуть натягнуті вагонні стяжки і яка сила тяги електровоза, якщо опір руху поїзда одно 0,005 його ваги? При вирішенні завдання прийняти, що опір руху розподіляється між складом поїзда пропорційно вазі і що рух поїзда рівномірний.

Розв'язування

Введемо позначення: *i* – номер вагона починаючи від електровоза, *i* =1, 11; Fт – сила тяги електровоза; *F* – сила опору руху поїзда; *Pi* – вага і-го вагона; *Ni* – реакція рейок на І-й вагон; *Fci*- сила опору руху *i*-го вагона; *Ti* – сила натягу стяжки і-го вагона.



Запишемо рівняння рівноваги $F_{\text{т}} - F = 0.$ електровоза
Оскільки

$$F = 0,005(P_1 + P_2 + \ldots + P_{11}), \text{ то}$$
$$F_{\text{т}} = 0,005(400 + 10 \cdot 500) = 27 \text{ кН}.$$

Розглянемо рівновагу 11-го (останнього) вагона і запишемо відповідні рівняння

$$T_{11} - F_{c11} = 0.$$

В силу того що опір руху розподіляється між складом поїзда пропорційно вазі

$$F_{c11} = 0,005 P_{11},$$

Отже $T_{10} - F_{c11} = 0.$

Потім розглянемо рівновагу 10-го вагона:

$$T_{11} = F_{c11} = 0,005 \cdot 500 = 2,5 \text{ кН}.$$

Оскільки

$$F_{c10} = 0,005(P_{10} + P_{11}),$$

тоді

$$T_{10} = F_{c10} = 0,005(500 + 500) = 2 \cdot 2,5 \text{ кН}.$$

Міркуючи далі аналогічно, отримаємо:

$$T_9 = 3 \cdot 2,5 \text{ кН}; \; T_8 = 4 \cdot 2,5 \text{ кН}; \; \ldots; \; T_2 = 10 \cdot 2,5 \text{ кН}.$$

Розглянемо 1-й (багажний) вагон і рівняння рівноваги:

$$T_1 - F_{c1} = 0.$$

Так як

$$F_{c1} = 0,005(P_1 + P_2 + \ldots + P_{11}),$$

Тоді

$$T_1 = 0,005(400 + 10 \cdot 500) = 27 \text{ кН}.$$

Відповідь: сила тяги електровоза

$27\ \text{кН}, T_{11} = 2{,}5\ \text{кН}, T_{10} = 2 \cdot 2{,}5\ \text{кН}, \ \ldots, T_2 = 10 \cdot 2{,}5\ \text{кН}, T_1 = 27\ \text{кН}$

(нижній індекс означає номер вагона починаючи від електровоза).

Приклад 5

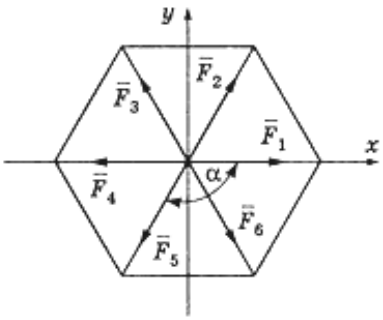
У центрі правильного шестикутника прикладені сили 1, 3, 5, 7, 9 і 11 Н, спрямовані до його вершин. Знайти величину і напрямок рівнодіючої і врівноважує.

Розв'язування

Знайдемо проекції рівнодіючої сил R на осі координат

$$R_x = \sum_{i=1}^{6} F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^{6} F_{iy}.$$

$$R_x = F_1 + F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 60^\circ - F_4 - F_5 \cos 60^\circ +$$
$$+ F_6 \cos 60^\circ = 1 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} - 7 - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = -6\ \text{Н},$$



$$R_y = F_2 \sin 60^\circ + F_3 \sin 60^\circ - F_5 \sin 60^\circ -$$
$$- F_6 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(8 - 20) = -6\sqrt{3}.$$

Тоді

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{6^2 + 6^2 \cdot 3} = 6 \cdot 2 = 12\ \text{Н}.$$

$$\cos(\bar{R}, x) = \frac{R_x}{R} = -\frac{6}{12} = -0{,}5.$$

Таким чином, вектор рівнодіючої спрямований по руху сили F5, а вектор врівноважує сили-по вектору сили F.

Відповідь: 12 Н; напрямок врівноважує протилежно але напрямку заданої сили в 9 Н.

Контрольні запитання

1. Що таке матеріальна точка?
2. Що таке абсолютно тверде тіло?
3. Які величини називаються векторними і скалярними?
4. Що таке сила і яка її розмірність?
5. Що називається реакціями зв'язків?
6. Що таке статично еквівалентна система сил?
7. Сформулюйте основні аксіоми статики?
8. Наведіть визначення поняття «сила».

9. Якими приладами вимірюють чисельне значення сили?
10. Якими одиницями вимірюється сила в Міжнародній системі (СІ)?
11. Перерахуйте ознаки, що характеризують силу.
12. Що називається системою сил?

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ СТАТИКИ

План

2.1. Основні задачі статики.
2.2. Деякі визначення.
2.3. Основні аксіоми статики.
2.4. В'язі та їх реакції.
2.4.1. Поняття реакції в'язі.
2.4.2. Активні сили.
2.4.3. Види в'язей та їх реакції.
2.5. Момент сили.
2.5.1. Момент сили відносно центра.
2.5.2. Властивості моменту сили
2.5.3. Теорема про момент рівнодіючої системи збіжних сил (теорема Варіньона).
2.5.4. Момент сили відносно осі.
2.5.5. Зв'язок між моментами сили відносно центра та осі.
2.5.5. Аналітичні вирази моментів сили відносно координатних осей.

2.1. Основні задачі статики

Зміст статики складають дві основні задачі.

1. Задача про приведення системи сил до більш простішої, але еквівалентної даній. Рішення цієї задачі можливо за умови знання властивостей сил та операцій з ними.

2. Задача про рівновагу тіла: яким умовам повинна задовольняти система сил, яка прикладена до даного тіла (або точки), щоб вони знаходилися у рівновазі.

2.2. Деякі визначення

Рівновага – це такий стан тіла, коли воно знаходиться або в спокої, або в прямолінійному рівномірному русі.

Об'єкт рівноваги – це матеріальна точка, тіло або, механічна система, рівновага якої розглядається в даній задачі.

Вільне тіло – це таке тіло, переміщення якого в довільному напрямі не обмежено іншими тілами.

Невільне тіло – це таке тіло, переміщення якого хоча б в одному напрямі обмежено іншими тілами. Тоді тіло, яке обмежує переміщення матеріальної точки в просторі, називається в'яззю.

Зрівноважуюча сила даної системи сил – це сила, яка, якщо її приєднати до деякої системи сил, діючих, на тіло, приводить цю систему до рівноваги.

2.3. Основні аксіоми статики

1. Аксіома рівноваги під дією двох сил. ***Абсолютно тверде тіло знаходиться у рівновазі під дією двох сил тоді і тільки тоді, коли ці сили однакові за модулем і спрямовані у протилежні сторони повз однієї прямої.***

Цю аксіому ілюстровано на рисунку 2.3,а, де прикладені до тіла дві сили $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$, які утримують тіло *A* у рівновазі. При цьому: $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$.

З цієї аксіоми, враховуючи першу з наведених у попередньому розділі (про додавання та виключення еквівалентної нулю системи сил), можна одержати наслідок, який формулюється наступним чином: усяку силу, яка прикладена в якійсь точці абсолютно твердого тіла, можна, не змінюючи її дії, перенести в будь-яку точку, що лежить на лінії дії цієї сили.

Дійсно, до сили $\overline{P}$, діючої на абсолютно тверде тіло в точці *A*, відповідно до вищезгаданої аксіоми можна додати систему, яка складається з двох рівнозважених (еквівалентних нулю) сил $\overline{P}_1$ та $\overline{P}_2$, які дорівнюють за модулем силі $\overline{P}$, як наведено на рисунку 2.3,б.

Прикладемо цю систему сил вздовж лінії дії сили $\overline{P}$ в якійсь точці *B*. Система сил $\{\overline{P}_2; \overline{P}\}$ також становить собою еквівалентну нулю систему сил (так як $\overline{P}_2 = -\overline{P}_1$) і може бути відкинута. Тоді, з трьох сил залишиться тільки сила $\overline{P}_1$, але вона тепер прикладена в новій точці *B*.

2. Аксіома дії та протидії. Цю аксіому в фізиці знають як третій закон Ньютона: ***сили, з якими діють одне з одним два твердих тіла, завжди однакові за величиною та спрямовані вздовж однієї прямої у протилежні сторони.***

Ця аксіома має важливе значення у механіці. Якщо тіло 1 діє на тіло 2 з силою $\overline{F}_{12}$, як наведено на рисунку 3.3,в, тоді тіло 2 діє на тіло 1 з такою ж за модулем силою $\overline{F}_{21}$, але спрямованою у протилежний бік, тобто:

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}.$$

Ці сили не урівноважують одна одну, бо прикладені до різних тіл. В природі сили зустрічаються завжди парами: сила дії та протидії.

З аксіоми, яку розглянуто, виходить дуже важлива властивість сил, що діють усередині абсолютно твердого тіла. Дійсно, будь-які дві частки абсолютно твердого тіла будуть діяти одна на одну з рівними за модулем та протилежно спрямованими внутрішніми силами, при чому частки ці не рухаються. Тоді для даного тіла усі внутрішні сили утворюють зрівноважену (еквівалентну нулю) систему сил, яку можна відкинути, не враховуючи її. Отже, внутрішні сили не чинять вплив, на абсолютно тверде тіло і при вивченні

рівноваги такого тіла необхідно рахувати тільки зовнішні сили, які прикладені до тіла.

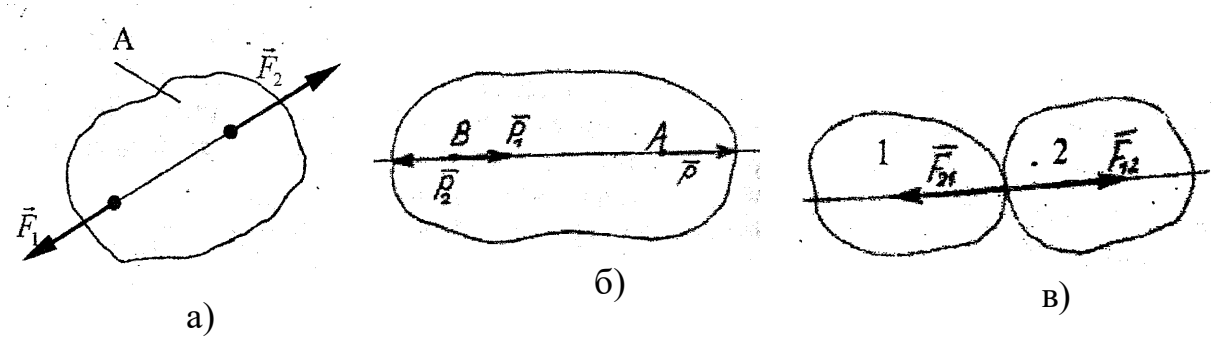


Рисунок 2.3 – Основні аксіоми статики

3. Аксіома твердіння. ***Якщо тіло, що деформується, знаходиться в рівновазі під дією даної системи сил, то рівновага не порушується коли тіло вважати таким, що затверділо (тобто зробилося абсолютно твердим).***

2.4. В'язі та їх реакції

2.4.1. Поняття реакції в'язів

Невільне тіло характеризується в'язями, які обмежують його переміщення. При цьому виникає взаємодія тіла з в'яззю, тобто і тіло діє на в'язь, і, навпаки, в'язь діє на тіло. Ця протидія в'язі тілу називається реакцією в'язі. Інакше кажучи, реакція в'язі - це сила, яка виражає тільки дію в'язі і залежить як від інших діючих на дане тіло сил, так і від руху тіла та виду в'язей. Спрямована реакція в бік, який є протилежним тому, куди в'язь не дозволяє рухатися тілу.

2.4.2. Активні сили

Реакції в'язей за своєю природою відрізняються від інших сил, які називають активними силами. Термін «активні» надали таким силам, які при дії на тіло, що знаходиться у рівновазі, можуть дати йому той чи інший рух. Реакції в'язей цією властивістю не володіють, тому їх іноді звуть пасивними силами.

В той же час активні сили, до яких належать ті чи інші вантажі, відносяться до сил, що задані. Таким чином, усі сили, які діють на тверде тіло, можна поділити на сили, що задаються, та реакції в'язей. При цьому активними слід вважати усі сили, що не відносяться до реакцій в'язей.

2.4.3. Види в'язей та їх реакції

При розв'язанні задач статики активні сили, як правило, бувають задані наперед, а реакції в'язей невідомі за величиною та напрямком і їх треба визначити.

Визначаючи реакції в'язей, необхідно мати на увазі, що вони прикладені до тіла в тих точках, які контактують із в'яззю. Вірне визначення напрямків реакцій в'язей відіграє при вирішенні задач статики дуже важливу роль. Тому розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких видів в'язей, які наведені на рисунках 2.4.3.1. та 2.4.3.2.

1. *Гнучка в'язь.* Прикладами такої в'язі можна привести нитку, трос, ланцюг, канат та ін., які умовно вважаються невагомими та нерозтяжними (рисунок 2.4.3.1,а). Така в'язь не дозволяє тілу *M* віддалятися від точки *A* підвісу вздовж напряму *AM*. Тому реакція натягнутої нитки спрямована вздовж нитки до точки її підвісу.

2. *Невагомий стрижень.* Іноді гнучку в'язь неможливо використати. Тоді вживають абсолютно жорсткі невагомі стрижні з шарнірними кріпленнями (рисунок 2.4.3.1,б), які називаються вузлами стрижня. За відсутністю тертя в шарнірах та умові невагомості стрижня на нього в вузлах діють тільки дві сили, які завжди будуть спрямовані вздовж прямої, яка з'єднує центри шарнірів. Вигляд стрижня при цьому не має значення. Таким чином, стрижень, навантажений в вузлах, працює тільки на стиснення або розтягання, причому розтягаюча або стискуюча сили називаються зусиллями в стрижні, які умовилися вважати додатними при розтягуванні та від'ємними при стисненні.

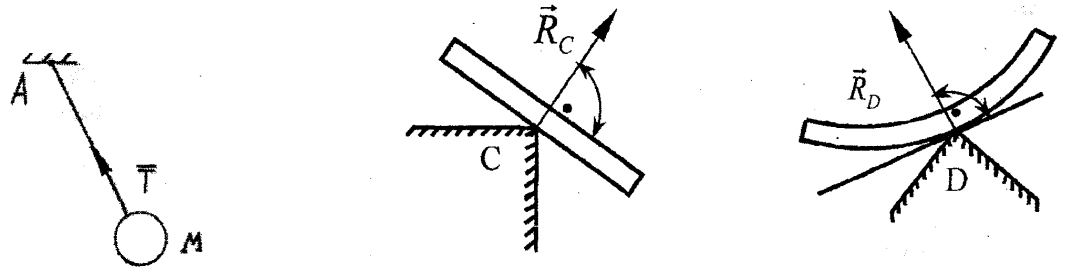
Якщо стрижень розтягнуто, то його реакція спрямована від тіла до стрижня ($\overline{S}_B$ та $\overline{S}_C$), якщо стрижень стиснутий, то його реакція спрямована від стрижня до тіла ($\overline{S}_E$). При вирішуванні задач на розшукування реакцій не завжди наперед можна визначити, який стрижень стиснуто, а який розтягнуто. Тому припускають, що усі стрижні розтягнуті, а у результаті розв'язування задачі одержують для стиснутих стрижнів значення реакцій від'ємними, бо дійсний напрям цих реакцій протилежний тому, який був припущенний.

3. *Гладенька поверхня або опора.* Приклади такого різновиду в'язі показані на рисунку 2.4.3.1,в. Гладенькою називається поверхня, тертям тіла об яку можна нехтувати. В усіх випадках в'язь заважає переміщенню тіла в напрямі спільного перпендикуляра (нормалі) до поверхні тіл, що торкаються; тобто вздовж нормалі до їх спільної дотичної.

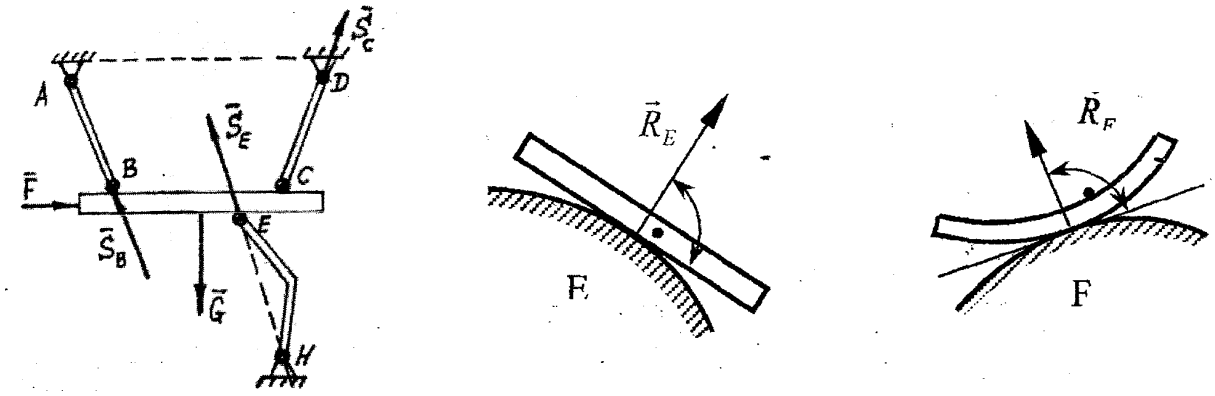
4. *Нерухома циліндрична шарнірна опора або підшипник.* Циліндричним шарніром називається з'єднання двох тіл, яке припускає обертання обох тіл навколо їх загальної осі (шарнір), або тільки одного з них відносно другого (підшипник). Шарнір, який наведений на рисунку 2.4.3.1,г являє собою з'єднання двох тіл за допомогою пальця, що проходить крізь отвори у цих тілах.

На рисунку показані умовні позначення шарнірно-нерухомої опори та підшипника. Така опора заважає поступальному переміщенню тіла у будь-якому напрямі, який є перпендикулярним до осі шарніра *OZ*. Отже, вантаж

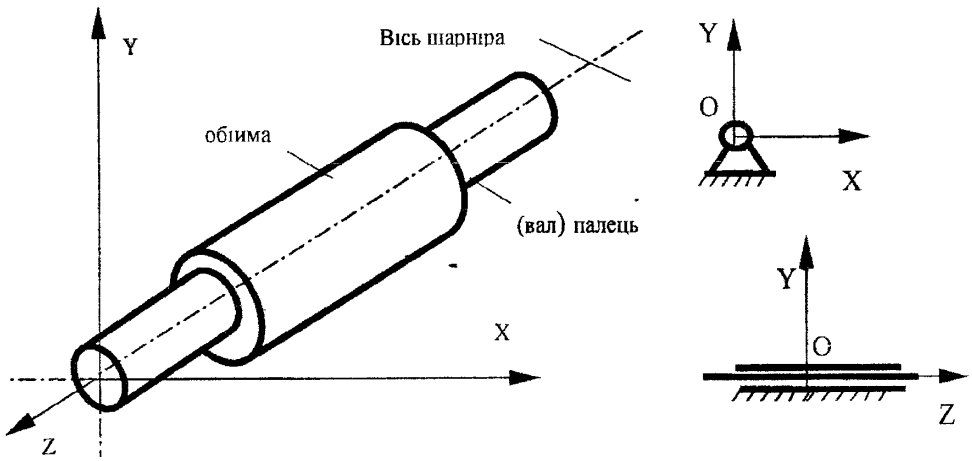
може діяти на шарнірно-нерухому опору в будь-якому напрямі, і тому напрям реакції цієї опори, як правило, наперед невідомий і залежить від того, в якій точці здійснюється контакт обійми та пальця. Нехтуючи тертям в шарнірі, можна стверджувати, що реакція нерухомого циліндричного шарніра (підшипника) лежить у площині *XAY*, яка перпендикулярна до його осі та має радіальний напрям.

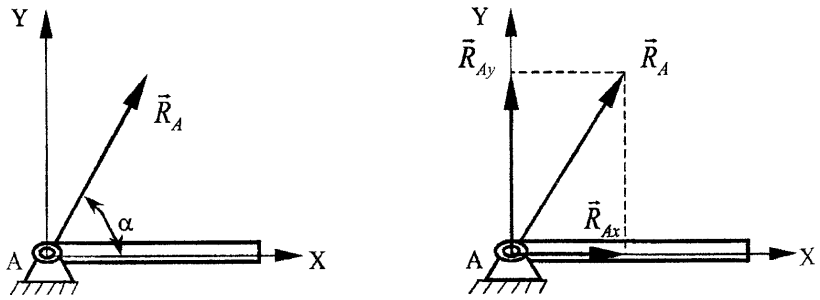


а)



б) в)





г)

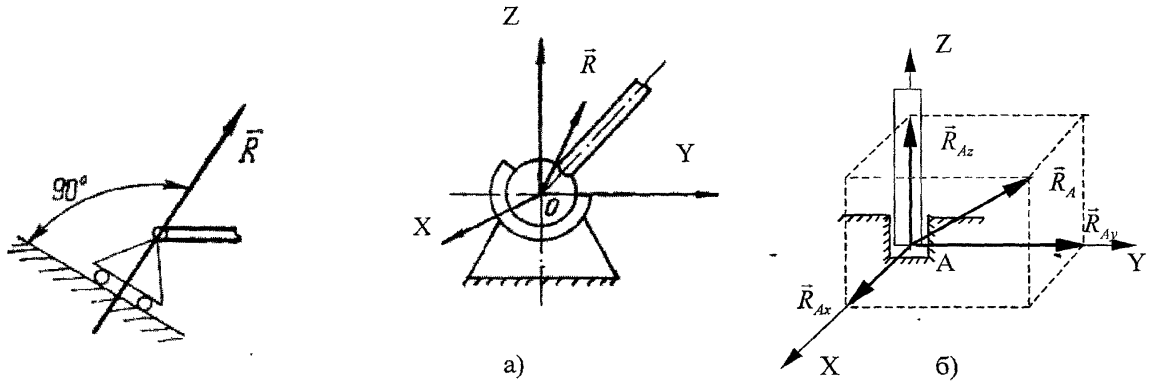
Рисунок 2.4.3.1 – Види в'язей та їх реакції

Таким чином ми маємо дві невідомі величини - модуль сили $\overline{R}_A$ та кут α, який показує її напрям. Зручніше реакцію $\overline{R}_A$ зобразити у вигляді двох складових $\overline{R}_{AX}$ та $\overline{R}_{AY}$, взаємно перпендикулярних між собою.

5. *Рухома циліндрична шарнірна опора.* Ця опора являє собою тіло, яке спирається на поверхню не безпосередньо, а через шарнір, який стоїть на котках (рисунок 2.4.3.2,а) та вільно рухається вздовж поверхні опори. Якщо не ураховувати тертя у котках, то лінію дії реакції такої опори слід визнавати так, нібито вона проходить через центр шарніра перпендикулярно опорній поверхні.

6. *Сферична шарнірна опора (підп'ятник).* Сферичною шарнірною опорою або шаровим шарніром називається обладнання (рисунок 2.4.3.2,б), яке може обертатися як завгодно навколо деякої нерухомої точки *O*.

Підп'ятник становить собою опорно-упертий підшипник, і, як і сферичний шарнір, закріплює нерухомо одну з точок твердого тіла.



а) б)

Рисунок 2.4.3.2 – Види в'язей та їх реакції

І в шаровому шарнірі, і в підп'ятнику реакція проходить через нерухому точку та невідома ні за модулем, ні за напрямом. Можна порадити розкладати реакцію $\overline{R}$ на складові вздовж осей прямокутної системи координат *XOYZ*.

2.5. Момент сили

2.5.1. Момент сили відносно центра

Сила, яка прикладена до твердого тіла, може спричинити як поступальний, так і обертальний рух навколо того чи іншого центра.

Нехай на тіло, що закріплено в деякій точці *O*, діє сила $\overline{F}$, яка не проходить крізь цю точку, як наведено на рисунку 2.5.1,а. Тоді тіло буде обертатися навколо центра *O* до того часу, аж доки лінія дії сили не перетине цей центр. Тобто, має бути обертальний ефект дії сили, який можна характеризувати її моментом відносно центра.

Назвемо плечем сили відносно центра *O* перпендикуляр *h*, який опускається з точки *O* на лінію дії сили $\overline{F}$. Очевидно, що обертальний ефект залежить від наступних факторів: величини сили $\overline{F}$ *;* довжини плеча *h*; положення в просторі площини обертання *OAB*, яка проходить через силу $\overline{F}$ та точку *O*; напряму обертання тіла в цій площині, який можна умовно характеризувати знаками "+", або "-".

Для кількісного вимірювання обертального ефекту можна запровадити поняття про алгебраїчний момент сили відносно даного центра: ***алгебраїчним моментом сили P відносно центра O називається величина, яка дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля сили на довжину плеча.*** $m_o(\overline{F}) = \pm F \cdot h$.

Момент вважається додатнім, коли сила намагається повернути тіло проти руху годинникової стрілки, а від'ємним - у протилежному випадку.

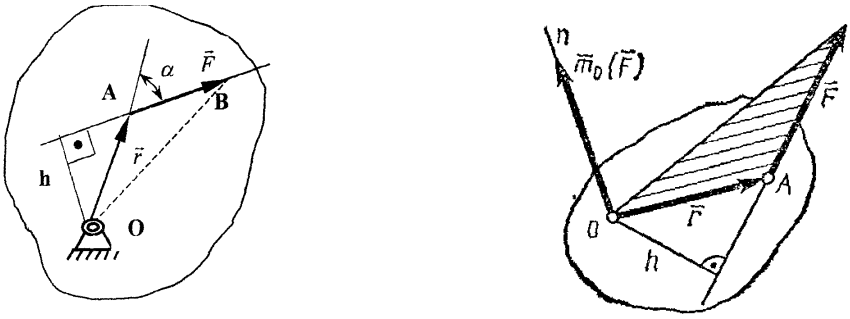
Отриманий вираз не в певній мірі ураховує обертальний ефект дії сили. Він не відповідає на запитання, як орієнтована в просторі площина обертання тіла. Цього недоліку можна уникнути, якщо ввести поняття геометричного (векторного) моменту сили відносно центра, тобто вектора моменту.

Вектором моменту сили відносно центра називається вектор $\overline{m}_0(\overline{F})$***, прикладений в точці O та спрямований перпендикулярно площині, яка утворена силою та точкою, у той бік, відкіля можливий поворот тіла навколо точки O під дією сили*** $\overline{F}$ ***бачиться таким, що чиниться проти руху годинникової стрілки.***

Напрям вектора моменту (перпендикулярно площині повороту тіла) завжди задає нам площину поворота тіла відносно центра.

Тоді, якщо провести радіус-вектор точки *A* (рисунок 2.5.1,б), то вектор моменту сили можна виразити векторним добутком:

$$\overline{M}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$



а) б)

Рисунок 2.5.1 – Момент сили відносно центра

Модуль цього векторного добутку дорівнює:

$$M_o(\overline{F}) = rF \sin \alpha,$$

де α - кут між векторами $\overline{F}$ та $\overline{r}$.

Ураховуючи, що $r \sin \alpha = h$ одержимо таку формулу:

$$M_o(\overline{F}) = m_o(\overline{F}) = \pm F \cdot h.$$

2.5.2. Властивості моменту сили

1. Вектор моменту сили не зміниться, якщо точку прикладення сили перенести вздовж її лінії дії в будь-яке місто (бо при цьому не зміниться довжина плеча *h*).

2. Момент сили відносно центра дорівнює нулю тільки тоді, коли або сила, або плече дорівнює нулю (лінія дії в останньому випадку проходить через центр).

3. Момент сили відносно центра чисельно дорівнює подвійній площі трикутника *OAB* $m_o(\overline{F}) = 2пл\Delta OAB$.

Цей результат визначається тим, що $пл.\Delta OAB = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} F \cdot h$.

Момент вимірюється в ньютонометрах (Н м).

2.5.3. Теорема про момент рівнодіючої системи збіжних сил (теорема Варіньона)

Момент рівнодіючої системи збіжних сил відносно довільного центра дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно того ж центра, тобто:

$$\overline{M}_o(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_o(\overline{F}_k).$$

Розглянемо просторову систему збіжних сил $\overline{F}_k$, лінії дії яких перетинаються в точці *A*. Позначимо через $\overline{r}$ радіус-вектор точки *A* (рисунок 2.5.3,а) відносно довільно обраного нерухомого початку відліку *O*. Знайдемо рівнодіючу заданої системи сил $\overline{R}$ за допомогою побудови силового багатокутника (рисунок 2.5.3,б).

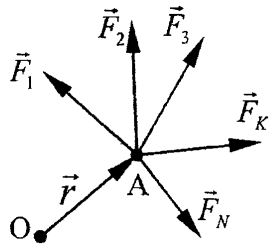


Рисунок 2.5.3,а – Просторова система збіжних сил

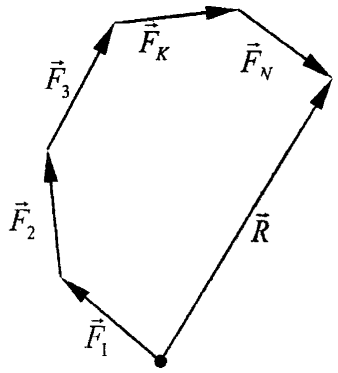


Рисунок 2.5.3,б – Силовий багатокутник

З визначення вектора моменту відносно центра О отримаємо:

$$\overline{M}_o(\overline{R}) = \overline{r} \times \overline{R} = \overline{r} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n) = \overline{r} \times \overline{F}_1 + \overline{r} \times \overline{F}_2 +$$
$$+ \overline{r} \times \overline{F}_3 + ... + \overline{r} \times \overline{F}_n = \overline{M}_o(\overline{F}_1) + \overline{M}_o(\overline{F}_2) + \overline{M}_o(\overline{F}_3) + ... + \overline{M}_o(\overline{F}_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_o(\overline{F}_k).$$

Якщо розглядається плоска система збіжних сил, то їх вектори моментів перпендикулярні площині, в якій ці сили діють та проходять через центр - точку *O*, тобто лежать на одній прямій. Тому момент рівнодіючої такої системи сил відносно деякого центра дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно тієї ж точки:

$$M_o(\overline{R}) = \sum M_o(\overline{F}_k).$$

2.5.4. Момент сили відносно осі

Коли сила, що прикладена до тіла, прагне повернути його не навколо деякого центра, а навколо деякої осі, тоді обертальний ефект характеризується моментом сили відносно осі.

Розглянемо тверде тіло, яке має вісь *Z*, закріплену в підшипниках як наведено на рисунку 2.5.4. Нехай на це тіло діє сила $\overline{F}$, що прикладена в точці *A*.

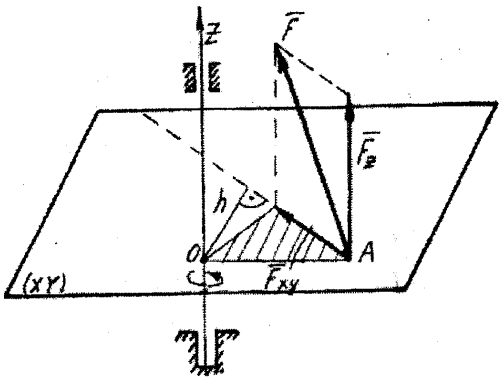


Рисунок 2.5.4 – Момент сили відносно осі

Проведемо через точку *A* площину *XУ* перпендикулярно вісі *Z* та розкладемо силу $\overline{F}$ на складові: $\overline{F}_z$ паралельно вісі *Z*, та $\overline{F}_{xy}$, яка лежить в площині *XУ* ($\overline{F}_{xy}$ - це проекція сили на площину *XУ*). Очевидно, що сила $\overline{F}_z$ не може повернути тіло навколо осі *Z*, а тільки порушує його вздовж цієї осі.

Обертальний ефект утворюється тільки силою $\overline{F}_{xy}$, тобто:

$$m_z(\overline{F}) = m_z(\overline{F}_{xy}),$$

де $\overline{m}_z\left(\overline{F}\right)$ – позначає момент сили $\overline{F}$ відносно осі *Z*.

Але момент сили $\overline{F}_{xy}$ відносно осі *Z* можна визначити як момент цієї сили відносно точки *O*:

$$m_z(\overline{F}_{xy}) = m_o(\overline{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Таким чином, ***моментом сили відносно осі називається алгебраїчна величина, яка дорівнює моменту проекції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною.***

Момент будемо рахувати додатнім, якщо поворот, який прагне зробити тіло під дією сили $\overline{F}_{xy}$, видний з додатнього кінця осі *Z*, таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки. При виконанні правила, згідно з яким визначаються моменти сил відносно осей, слід мати на увазі, що цей момент дорівнює нулю, коли лінія дії і вісь лежать в одній площині, тобто сила або паралельна вісі, або її перетинає.

2.5.5. Зв'язок між моментами сили відносно центра та осі

Розглянемо тіло, на яке діє прикладена в точці *A* сила $\overline{F}$, як наведено на рисунку 2.5.5.

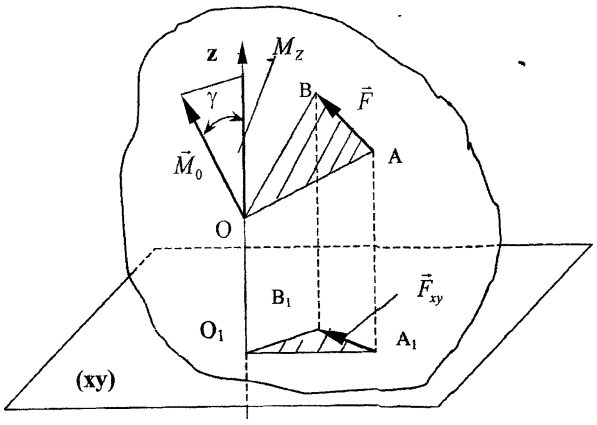


Рисунок 2.5.5 – Зв'язок між моментами сили відносно центра та осі

Проведемо вісь *Z*, та оберемо на ній довільну точку *O*. Тоді вектор $\overline{M}_0$ буде зображати момент сили $\overline{F}$ відносно точки *O*. Цей вектор перпендикулярний площині трикутника *OAB*, причому: $M_o = 2пл.\Delta OAB.$

Тепер проведемо через будь-яку точку O_1 на вісі *Z* площину *XУ*, перпендикулярну до осі, спроектуємо силу $\overline{F}$ на цю площину та знайдемо $m_z(\overline{F})$:

$$m_z(\overline{F}) = m_o(\overline{F}_{xy}) = 2пл.\Delta O_1A_1B_1.$$

Так як усі вершини $\Delta O_1A_1B_1$ є проекціями вершин ΔOAB, то саме трикутник $O_1A_1B_1$ є проекцією ΔOAB на площину *XУ*. Враховуючи, що кут між площинами цих трикутників дорівнює куту між перпендикулярами до площин, тобто куту γ, будемо мати: $пл.\Delta O_1A_1B_1 = пл.\Delta OAB\cos\gamma.$

Використовуючи попередні вирази, знайдемо остаточно:

$$M_z(\overline{F}) = M_{oz} = M_o\cos\gamma.$$

Так як точки *O* та O_1 на вісі *Z* обрані довільно, то одержаній результат не залежить від положення точок *O* та O_1 і на вісі, незалежно від того, що змінюються як величина, так і напрям вектора $\overline{M}_0$.

Таким чином: момент сили $\overline{F}$ відносно осі дорівнює проекції на цю вісь вектора, який зображує момент даної сили відносно будь-якого центра, що належить вісі.

2.5.6. Аналітичні вирази моментів сили відносно координатних осей

Розглянемо силу $\overline{F}$, яку наведено на рисунку 2.5.6., прикладену в точці *A* системи координат *XOYZ*.

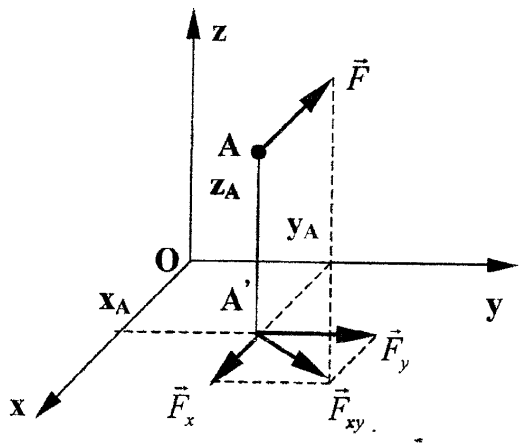


Рисунок 2.5.6 – Аналітичні вирази моментів сили відносно осей

Точка прикладення *A* має координати *x, y, z*. Знайдемо аналітичний вираз для моменту сили $\overline{F}$ відносно осі *Z*. Спроектуємо силу $\overline{F}$ на площину *OXY*. Одержану проекцією $\overline{F}_{xy}$ розкладемо на складові $\overline{F}_x$ та $\overline{F}_y$, модулі яких, як відомо, дорівнюють проекціям сили $\overline{F}$ на вісі *X* та *Y*.

Тоді: $m_z(\overline{F}) = m_o(\overline{F}_{xy})$.

За теоремою Варіньона:

$$m_o(\overline{F}_{xy}) = m_o(\overline{F}_x) + m_o(\overline{F}_y).$$

Знайдемо моменти сил $\overline{F}_x$ та $\overline{F}_y$:

$$m_o(\overline{F}_x) = -yF_x; m_o(\overline{F}_y) = xF_y.$$

Тоді, остаточно:

$$m_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x.$$

Аналогічно обчислюються моменти відносно інших двох осей. В результаті одержимо:

$$\begin{cases} m_x(\overline{F}) = yF_z - zF_y \\ m_y(\overline{F}) = zF_x - xF_z \\ m_z(\overline{F}) = xF_y - yF_x. \end{cases}$$

Таким чином, знаючи проекції сили та координати точки її прикладення, можна визначити моменти сил відносно осей координат.

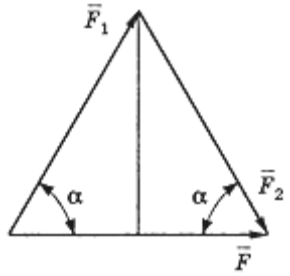
Приклад 1

Силу в 8 Н розкласти на дві по 5 Н кожна. Чи можна ту ж силу розкласти на дві по 10 Н, 15 Н, 20 Н і т.д.? На дві по 100 Н?

Розв'язування

Позначимо силу, яку потрібно розкласти, через F, дві інші-відповідно F, I F_2. Зобразимо на малюнку силу F як підстава рівнобедреного (так як $F = F_2$) трикутника.
Зважаючи на рівність кутів нахилу F_1 і F_2 до горизонту, отримаємо

$$F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = F \Rightarrow \cos\alpha = \frac{F}{F_1 + F_2} = \frac{F}{2F_1},$$



де F_1 =8 Н, F_2 =5 Н.
Тоді cosα = 0,8 і, вибравши відповідний кут,
силу F можна розкласти на F_1
і F_2, $F_1 = F_2 = 5$ Н.
Аналогічно можна вирішити задачу для
F_1 =10 Н, 20 Н,..., 100 Н, кожен раз визначаючи потрібний кут.
Це рішення годиться для випадку, коли не вказані розкладання сил.
Відповідь: Так, якщо не задані напрямки розкладання.

Приклад 2

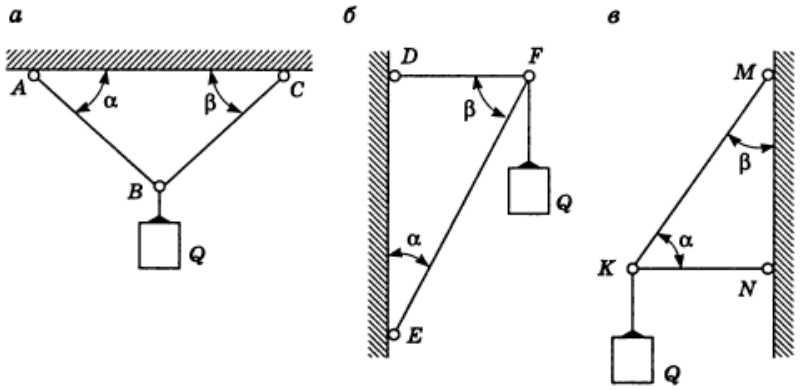
На рисунках а, б і в, як і в попередній задачі, схематично зображені стрижні, з'єднані між собою, зі стелею і стінами за допомогою шарнірів. До шарнірним болтів B, F і K підвішені вантажі Q = 1000 Н.

Визначити зусилля в стержнях для випадків:

а) α=β=45°;

б) α=30°, β=60°;

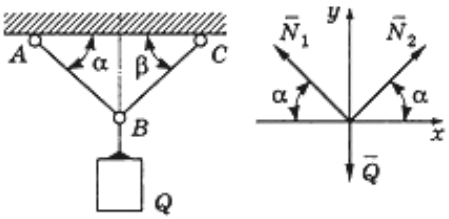
в) α=60°, β=30°.



Розв'язування

а) розглянемо рівновагу вузла B

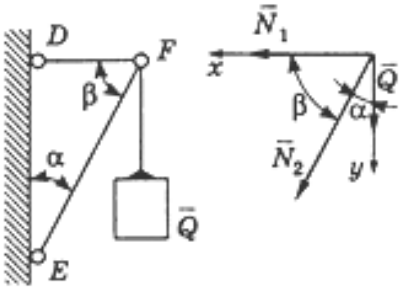
$$\begin{cases} -N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0, \\ (N_1 + N_2)\sin\alpha = Q. \end{cases}$$



Отже

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2\sin\alpha} = \frac{1000}{2\sin 45^\circ} = 707 \text{ Н}.$$

б) розглянемо рівновагу вузла F

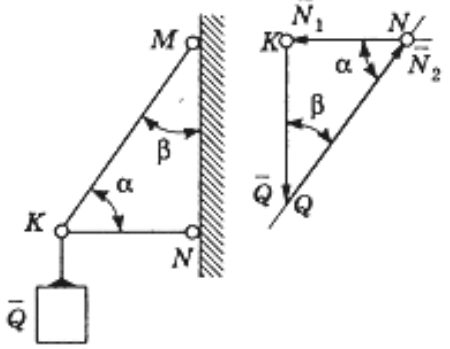


$$\begin{cases} N_1 + N_2\cos\beta = 0, \\ N_2\cos\alpha + Q = 0, \end{cases}$$

с) розглянемо рівновагу вузла К

$$N_2 = -\frac{Q}{\cos\alpha} = -\frac{1000}{\cos 30^\circ} = -577 \text{ Н},$$

$$N_1 = -Q\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = -1000\frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = -1154 \text{ Н}.$$



З силового трикутника KMN знайти

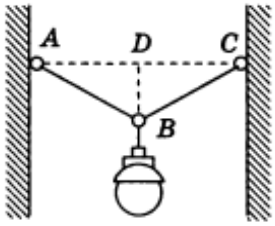
$$N_1 = Q\,\mathrm{tg}\,\beta = 577 \text{ Н},$$

$$N_2 = \frac{Q}{\cos\beta} = 1154 \text{ Н}.$$

Відповідь: а) $N_1 = N_2 = 707$ Н;
б) $N_1 = -557$ Н, $N_2 = -1154$ Н;
в) $N_1 = 557$ Н, $N_2 = 1154$ Н.

Приклад 3

Вуличний ліхтар підвішений в точці В до середини троса АВС, прикріпленого кінцями до гаків А і С, що знаходяться на одній горизонталі. Визначити натягу T_1 і T_2 в частинах троса АВ і ВС, якщо вага ліхтаря дорівнює 150 Н, довжина всього троса АВС дорівнює 20 м і відхилення точки його підвісу від горизонталі BD = 0,1 м. Вагою троса знехтувати.

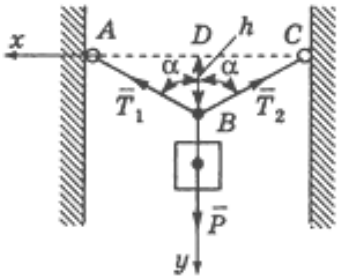


Розв'язування

Покажемо на рисунку сили, що діють на систему, і реакції зв'язків.

Складемо рівняння рівноваги вузла В:

$$\begin{cases} T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha = 0, \\ P - T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha = 0. \end{cases}$$



З першого рівняння системи випливає
$T_1 = T_2$, тому з другого рівняння отримаємо

$$2T_1 \cos\alpha = P.$$

$\cos\alpha = \dfrac{2h}{l}$, то

Оскільки

$$2T_1 = \frac{Pl}{4h} = \frac{150 \cdot 20}{4 \cdot 0{,}1} = 7500 \text{ Н} = 7{,}5 \text{ кн}.$$

Відповідь: $T_1 = T_2 = 7{,}5$ кН.

Приклад 4

Однорідна куля радіусом r=0,2 м і вагою P=120 Н, що дотикається у точці В до гладенької вертикальної дошки (рис. 1) утримується в рівновазі мотузкою АС завдовжки 0,8 м. Визначити натяг мотузки та тиск кулі на стінку, якщо відстань від точки В до вертикалі СБ дорівнює 0,4 м.

Розв'язування

Сила P відома з умови, відповідно, на неї діють: мотузка, стінка і сила ваги, в'язами для кулі є стінка і мотузка *AC*. Сили P, T, R_B складають плоску систему збіжних сил, для якої складемо два рівняння рівноваги відносно вибраної системи координат:

$$\Sigma F_x = R_B - T\sin\alpha = 0;$$

$$\Sigma F_y = T\cos\alpha - P = 0.$$

Оскільки стінка гладенька, то реакція R_B буде перпендикулярною до стінки. Реакція мотузки T напрямлена по ній.

Із рівняння (2) визначимо силу T:

$$T=\frac{P}{cos\alpha}=\frac{120}{\sqrt{0,6}}=122\ H.$$

Де cosα находимо з рівняння $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

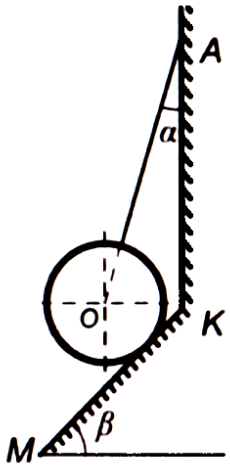
Знаючи T із рівняння (1), визначимо реакцію R_B:

$$R_B = T\sin\alpha = 122 \cdot 0,2 = 24,4\ H.$$

Відповідь: куля тисне на стінку з силою R_B = 24,4 Н і розтягує мотузку з силою: T =122 Н.

Приклад 5

Циліндр вагою G=200 Н утримується ниткою ОА на ідеальній гладкій похилій площині МК, під кутом до горизонту β = 45° та здійснює на площину тиск Q = 60 Н. Визначити кут α й силу натягу нитки T.



Дано:
G=200 Н;
Q = 60 Н;
β = 45°.
Знайти: α, T.

Розв'язування

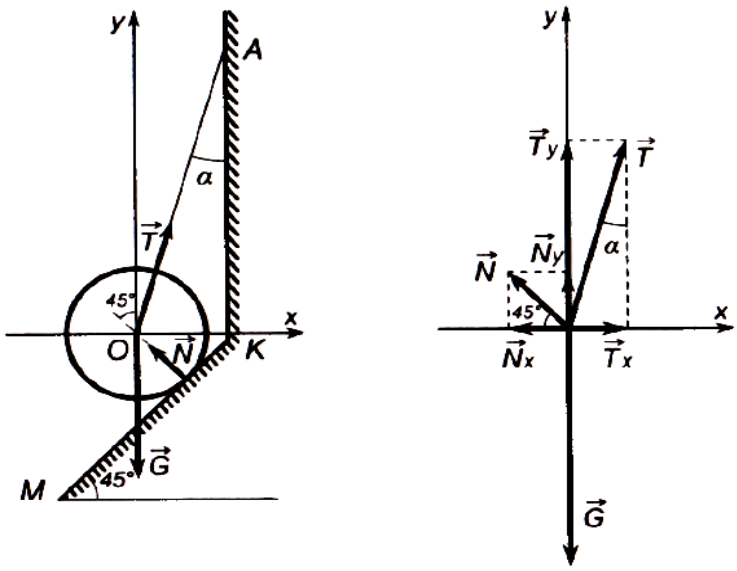
На тверде тіло (циліндр) діють наступні сили: вага тіла G, реакція похилій площині N і натяг нитки T. Ці сили утворюють систему сходяться сил. Сила реакції похилій площині N дорівнює за величиною тиску циліндра Q на площину, тобто N = Q. Сили реакції N і тиску Q спрямовані в протидії - протилежні: N = - Q (аксіома дії і протидії). тиск Q докладено до опори, сила реакції N прикладена до циліндра.

Вирішимо задачу двома способами.

1-й спосіб (аналітичний)

Аналітичні рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил мають вид:

$$\begin{cases}\sum F_{ix} = 0;\\ \sum F_{iy} = 0.\end{cases}$$



а) б)

Рисунок 1

Виконаємо розрахункову схему (рис. 1 а і 1 б). Складемо рівняння рівноваги для заданої системи сил:

$$\begin{cases} T \cdot \sin\alpha - N \cdot \sin 45° = 0; \\ T \cdot \cos\alpha + N \cdot \cos 45° - G = 0. \end{cases}$$

З рівняння (1) висловимо значення сили:

$$T = N \cdot \frac{\sin 45°}{\sin\alpha}$$

і підставимо його в рівняння (2). Тоді

$$N \cdot \sin 45° \cdot \operatorname{ctg}\alpha + N \cdot \cos 45° - G = 0.$$

Отримаємо

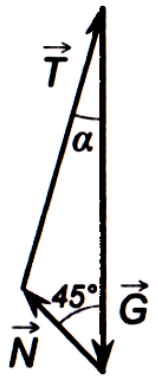
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{G - N \cdot \cos 45°}{N \cdot \sin 45°} = \frac{200 - 60 \cdot 0{,}7}{60 \cdot 0{,}7} \approx 3{,}8;$$

$$\alpha = \operatorname{arcctg} 3{,}8 = 15°.$$

Отже, натяг нитки дорівнюватиме:

$$T = 60 \cdot \frac{\sin 45°}{\sin 15°} = 60 \cdot \frac{0,7}{0,26} \approx 163 \text{ Н}.$$

2-й спосіб (графічний)



Зобразимо в масштабі відомий за величиною і напрямком вектор сили G.

З його кінця під кутом 45° відкладемо в тому ж масштабі вектор N. Відрізок, що з'єднує кінець вектора N і початок вектора G, і буде шуканої величиною вектора T. Вимірявши довжину цього відрізка і помноживши її на масштаб, знайдемо чисельне значення сили T.

Це ж значення можна знайти і по теоремі косинусів:

$$T = \sqrt{G^2 + N^2 - 2 \cdot G \cdot N \cdot \cos 45°} \approx 163 \text{ Н}.$$

Кут α визначимо або прямим вимірюванням на кресленні, або по теоремі синусів

$$\frac{N}{\sin \alpha} = \frac{T}{\sin 45°}$$

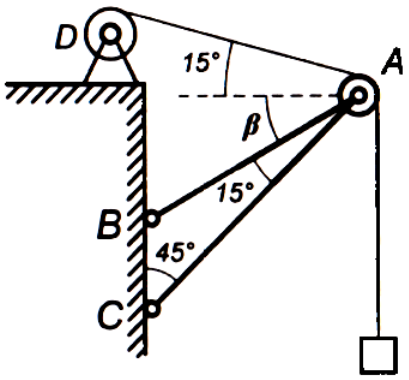
отримаємо

$$\sin \alpha = N \cdot \frac{\sin 45°}{T} = \frac{60 \cdot 0,7}{163} = 0,26.$$

Кут α дорівнює: $\alpha = \arcsin 0,26$; $\alpha = 15°$.

Приклад 3

Вантаж вагою G = 3000 Н підвішений за допомогою каната, перекинутого через блок A і намотаного на лебідку D. Визначити зусилля в стержнях AB і AC. Кути вказані на малюнку. Розмірами блоків знехтувати.



Дано:

G = 3000 Н.

Знайти: *S1, S2*

Розв'язування

Застосувавши принцип звільнення від зв'язків, покажемо сили, що діють на блок А. Це натяг ниток (Т і G) і зусилля в стержнях АВ і АС і S2). Ці сили утворюють систему сходяться сил. Позначимо на малюнку кути а і р, і визначимо їх з геометричних міркувань: α = 75°, β = 30°.

1-й спосіб (аналітичний)

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

З урахуванням того, що Т = G (сили натягу нитки по обидві сторони блоку чисельно рівні), рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} -T \cdot \sin 75° - S_1 \cdot \cos 30° - S_2 \cdot \sin 45° = 0; \\ T \cdot \cos 75° - S_1 \cdot \sin 30° - S_2 \cdot \cos 45° - G = 0. \end{cases}$$

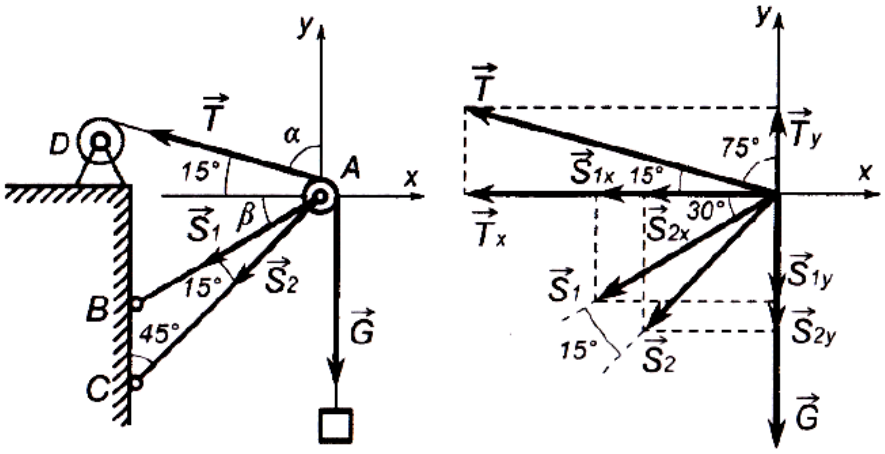


Рисунок 2

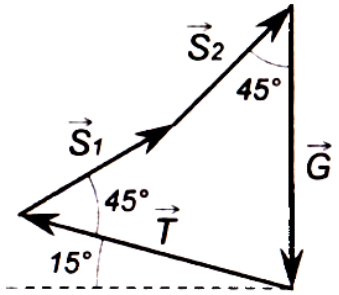
Вирішивши систему рівнянь (1), (2), знайдемо

S1 = -1840 Н,
S2 = - 1840 Н.

Знак мінус означає, що показанні на рис. 2 сили S1 і S2 спрямовані в протилежну сторону, тобто стрижні АВ і АС стиснуті.

2-й спосіб (графічний)

Побудова силового багатокутника почнемо з зображення в масштабі відомого за величиною і напрямком вектора сили G.

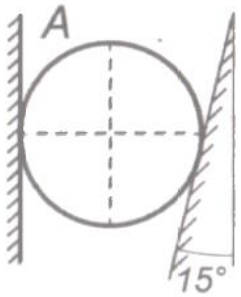


З його кінця під кутом 15°(90° - α) до горизонту відкладемо в тому ж масштабі вектор Т. З початку вектора G і кінця вектора Т проведемо прямі, паралельні АС і АВ відповідно. Точка їх перетину відсіче на прямих відрізки, пропорційні величинам шуканих векторів. Вимірявши довжини відрізків і помноживши їх на масштаб, знайдемо чисельні значення S1 і S2.

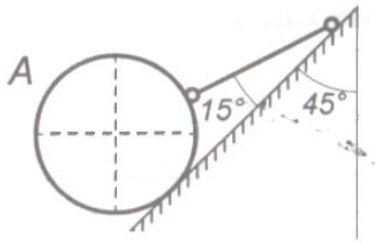
$$S_1 = 1840 \text{ Н}, S_2 = 1840 \text{ Н}.$$

<u>Завдання.</u> Однорідний шар А вагою G=12 кН утримується опорами в рівновазі. Визначити сили реакції опор для заданих геометричних параметрів механічних систем. Вирішити задачу аналітично і геометрично.

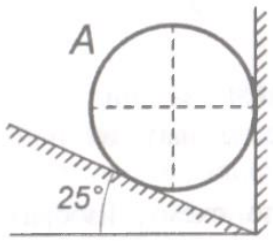
Варіант №1, 5



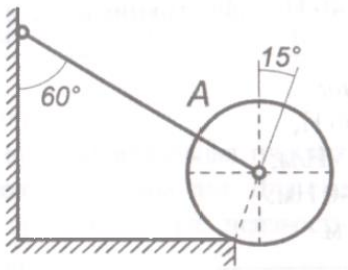
Варіант №2, 6



Варіант №3, 7



Варіант №4, 8



Контрольні запитання

1. Наведіть приклади зосереджених і розподілених сил.
2. Що називається рівнодіючої системи сил?
3. Яка сила називається врівноважує?

4. Дайте визначення зовнішньої і внутрішньої сили.
5. Сформулюйте аксіому про рівновагу двох сил.
6. Що таке система сил?
7 Які системи сил називаються еквівалентними?
8. Що таке рівнодіюча і урівноважує сила?
9. Які системи сил називаються статично еквівалентними?
10. У чому подібність між рівнодіючої і врівноважує сил і чим вони один від одного відрізняються?
11. Сформулюйте першу, другу, третю і четверту аксіоми статики.

ТЕМА 3. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ

План

3.1. Пара сил. Момент пари.
3.2. Теорема про моменти сил пари.
3.3. Теорема про еквівалентність пар, що лежать в одній площині.
3.4. Теорема про еквівалентність пар у просторі.
3.5. Додавання пар сил.
3.6. Умови рівноваги пар в площині та в просторі.
3.7. Лемма про паралельне перенесення сили.

При розгляданні системи паралельних сил можна виділити такі випадки дії двох сил, які приводять до теорії пар сил - в залежності від напрямів та величин цих сил.

3.1. Пара сил. Момент пари

Парою сил (або просто парою) називається система з двох паралельних, рівних за величиною, протилежно спрямованих та не лежачих на одній прямій сил $\{\overline{P},\ \overline{P}'\}$***, що прикладені до абсолютно твердого тіла***, як наведено на рисунку 3.1,а.

Дія пари сил зводиться до деякого обертального ефекту, якщо цьому не перечать накладені на тіло в'язі. Назвемо площину, в якій лежать сили пари, площиною дії пари. Найкоротша відстань d між лініями дії сил пари - плече пари.

Обертальний ефект від дії пари сил на тіло залежить від наступних факторів: величин сил пари; плеча пари d; положення площини дії пари; напряму повороту в цій площині.

Кількісно цей обертальний ефект може бути охарактеризовано моментом пари, якому за аналогією з моментом сили можна дати наступне визначення: алгебраїчним моментом пари називається величина, яка дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля однієї з сил пари на її плече:

$$m = \pm P \cdot d.$$

Враховуючи, що знак момента пари визначає напрям повороту (проти хода годинникової стрілки – додатній, а за ходом – від'ємний), то ця формула повністю характеризує обертальний ефект дії на тіло пари сил. Формула, однак, не дає нам можливості визначити положення площини дії пари сил в просторі.

Момент пари сил можна подати вектором, модуль якого дорівнює величині момента пари, і спрямовано цей вектор перпендикулярно площині дії пари сил у той бік, відкіля поворот тіла під дією пари сил виден таким, що відбувається проти хода годинникової стрілки, як наведено на рисунку 3.1,б.

Вектор момента пари сил за аналогією з моментом сили відносно центра можна зобразити у вигляді векторного добутку радіуса-вектора *AB* (якщо прийняти за центр точку *A*) та вектора сили $\overline{F}_2$, або радіуса-вектора *BA* та вектора другої сили пари $\overline{F}_1$: $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{BA} \times \overline{F}_1$.

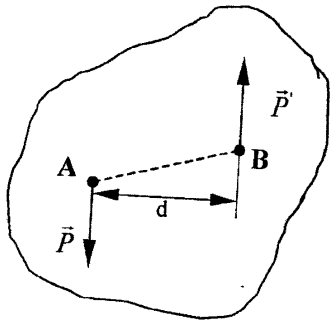


Рисунок 3.1, а – Пара сил

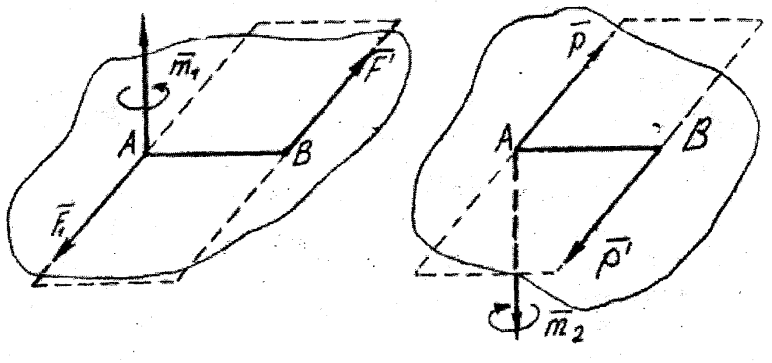


Рисунок 3.1, б – Момент пари сил

Якщо розглядаються тільки пари сил, що мають спільну площину дії, то цю площину часто сполучають з площиною креслення.

3.2. Теорема про моменти сил пари

Геометрична сума моментів сил, які належать парі, відносно будь-якої нерухомої точки дорівнює моменту цієї пари сил і не залежить від вибору точки.

Нехай на тіло діє пара сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$), як наведено на рисунку 3.2.

Виберемо довільну точку *O* та найдемо суму моментів сил пари відносно цієї точки. Врахуємо, що $\overline{r}_1 + \overline{AB} = \overline{r}_2$, тоді:

$$\overline{M}_o(\overline{F}_1) + \overline{M}_o(\overline{F}_2) = \overline{AB} \times \overline{F}_2.$$

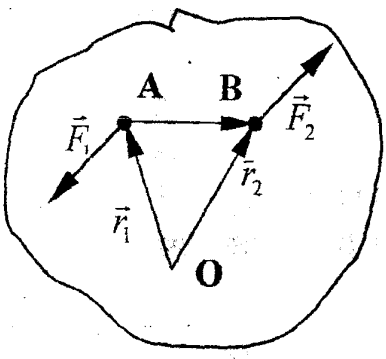


Рисунок 3.2 – Моменти сил пари

Ця формула співпадає з формулою для вектора момента пари сил. Таким чином:

$$\overline{M}_o(\overline{F}_1)+\overline{M}_o(\overline{F}_2)=\overline{M}(\overline{F}_1,\overline{F}_2)=\overline{M}.$$

Так як точка *O* обрана довільно, то, якщо взяти замість неї точку *A* або *B*, будемо мати: $\overline{M}_A(\overline{F}_2)=\overline{M}_B(\overline{F}_1)=\overline{M}$.

Цей результат можна сформулювати у вигляді наслідку з теореми: вектор момента пари сил дорівнює векторному моменту однієї з сил пари відносно точки прикладення другої сили пари.

Для окремого випадку, коли моментна точка *O* лежить в площині дії пари сил, справедлива наступна теорема: ***алгебраїчна сума моментів сил пари відносно точки, що лежить в площині дії пари сил, дорівнює алгебраїчному моментові пари сил:***

$$M_o(\overline{F}_1)+M_o(\overline{F}_2)=M(\overline{F}_1,\overline{F}_2).$$

3.3. Теорема про еквівалентність пар, що лежать в одній площині

Пари сил вважаються еквівалентними, якщо вони чинять однакову дію на тверде тіло. Умови, за якими пари, що лежать в одній площині, еквівалентні: пару сил, прикладену до твердого тіла, можливо замінити будь-якою парою, що лежить у тій же площині дії та має той же алгебраїчний момент.

Інакше кажучи, дві пари сил, які розташовані в одній площині, еквівалентні, якщо вони мають однакові алгебраїчні моменти (тобто однакові величини та знаки).

Хай на тверде тіло діє пара сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$), яка має плече d_1, та хай сили $\overline{F}_1$ та $\overline{F}_2$ прикладені в будь-яких точках *A* та *B* на лініях дії сил, як наведено на рисунку 3.3. Проведемо через ці точки будь-які паралельні прямі *AD* та *BE*, які лежать в площині дії пари сил ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$). Найкоротша відстань між цими прямими d_2. Розкладемо кожну з сил пари $\overline{F}_1$та $\overline{F}_2$на складові вздовж напрямів *AB* та *AD* (для сили $\overline{F}_1$) та *AB* і *BE* (для сили $\overline{F}_2$), тобто $\overline{P}_1, \overline{Q}_1$ та $\overline{P}_2, \overline{Q}_2$ відповідно. Очевидно, що при цьому $\overline{P}_2=-\overline{P}_1$ та $\overline{Q}_2=-\overline{Q}_1$.

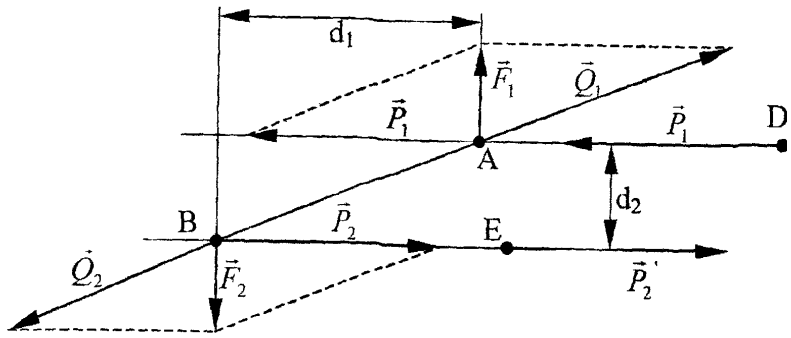


Рисунок 3.3 – Еквівалентність пар, що лежать в одній площині

Сили $\overline{Q}_1$ та $\overline{Q}_2$, які лежать на одній прямій, становлять еквівалентну нулю систему сил і тому можуть бути відкинуті.

Залишається система сил ($\overline{P}_1, \overline{F}_1$), що являє собою пару сил і вона має той же напрямок обертання, що і пара ($\overline{P}_2, \overline{F}_2$), але інші величини сил та плече.

В результаті проведених побудувань пара сил ($\overline{F}_1, \overline{F}_2$) замінюється іншою парою сил ($\overline{P}_1, \overline{P}_2$), сили якої можна перенести вздовж ліній їх дії в будь-які точки, наприклад, в довільні точки *D* та *E*, тоді пара ($\overline{P}_1^{'}, \overline{P}_2^{/}$) може виявитися розташованою де завгодно в площині дії пари ($\overline{F}_1, \overline{F}_2$).

У відповідності з теоремою Варіньона:

$$m_B(\overline{F}_1) = m_B(\overline{Q}_1) + m_B(\overline{P}_1),$$

Але

$$m_B(\overline{Q}_1) = 0; m_B(\overline{P}_1) = P_1 \cdot d_2; m_B(\overline{F}_1) = F_1 \cdot d_1.$$

Тоді

$$F_1 \cdot d_1 = P_1 \cdot d_2.$$

Тобто, моменти двох пар алгебраїчне дорівнюють одне одному. З теореми витікають властивості пар сил:

1. Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести куди завгодно та як завгодно повертати в площині її дії.

2. Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо зміняти величину сили та плече, але при цьому зберігати величину моменту та площину дії пари.

Отже, головною характеристикою пари сил, мірою її механічної взаємодії, є момент.

3.4. Теорема про еквівалентність пар у просторі

Дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо пару перенести з даної площини в будь-яку іншу, яка їй паралельна.

Розглянемо пару сил ($\overline{F}_1, \overline{F}'$), що лежить у площині I, як наведено на рисунку 3.4. Проведемо площину II паралельно площині I, та візьмемо на ній відрізок DE, рівний та паралельний AB. В точках D та E прикладемо чотири попарно зрівноважені сили, таких, що $\overline{F}_1 = \overline{F}_2 = \overline{F}$, $\overline{F}_1' = \overline{F}_2' = \overline{F}_2$.

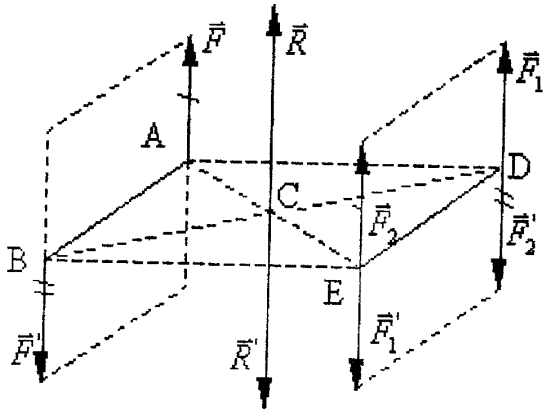


Рисунок 3.4 – Еквівалентність пар у просторі

Фігура ABED є паралелограмом, діагоналі якого в точці перетинання C діляться навпіл. Додамо тепер паралельні сили $\overline{F}$ та $\overline{F}_2$; вони, як рівні за модулем, заміняться рівнодіючою $\overline{R}$, прикладеною в середині відрізка AE, тобто в точці C, при цьому $R = 2F$.

Сили ж $\overline{F}'$ та $\overline{F}'_2$ заміняться після додавання рівнодіючою $\overline{R}'$, прикладеною в середині відрізка BD, тобто, теж в точці C, при цьому $R' = 2F = R$.

Внаслідок цього сили $\overline{R}$ та $\overline{R}'$ як зрівноважені, можна відкинути.

В результаті залишається тільки система з двох сил ($\overline{F}_1, \overline{F}'$), яка становить собою пару сил, що дорівнює парі ($\overline{F}, \overline{F}'$), так як вони мають однакові сили, однакові плечі, а також однакові напрямки повороту площин *I* та *II*.

3.5. Додавання пар сил

Розглянемо додавання пар сил, які розташовані у площинах, що перетинаються, та доведемо теорему: ***будь-яка система пар, діючих на тверде тіло, еквівалентна одній парі з моментом, що дорівнює геометричній сумі моментів додаваємих пар.***

Доведемо спочатку теорему для випадку, коли на тіло діють дві пари сил з моментами $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$, які лежать в площинах *I* та *II*, як наведено на рисунку 3.5.

На лінії перетину цих площин оберемо відрізок *AB*, в точках *A* та *B* якого прикладемо пари сил з моментами $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$. Ці пари зобразимо силами $\overline{F}_1, \overline{F}'_1$ та $\overline{F}_2, \overline{F}'_2$ відповідно.

Очевидно, що

$$M_1 = F_1 \cdot AB, a\, M_2 = F_2 \cdot AB.$$

Тепер додамо сили, прикладені в точках *A* та *B*:

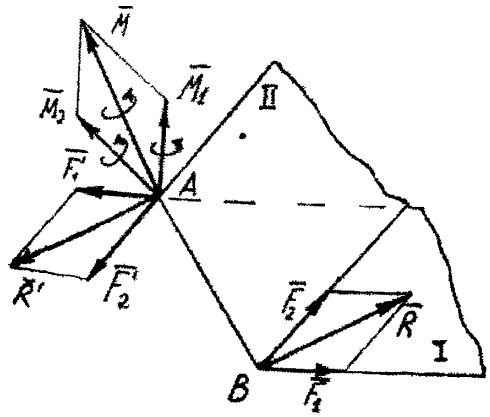


Рисунок 3.5 – Додавання пар сил

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2, \text{ та } \overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2'.$$

Очевидно, що $\overline{R}' = -\overline{R}$, тобто, сили $\overline{R}$ та $\overline{R}'$ становлять собою пару сил, момент якої $\overline{M} = \overline{AB} \times \overline{R} = \overline{AB} \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_2) = \overline{AB} \times \overline{F}_1 + \overline{AB} \times \overline{F}_2$

Так як:

$$\overline{AB} \times \overline{F}_1 = \overline{M}_1,\ \overline{AB} \times \overline{F}_2 = \overline{M}_2, \text{ тоді}$$
$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$$

Вектор досліджуваного момента $\overline{M}$ зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M}_1$ та $\overline{M}_2$.

Якщо ж на тіло діє n пар сил з моментами $\overline{M}_1,\ \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$, то дана система пар буде замінюватися однією парою з моментом:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k.$$

Вектор $\overline{M}$ можна знайти як замикаючий векторного багатокутника, який складається з векторів $\overline{M}_1,\ \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$.

Формула може бути записаною в проекціях на вісі прямокутної системи координат: $M_x = \sum M_{kx}; M_y = \sum M_{ky}; M_z = \sum M_{kz}$.

Модуль вектора розраховується за формулою: $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$.

Якщо усі пари сил лежать в одній площині дії, то вектори моментів цих пар будуть паралельні, і тоді їх можна додавати алгебраїчне, тобто: ***система пар, які лежать в одній площині, еквівалентна одній парі, що лежить у тій же площині і має момент, дорівнюючий алгебраїчній сумі моментів додаваємих пар:*** $M = \sum M_k$.

3.6. Умови рівноваги пар в площині та в просторі

Оскільки будь-яка система пар замінюється однією парою, то при рівновазі повинно бути відсутнім обертання тіла, тобто, $\overline{M}$ ***= 0 або*** $\sum \overline{M}_k = 0$ ·

Багатокутник, побудований з векторів моментів діючих на тіло пар сил, повинен бути замкнений. Це геометрична форма умов рівноваги системи сил. Аналітичні умови рівноваги системи пар відбивають рівність нулю алгебраїчних сум моментів прикладених до тіла пар відносно координатних осей, тобто:

$$\sum M_{kx} = 0 \; ; \; \sum M_{ky} = 0 \; ; \; \sum M_{kz} = 0 \; \cdot$$

3.7. Лемма про паралельне перенесення сили

Засіб приведення довільної системи сил до збіжної системи з метою її спрощення. Такий метод дає наступна лемма про паралельне перенесення сили: ***силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна, не змінюючи її дії на тіло, переносити паралельно самій собі в будь-яку точку тіла, додаючи при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту перенесеної сили відносно нової точки прикладення сили.***

Нехай в точці *A* твердого тіла прикладена сила $\overline{F}$, як наведено на рисунку 4.7. Виберемо довільну точку *O* на тілі та прикладемо в ній систему з двох сил $\overline{F}'$ та $\overline{F}''$, еквівалентну нулю, так, що $\overline{F}' = \overline{F}$ =- $\overline{F}''$. Тоді сила $\overline{F}$ буде еквівалентна системі з 3-х сил $\overline{F}$, $\overline{F}'$, $\overline{F}''$. Але сили $\overline{F}$ та $\overline{F}''$ становлять собою пару сил ($\overline{F}$, $\overline{F}''$) і тоді можна сказати, що сила $\overline{F}$ еквівалентна силі $\overline{F}'$ та парі сил ($\overline{F}'$, $\overline{F}''$).

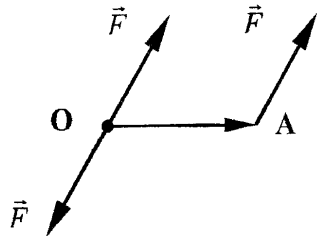


Рисунок 3.7 – Паралельне перенесення сили

Оскільки сили $\overline{F}'$ та $\overline{F}''$ дорівнюють одна одній векторно, то результат приєднання еквівалентної нулю системи сил можна інтерпретувати як паралельне перенесення сили $\overline{F}$ з точки *A* в точку *O* у вигляді рівної сили $\overline{F}'$ та приєднання пари сил ($\overline{F}'$, $\overline{F}''$). Момент цієї пари:

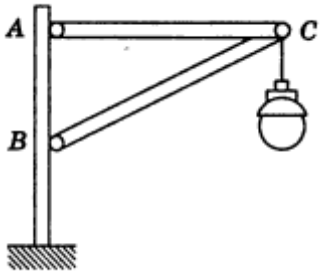
$$\overline{M} = \overline{M}(\overline{F}', \overline{F}'') = \overline{OA} \times \overline{F},$$

тобто дорівнює моменту перенесеної сили $\overline{F}$ відносно точки *O* (тієї точки, куди сила $\overline{F}$ переноситься): $\overline{M} = \overline{M}_o(\overline{F})$.

Пара сил ($\overline{F}'$, $\overline{F}''$) називається приєднаною парою сил.

Приклад 1

Вуличний ліхтар ваги 300 Н підвішений до вертикального стовпа за допомогою горизонтальної поперечини АС = 1,2 м і підкоса ВС = 1,5 м. Знайти зусилля S1 і S2 в стрижнях АС і ВС, вважаючи кріплення в точках А, В і С шарнірними.



Розв'язування

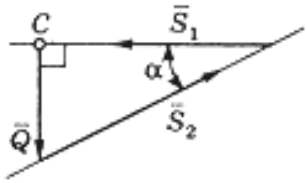
Визначимо відстань $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 0{,}9$ м.

Побудуємо силовий трикутник (см. рис). Так як вузол С знаходиться в рівновазі, то

$$\overline{Q} + \overline{S}_2 + \overline{S}_1 = 0.$$

$$\frac{S_1}{Q} = \frac{AC}{AB}, \quad S_1 = Q\frac{AC}{AB} = 300 \cdot \frac{1{,}2}{0{,}9} = 400 \text{ Н},$$

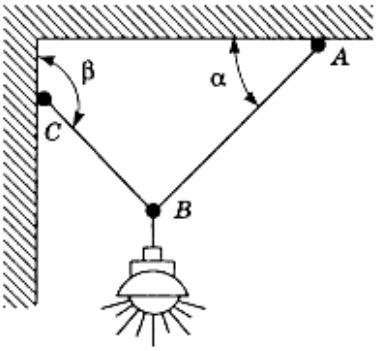
$$\frac{S_2}{Q} = \frac{BC}{AB}, \quad S_2 = Q\frac{BC}{AB} = 300 \cdot \frac{1{,}5}{0{,}9} = 500 \text{ Н}.$$



Відповідь: $S_1 = 400$ Н; $S_2 = 500$ Н.

Приклад 2

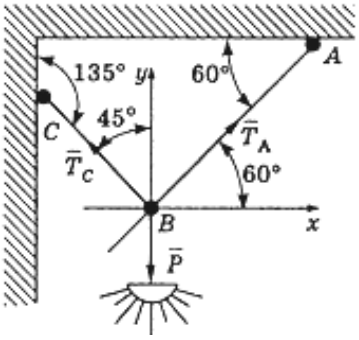
Електрична лампа ваги 20 Н підвішена до стелі на шнурі АВ і потім відтягнути до стіни мотузкою ВС. Визначити натягу: ТА шнура АВ і ТС мотузки ВС, якщо відомо, що кут α = 60°, а кут β = 135°. Вагою шнура і мотузки знехтувати.



Розв'язування

Покажемо на рисунку сили, що діють на систему, і реакції зв'язків.

Складемо рівняння рівноваги вузла В:



$$\begin{cases} T_A \cos 60° - T_C \cos 45° = 0 \\ T_A \sin 60° + T_C \sin 45° = P. \end{cases}$$

З першого рівняння системи випливає

$$\frac{T_A}{2} = T_C \frac{\sqrt{2}}{2}, T_A = \sqrt{2} T_C.$$

Підставляючи вираз для Т4 в друге рівняння системи, отримаємо

$$\sqrt{2} T_C \frac{\sqrt{3}}{2} + T_C \frac{\sqrt{2}}{2} = P,$$

$$T_C(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 2P,$$

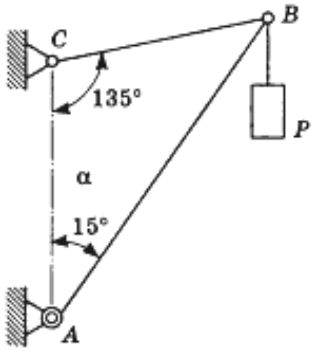
$$T_C = \frac{\sqrt{2} P}{1 + \sqrt{3}} = 10,4 \text{ Н};$$

$$T_A = \frac{2P}{1 + \sqrt{3}} = 14,6 \text{ Н},$$

Відповідь: T_A = 14,6 Н; T_C = 10,4 Н.

Приклад 3

Щогловий кран складається з стріли АВ, прикріпленою шарніром А до щогли, і ланцюги СВ. До кінця В стріли підвішений вантаж Р = 2 кН; кути ВАС = 15°, АСВ = 135°. Визначити натяг Т ланцюга СВ і зусилля Q в стрілі АВ.



Розв'язування

Побудуємо силовий трикутник TPQ Так як вузол знаходиться в рівновазі, то

$$\overline{Q}+\overline{T}+\overline{P}=0.$$

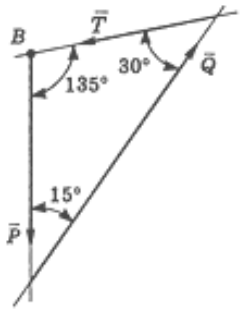
За теоремою синусів знайдемо:

$$\frac{P}{\sin 30^\circ}=\frac{T}{\sin 15^\circ},$$

$$T=P\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=1{,}04 \text{ кН};$$

$$\frac{P}{\sin 30^\circ}=\frac{Q}{\sin 135^\circ},$$

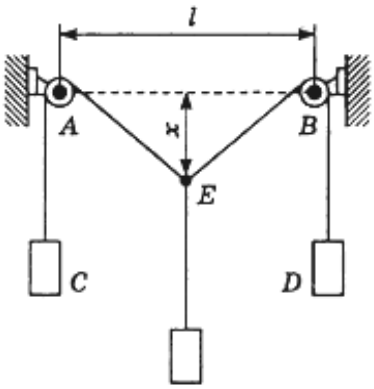
$$Q=P\frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=2{,}83 \text{ кН}.$$



Відповідь: T =1,04 кН; Q=2,83 кн.

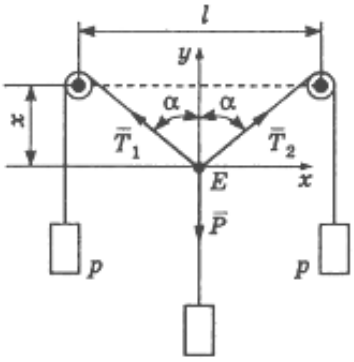
Приклад 4

Через два блоки A і B, які перебувають на одній горизонтальній прямій AB = l, перекинута мотузка CAEBD. До кінців C і D мотузки підвішені гирі ваги p кожна, а до точки E– гиря ваги P. Визначити, нехтуючи тертям на блоках і їх розмірами, відстань x точки E від прямої AB в положенні рівноваги. Вагою мотузки знехтувати.



Розв'язування

Покажемо на малюнку сили, що діють на систему, і реакції зв'язків. Складемо рівняння рівноваги гирі E:



$$\begin{cases} T_2 \sin\alpha - T_1 \sin\alpha = 0, \\ T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Оскільки $T_1=T_2=p$, то з другого

рівняння системи знайдемо:

$$2p\cos\alpha = P.$$

Так як

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{l^2+4x^2}},$$

то

$$\frac{4px}{\sqrt{l^2+4x^2}} = P, \quad x = \frac{Pl}{2\sqrt{4p^2-P^2}}.$$

Відповідь: $x = \dfrac{Pl}{2\sqrt{4p^2-P^2}}.$

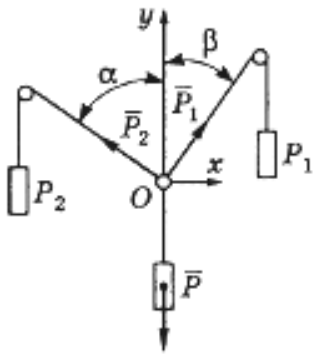
Приклад 5

Вантаж ваги 25 Н утримується в рівновазі двома мотузками, перекинутими через блоки і натягувати вантажами. Один з цих вантажів важить 20 Н; синус кута, утвореного відповідної мотузкою з вертикаллю, дорівнює 0,6. Нехтуючи тертям на блоках, визначити величину p другого вантажу і кут α, утворений другий мотузкою з вертикальною лінією. Вагою мотузки знехтувати.

Розв'язування

Покажемо на рисунку сили, що діють на систему, і реакції зв'язків. Складемо рівняння рівноваги вузла О:

$$\begin{cases} P_1 \sin\beta - P_2 \sin\alpha = 0, \\ P_1 \cos\beta + P_2 \cos\alpha - P = 0. \end{cases}$$



Знайдемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_1 \sin\beta}{P - P_1\cos\beta} = \frac{P_1 \sin\beta}{P - P_1\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{4}{3},$$

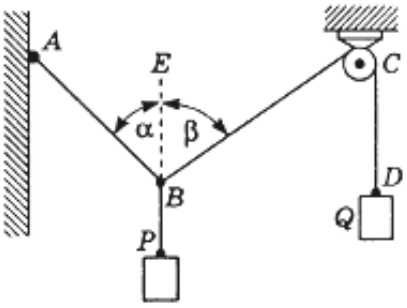
Отже $\sin\alpha = 0{,}8.$

$$P_2 = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1\cos\alpha} = 15 \text{ Н}.$$

Відповідь: $P_2 = 15$ Н; $\sin\alpha = 0{,}8.$

Приклад 5

До мотузці АВ, один кінець якої закріплений в точці А, прив'язані в точці В вантаж Р і мотузка BCD, перекинута через блок; до кінця її D прив'язана гиря Q ваги 100 Н. Визначити, нехтуючи тертям на блоці, натяг Т мотузки АВ і величину вантажу Р, якщо в положенні рівноваги кути, утворені мотузками з вертикаллю ВЕ, рівні: α = 45°, β = 60° .

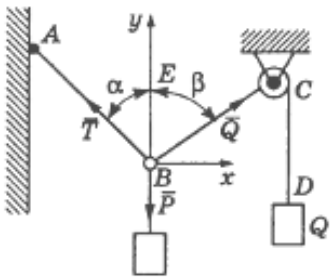


Розв'язування

Покажемо на малюнку сили, що діють на систему.

Складемо рівняння рівноваги вузла В:

$$\begin{cases} -T\sin\alpha + Q\sin\beta = 0, \\ T\cos\alpha + Q\cos\beta - P = 0 \end{cases} \Rightarrow$$



або

$$\begin{cases} T\sin\alpha = Q\sin\beta, \\ T\cos\alpha + Q\cos\beta = P \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = Q\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 100\sqrt{1,5} = 122 \text{ Н}, \; P = 122\frac{\sqrt{2}}{2} + 100\frac{1}{2} = 137 \text{ Н}.$$

Відповідь: Т= 122 Н; Р= 137 Н

Контрольні запитання

1. Що називається силою реакції в’язів?
2. Сформулюйте принцип звільнення від в’язів.
3. До якого об'єкту прикладені сили реакцій?
4. Перелічіть основні види зв'язків, для яких заздалегідь відомо напрямок сили реакції.
5. Назвіть зв'язку, для яких заздалегідь відома точка докладання реакції, але не її напрямок.
6. У чому сутність принципу звільнення від в'язів?
7. Як спрямована реакція опорного шарніра, якщо тверде тіло пов'язане з опорою за допомогою стрижня, що має на кінцях шарніри?

ТЕМА 4. УМОВИ РІВНОВАГИ СИСТЕМ СИЛ

План

4.1. Зведення довільної системи сил до даного центра.
4.2. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту.
4.3. Випадки зведення просторової системи сил до даного центра.
4.4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
4.4.1. Геометрична форма умов рівноваги.
4.4.2. Аналітичні умови рівноваги.
4.5. Окремі випадки рівноваги системи сил.
4.5.1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил.
4.5.2. Умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
4.5.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
4.5.4. Умови рівноваги плоскої системи збіжних сил.
4.5.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил.
4.6. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої відносно осі.
4.7. Розв'язання задач статики.

4.1. Зведення довільної системи сил до даного центра

Доведемо головну теорему статики (теорему Пуансо) про зведення довільної системи сил до даного центра.

Розглянемо тверде тіло, на яке діє довільна просторова система сил, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,...., $\overline{F}_n$, як наведено на рисунку 4.1.

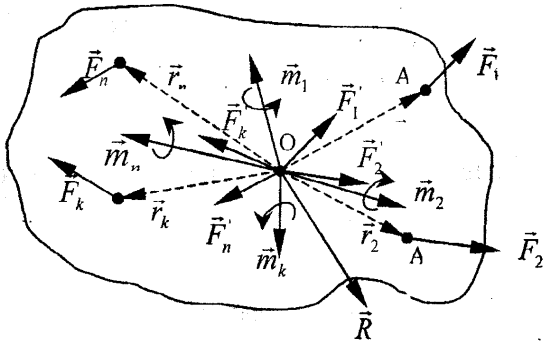


Рисунок 4.1 – Зведення довільної системи сил до даного центра

Оберемо довільно центр зведення – точку О та, використовуючи лемму, перенесемо усі сили системи в цей центр і приєднаємо при цьому відповідні пари.

Тоді на тіло буде діяти нова система збіжних у точці О сил, таких що:

$$\overline{F}_1' = F_1, \overline{F}_2' = \overline{F}_2; ...; \overline{F}_n' = \overline{F}_n ,$$

а також системи пар, моменти яких дорівнюють:

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_o(\overline{F}_1); \overline{m}_2 = \overline{m}_o(\overline{F}_2); ...; \overline{m}_n = \overline{m}_o(\overline{F}_n).$$

Додаючи систему сил $\{\overline{F}_k\}$ за допомогою силового багатокутника, дістанемо їх рівнодіючу $\overline{R}$, що прикладена у тій же точці *O*: $\overline{R} = \sum \overline{F}_k'$, а так як $\vec{F}_k' = \overline{F}_k$, то можна записати:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k.$$

Однак, для системи збіжних сил $\{\vec{F}_k'\}$ сила $\overline{R}$ є рівнодіючою, а для заданої системи сил $\{\overline{F}_k\}$ – тільки її векторною сумою.

Геометрична сума будь-якої системи сил називається головним вектором цієї системи сил, який у випадку збіжних сил є крім того і рівнодіючою.

Таким чином, для заданої системи $\{\overline{F}_k\}$ сила $\overline{R}$ є головним вектором.

Геометрично додаючи вектори моментів приєднаних пар, матимемо еквівалентну їм пару сил, момент якої:

$$\overline{M}_o = \sum \overline{m}_k = \sum \overline{m}_o(\overline{F}_k).$$

Геометрична сума моментів приєднаних пар або моментів всіх сил системи відносно центра зведення О, називається головним моментом системи сил відносно цього ж центра.

Таким чином: будь-яка система сил, діючих на абсолютно тверде тіло при зведенні її до довільного центра О заміняється однією силою $\overline{R}$, яка дорівнює головному вектору, даної системи сил і прикладена в центрі зведення, та однією парою сил з моментом $\overline{M}_0$, що дорівнює головному моментові цієї системи відносно центра О.

Зробимо наступні зауваження:

1. Так як сили системи розташовані в просторі цілком довільно, то головний момент $\overline{M}_0$ у відношенні до головного вектора $\overline{R}$ може бути спрямований під будь-яким кутом.

2. Від вибору центра зведення головний вектор не залежить, бо після зведення сил до будь-якого центра додаються однакові системи збіжних сил.

Головний, же момент при зміні центра зведення в загальному випадку може змінитися, бо момент кожної з сил системи в залежності від положення центра зведення може бути іншим.

3. Не слід вважати, що головний вектор і головний момент мають суто формальне значення та що їх можна знайти тільки обчислюванням. Дуже часто деякі діючі на тіло сили не можна визначити навіть дослідним шляхом, у той час, коли головні вектор та момент знаходяться відносно легко. Це можна бачити на прикладі вала, що обертається в підшипниках ковзання. На точки поверхні вала діють з боку підшипника сили тертя ковзання модулі яких нам, як правило, невідомі. Ці сили важко визначити за допомогою експерименту, однак, сума моментів усіх сил тертя відносно осі обертання (тобто, головний момент сил тертя) може бути знайдена простим вимірюванням.

4.2. Аналітичне визначення головного вектора та головного моменту

Головний вектор і головний момент довільної системи сил відносно центра зведення, як правило, визначають аналітично, тобто за їх проекціями на вісі координат.

Проекції головного вектора на координатні вісі мають вигляд:

$$R_X = \sum F_{kX}\,; R_y = \sum F_{ky}\,; R_z = \sum F_{kz}\,; R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\,.$$

Проекції головного моменту $\overline{M}_0$ на вісі координат позначимо $\overline{M}_x$, $\overline{M}_y$, $\overline{M}_z$, а враховуючи, що проекція вектора моменту відносно точки на вісь, що проходить через цю точку - це момент сили відносно цієї осі, можна записати:

$$M_X = \sum m_x(\overline{F}_k);\ M_y = \sum m_y(\overline{F}_k); M_z = \sum m_z(\overline{F}_k);$$

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Таким чином, для задання будь-якої системи сил досить задати її головний вектор і головний момент відносно центра.

4.3. Випадки зведення просторової системи сил до даного центра

1. Нехай в результаті зведення довільної системи сил до даного центра ми маємо $\overline{R}$ = 0, а $\overline{M}_0 \neq 0$. Це означає, що задана система сил зводиться до пари сил. В цьому випадку вектор моменту не залежить від вибору центра зведення і під дією такої системи сил вільне тіло може (але не завжди) здійснювати суто обертальний рух.

2. Якщо для даної системи сил $\overline{R} \neq 0$, а $\overline{M}_0 = 0$, то система сил зводиться до рівнодіючої $\overline{R}$, що проходить через центр зведення. Зауважимо, що під дією такої системи сил вільне тіло може (але не завжди) здійснювати суто поступальний рух.

3. Якщо для даної системи сил $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$, але $\overline{R} \perp \overline{M}_0$, тоді ця система також зводиться до рівнодіючої, яка дорівнює $\overline{R}$, але не проходить через центр О. При $\overline{R} \perp \overline{M}_0$ пара, що зображується вектором $\overline{M}_0$, та сила лежать в одній площині, як показано на рисунку 5.3,а.

Зобразимо пару силами $\overline{R}'$ та $\overline{R}''$, рівними за модулем силі $\overline{R}$. Тоді плече пари ОО′ визначиться з формули $OO' = \dfrac{M_o}{R}$.

В результаті одержимо систему, що складається з трьох сил $\overline{R}$, $\overline{R}'$, $\overline{R}''$, дві з яких, $\overline{R}''$ та $\overline{R}$, взаємно урівноважуються та можуть бути відкинуті. Система сил заміниться однією рівнодіючою $\overline{R}'$, що проходить через точку О', відстань від якої до центра зведення О нами визначена вище.

4. Нехай для даної системи сил головні вектор та момент не дорівнюють нулю, тобто $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_0 \neq 0$, але вектор $\overline{R}$ паралельний $\overline{M}_0$, як наведено на рисунку 4.3,б.

Це означає, що система сил зводиться до сили $\overline{R}$ та пари $(\overline{F}, \overline{F}')$, яка лежить в площині, перпендикулярній головному вектору. Така сукупність сили і пари приводить до того, що вільне тіло здійснює складний рух, який складається з суми поступального під дією головного вектора $\overline{R}$ та

обертального навколо лінії дії сили $\overline{R}$ під дією пари $(\overline{F}\ ,\ \overline{F}')$. Цей рух - гвинтовий, а така сукупність сили і пари називається динамічним гвинтом або динамою, а пряма, вздовж якої спрямован вектор $\overline{R}$ - віссю динами.

5. Якщо для даної системи сил головні вектор та момент не дорівнюють нулю, тобто $\overline{R} \neq 0$; $\overline{M}_0 \neq 0$ та при цьому вектори $\overline{R}$ та $\overline{M}_0$ не перпендикулярні і не паралельні один одному, то така система сил також зводиться до динами, але вісь цієї динами не буде проходити через центр зведення О, як показано на рисунку 4.3,в.

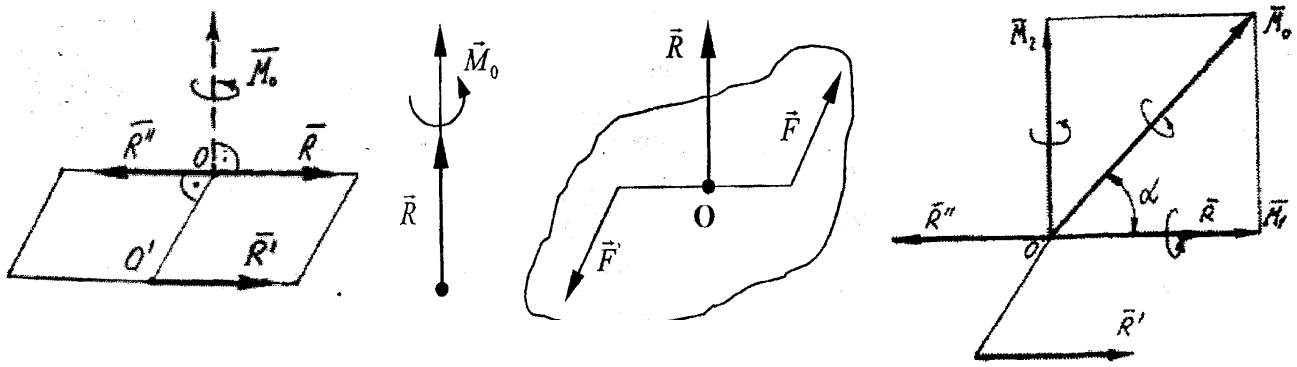


Рисунок 4.3 – Випадки зведення просторової системи сил до даного центра

Дійсно, якщо вектор $\overline{M}_0$ розкласти на дві складові, одна з яких спрямована паралельно $\overline{R}$ (це $\overline{M}_1$), а друга - перпендикулярна $\overline{R}$ (це – $\overline{M}_2$), то ми будемо мати накладання двох розглянутих вище випадків 3 та 4 .

6. Якщо для даної системи сил головні вектор та момент дорівнюють нулю, тобто $\overline{R} = 0$; $\overline{M}_0 = 0$, то система сил знаходиться в рівновазі.

4.4. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

4.4.1. Геометрична форма умов рівноваги

В векторній (геометричній) формі умови рівноваги будь-якої системи сил формулюються наступним чином: ***для рівноваги довільної системи сил, прикладеної до твердого тіла, необхідно та достатньо, щоб головний вектор системи сил, а також її головний момент відносно будь-якого центра зведення були рівні нулю, тобто:*** $\overline{R} = 0$; $\overline{M}_0 = 0$.

Ці умови є необхідними, бо, якщо одна з них не виконується, то діюча на тіло система сил зводиться до рівнодіючої ($\overline{R} \neq 0$) або до пари ($\overline{M}_0 \neq 0$) і отже, не є урівноваженою.

Цих умов достатньо, бо при $\overline{R} = 0$ система зводитись до пари з моментом $\overline{M}_0$, а так як $\overline{M}_0 = 0$, то має місце рівновага.

4.4.2. Аналітичні умови рівноваги

В аналітичній формі головний вектор $\overline{R}$ та головний момент $\overline{M}_0$ можна виразити через їхні проекції на координатні вісі, при цьому:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \; M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Якщо $\overline{R} = 0$, та $\overline{M}_0 = 0$, то модулі цих векторів дорівнють нулю лише тоді, коли їхні проекції зокрема дорівнюють нулю тобто:

$$R_x = \sum \overline{F_{kx}} = 0, \; R_y = \sum \overline{F_{ky}} = 0 \; R_z = \sum \overline{F_{kz}} = 0,$$
$$M_x = \sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0, \; M_y = \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0, \; M_z = \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Аналітичні умови рівноваги: ***для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей були рівні нулю.***

Помітимо, що у випадку необхідності можна, для вирахування проекцій брати одну систему координат, а для вирахування моментів - іншу. При цьому перші три рівняння становлять необхідні умови того, щоб тіло не мало переміщень вздовж осей координат, а другі три є необхідними умовами відсутності обертань навколо осей координат. Якщо на тіло окрім даної системи сил діє ще пара з моментом $\overline{m}$, то при цьому вигляд перших трьох умов не зміниться, так як сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, а другі три умови будуть мати вигляд:

$$\left.\begin{aligned} M_X &= \sum m_X(\overline{F}_K) + m_X = 0 \\ M_Y &= \sum m_Y(\overline{F}_K) + m_Y = 0 \\ M_Z &= \sum m_Z(\overline{F}_K) + m_Z = 0 \end{aligned}\right\}.$$

4.5. Окремі випадки рівноваги системи сил

З загальних умов рівноваги довільної просторової системи сил можна одержати умови рівноваги для окремих систем сил, прикладених до твердого тіла.

4.5.1. Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Нехай на тіло діє просторова система паралельних сил наведена на рисунку 4.5.1. Виберемо координатні вісі так, щоб одна з осей (припустимо, вісь *Z*) була паралельна силам.

Тоді проекції цих сил на вісі *X* та *Y*, а також їхні моменти відносно осі *Z* будуть тотожньо дорівнювати нулю (проекції - так як сили перпендикулярні вісям *X* та *Y*, моменти - так як сили паралельні вісі *Z).* Тоді в системі залишаться, тільки три умови:

$$R_z = \sum \overline{F_{kz}} = 0 \text{ , } M_x = \sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0 \text{ , } M_y = \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0 \text{ .}$$

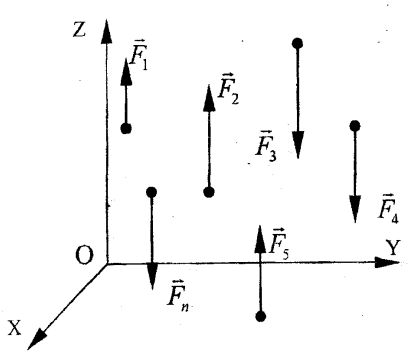


Рисунок 4.5.1 – Просторова система паралельних сил

Таким чином: для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно та достатньо, щоб сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну силам, а також суми моментів цих сил відносно двох інших осей координат, дорівнювали б нулю.

4.5.2. Умови рівноваги просторової системи збіжних сил

Нехай на тверде тіло діє просторова система збіжних сил (рисунок 4.5.2.).

Помістимо початок системи координат в точку О, в якій збігаються лінії дії сил системи. Тоді другі три умови рівноваги системи рівнянь будуть тотожньо дорівнювати нулю (моменти цих сил відносно координатних вісей дорівнюють нулю, так як сили перетинають ці вісі).

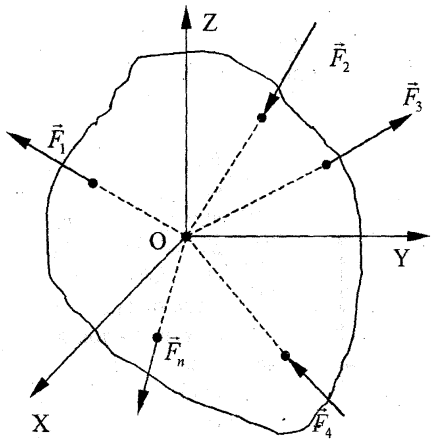


Рисунок 4.5.2 – Просторова система збіжних сил

В системі рівнянь залишається тільки три умови:

$$R_x = \sum \overline{F_{kx}} = 0 \ , \ , R_y = \sum \overline{F_{ky}} = 0$$
$$R_z = \sum \overline{F_{kz}} = 0 \ ,$$

Таким чином: ***для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з координатних осей дорівнювали б нулю.***

4.5.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

1. Основна форма. Нехай на тверде тіло діє довільна плоска система сил – $\{\overline{F}_k\}$. Сполучимо площину дії сил та координатну площину *XOY*, як показано на рисунку 4.5.3,а.

Так як третя вісь (*Z*) перпендикулярна площині дії сил (*XOY*), то проекції усіх сил на цю вісь будуть тотожньо дорівнювати нулю (R_z = 0). Крім того, так як усі сили або перетинають, або паралельні вісям *X* і *Y*, то моменти прикладених сил відносно цих осей тотожньо будуть дорівнювати нулю (тобто M_x =0; M_y =0).

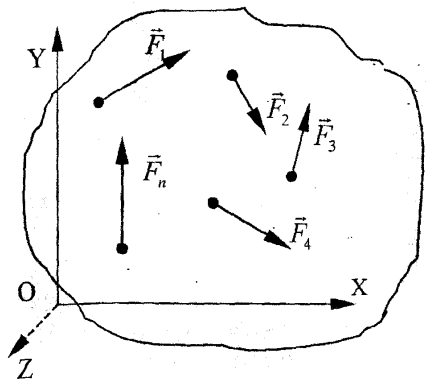


Рисунок 4.5.3, а
Довільна плоска система сил

В той же час моменти заданих сил відносно осі *Z* будуть дорівнювати моментам цих сил відносно точки О (згідно визначенню моменту сили відносно осі). Таким чином, система у розглядаємому випадку перетворюється в наступну систему:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0$$
$$R_y = \sum F_{ky} = 0$$
$$M_z = M_o = \sum m_o(\overline{F}_k) = 0.$$

Ця система умов рівноваги плоскої довільної системи сил носить назву основної або першої форми умов рівноваги і формулюється так: ***для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і алгебраїчна сума їх моментів відносно будь-якого центра, що лежить в площині дії сил, дорівнювали нулю.***

Фізичний зміст перших двох умов виявляє необхідність того щоб тіло не мало руху вздовж осей координат, а останнє являє відсутність обертань в площині *XOY*.

2. Друга форма. Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: ***для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю.***

$$M_A = \sum m_A(\overline{F}_k) = 0$$
$$M_B = \sum m_B(\overline{F}_k) = 0$$
$$M_C = \sum m_C(\overline{F}_k) = 0.$$

Необхідність цих умов зумовлена тим, що при рівновазі повинно бути відсутнім обертання. Однієї умови (припустимо, M_A = 0) мало, так як в цьому випадку система сил зводиться до рівнодіючої, тобто рівновага відсутня. Двох умов (наприклад, M_A = O, M_B = 0) також не вистачає, бо в цьому випадку рівнодіюча може проходити через центри зведення A і B водночас.

Три умови разом з додатковою вказують, що, якщо б система сил не знаходилась в рівновазі, то рівнодіюча повинна була б проходити через три точки A,B,C. Але це неможливо, бо ці точки не лежать на одній прямій.

Ці міркування «від протилежного» приводять до висновку про достатність умов і додаткової умови.

3. Третя форма. Ця форма умов рівноваги формулюється наступним чином: ***для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно та достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів цих сил відносно будь-яких двох точок, а також сума проекцій сил на вісь, не перпендикулярну прямій, що проходить через обрані моментні точки, дорівнювали нулю:***

$$M_A = \sum m_A(\overline{F}_k) = 0; M_B = \sum m_B(\overline{F}_k) = 0; R_x = \sum F_{kx} = 0.$$

Додаткову умову, яка накладає обмеження на вибір координатних осей, або моментних точок, можна записати як *Ox* не перпендикулярно AB.

Необхідність цих умов витікає безпосередньо з факту рівноваги системи сил, бо, якщо будь-яка з умов не виконується то або R $\neq 0$, або $M_A \neq 0$ ($M_B \neq$ 0) і рівноваги не буде.

Доведемо достатність ціх умов. Нехай виконуються тільки перші дві з умов, тобто M_A =0 та M_B = 0. Така система сил може мати рівнодіючу $\overline{R}$, тобто не знаходитися в рівновазі, що наведено на рисунку 4.5.3,б.

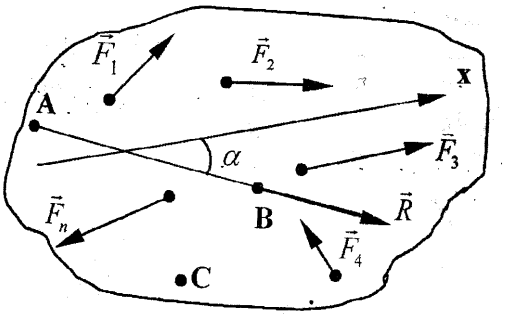


Рисунок 4.5.3, б
Довільна плоска система сил

Тоді:

$$M_A = \sum m_A(F_k) = M_A(\overline{R}) = 0 \ .$$

Це означає, що сила $\overline{R}$ проходить через точку А. Крім того $M_B = \sum m_B(F_k) = M_B(\overline{R}) = 0$, і сила $\overline{R}$ повинна також пройти через точку В.

Це можливо тільки, якщо сила $\overline{R}$ проходить через обидві точки А та В. З третьої умови витікає, що:

$$R_x = \sum F_{kx} = R\cos\alpha = 0.$$

Маючи на увазі додаткову умову (тобто cos α ≠ 0), одержимо, що нулю дорівнює рівнодіюча $\overline{R}$. Таким чином наведені умови достатні для того, щоб система сил була в рівновазі.

4.5.4. Умови рівноваги плоскої системи збіжних сил

Якщо на тіло діє плоска система збіжних сил наведена на рисунку 4.5.4., то з площиною, в якій лежать сили, можна сполучити координатну площину, наприклад *XOY*.

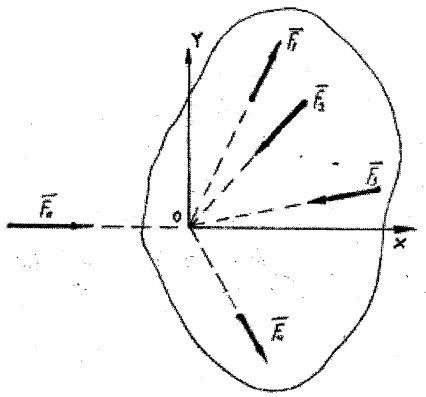


Рисунок 4.5.4 – Плоска система збіжних сил.

Крім того, центром зведення і початком координат можна прийняти точку *O*, в якій збігаються лінії дії сил. Тоді система умов рівноваги для плоскої системи збіжних сил спрощується.

В ній залишається тільки дві умови, бо третя, $R_z = \sum F_{kz} \equiv 0$ перетворюється в тотожність, так як сили перпендикулярні вісі *Z*. Таким чином:

$$R_x = \sum F_{kx} = 0 \ , \quad R_y = \sum F_{ky} = 0 \ .$$

В цьому випадку умови рівноваги формулюються так: ***для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми***

проекцій всіх сил на кожну з координатних осей, що лежать в площині дії сил, дорівнювали б нулю.

4.5.5. Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

Рівновагу плоскої системи паралельних сил можна розглянути, як окремий випадок рівноваги плоскої довільної системи сил, якщо одну з координатних осей провести паралельно діючим силам, припустимо, вісі *Y*, як наведено на рисунку 4.5.5.

Тоді основна форма умов рівноваги спрощується, так як $R_z = \sum F_{kz} \equiv 0$ і буде мати вигляд:

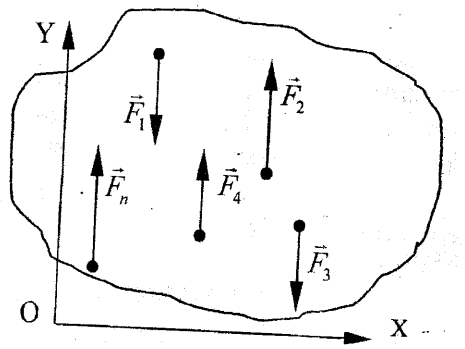


Рисунок 4.5.5 – Плоска система паралельних сил

$$\begin{cases} R_y = \sum F_{ky} \equiv 0 \\ M_z = M_0 = \sum m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0 \end{cases}.$$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь координат, що паралельна силам, а також алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно обраного центра дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги паралельних сил одержується, якщо точки А і В не лежать на прямій, яка паралельна силам:

$$M_A = \sum m_A(\overline{F}_k) = 0$$
$$M_B = \sum m_B(\overline{F}_k) = 0.$$

Тобто: ***для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів цих сил відносно будь-яких двох точок, які знаходяться в площині дії сил і не лежать на прямій, паралельній силам, дорівнювали нулю.***

4.6. Теорема Варіньона про момент рівнодіючої відносно осі

Нехай на тверде тіло діє система сил $\{\overline{F}_k\}$, яку можна привести до рівнодіючої $\overline{R}$, лінія дії якої проходить через деяку точку С, як наведено на рисунку 5.6.

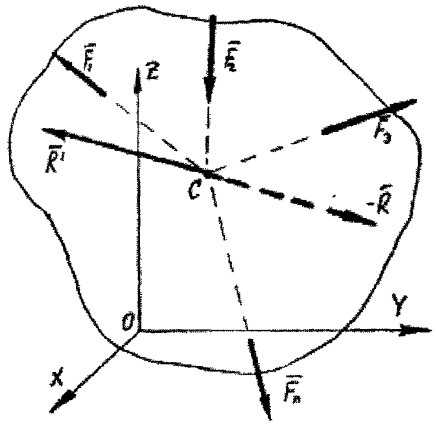


Рисунок 4.6 – Система сил

Прикладемо в цій точці зрівноважуючу силу $\overline{R}'$, при цьому $\overline{R}' = -\overline{R}$. Тоді нова система сил $\{\overline{F}_k, \overline{R}'\}$ буде знаходитися в рівновазі і для неї будуть виконуватися умови рівноваги:

$$R_x = \sum \overline{F}_{kx},\ R_y = \sum \overline{F}_{ky},\ R_z = \sum \overline{F}_{kz},$$
$$M_x = \sum m_x(\overline{F}_k),\ M_y = \sum m_y(\overline{F}_k)$$
$$M_z = \sum m_z(\overline{F}_k).$$

Зокрема, для координатної осі Ох буде:

$$\sum m_x(\overline{F}_k) + m_x(\overline{R}') = 0 \cdot$$

Враховуючи, що $\overline{R}' = -\overline{R}$ і лінії їх дії співпадають, будемо мати:

$$m_x(\overline{R}') = -m_x(R) \quad \text{, або } \sum m_x(\overline{F}_k) - m_x(\overline{R}) = 0 \cdot$$

Відкіля

$$m_x(\overline{R}) = \sum m_x(\overline{F}_k) \cdot$$

Теорема Варіньона про момент рівнодіючої відносно осі формулюється наступним чином: ***якщо дана система сил має рівнодіючу, то момент цієї рівнодіючої відносно будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів додаваємих сил відносно тієї ж осі.***

4.7. Розв'язання задач статики

В статиці вирішуються, як правило, два типи задач:

1. Задачі, в яких треба знайти, при яких співвідношеннях між діючими силами, або в якому положенні об'єкт (чи об'єкти) будуть знаходитися в рівновазі.
2. Задачі, в яких рівновага об'єкта (чи об'єктів) задана, а треба знайти які-небудь з діючих сил (в першу чергу реакції в’язей).

При розв'язанні задач статики взагалі доцільно додержуватись такої методики:

1. Вибрати об'єкт (чи об'єкти) рівноваги та зобразити його на схемі. Об'єктами рівноваги є тіла, до яких прикладені задані та шукані (чи рівні шуканим) сили.
2. Розташувати сили, задані (активні) та реакції в'язей.

3. З'ясувати вигляд діючої на об'єкт (об'єкти) рівноваги системи сил, обрати та записати відповідні умови рівноваги.

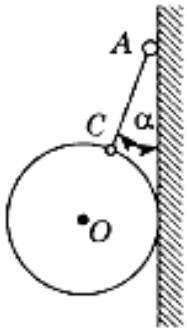
4. На підставі обраних умов рівноваги скласти рівняння рівноваги, розв'язати їх та визначити шукані величини, перевірити вірність рішення та проаналізувати одержані результати. Віддати перевагу слід не геометричному, а аналітичному способові розв'язування задач.

Всі перетворення краще робити в загальному вигляді, підставляючи вихідні дані тільки в остаточні алгебраїчні вирази. Велике значення для спрощення розв'язування задачі має вдалий вибір системи координат. Крім того при складанні рівнянь моментів слід центр вибирати в точці, де збігаються лінії дії якомога більшого числа невідомих сил. При вирахуванні моментів часто буває зручно розкласти силу на складові і використати теорему Варіньона, визначаючи момент сили як суму моментів цих складових сил.

Приклад 1

До вертикальної гладкій стіні АВ підвішений на тросі АС однорідний шар О. Трос становить зі стіною кут α, вага кулі Р. Визначити натяг троса Т і тиск Q кулі на стіну.

Розв'язування

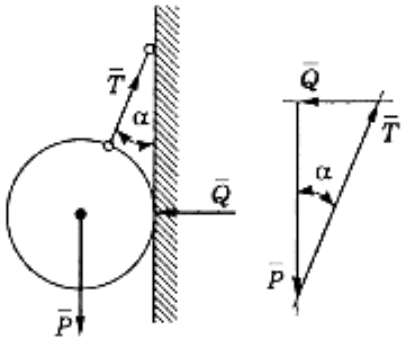


Скористаємося теоремою про три непаралельних силах, під дією яких куля знаходиться в рівновазі: Умова рівноваги кулі має вигляд

$$\overline{T} + \overline{Q} + \overline{P} = 0.$$

З силового трикутника QPT знайдемо:

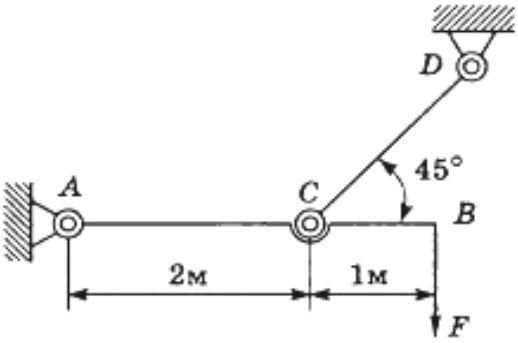
$$T = \frac{P}{\cos\alpha}; \quad Q = P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$



Відповідь $T = \frac{P}{\cos\alpha}; \quad Q = P\,\mathrm{tg}\,\alpha.$

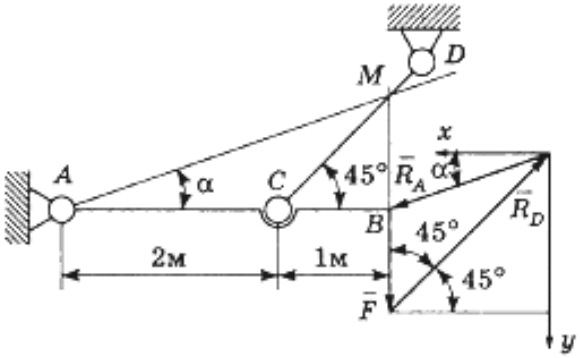
Приклад 2

Балка АВ підтримується в горизонтальному положенні стрижнем CD; кріплення в A, C і D шарнірні. Визначити реакції опор A і D, якщо на кінці балки діє вертикальна сила F = 5 кН. Розміри вказані на малюнку. Вагою знехтувати.



Розв'язування

Так як балка знаходиться в рівновазі



$$\bar{F} + \bar{R}_A + \bar{R}_D = 0.$$

Спроектуємо цю рівність
на осі x і y
Отримаємо систему

$$\begin{cases} R_A \cos\alpha - R_D \sin 45^\circ = 0, \\ R_A \sin\alpha + F - R_D \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

З трикутника ABC знайдемо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Виключимо з рівнянь системи реакцію Ra, отримаємо рівняння

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{R_D \cos 45^\circ - F}{R_D \sin 45^\circ}.$$

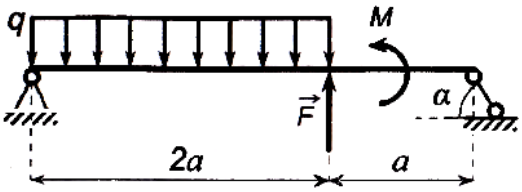
Вирішуючи це рівняння, знайдемо реакції Rd і Ra

$$R_D = \frac{3F}{2\sin 45^\circ} = 10{,}6 \text{ кН}; \; R_A = R_D \frac{\sin 45^\circ}{\cos\alpha} = 10{,}6 \frac{0{,}707}{3}\sqrt{10} = 7{,}9 \text{ кН}.$$

Відповідь: $R_A = 7{,}9$ кН; $R_D = 10{,}6$ кН.

Приклад. Визначення сил реакції опор балки. Невагома балка закріплена так, як показано на кресленні. Визначити сили реакції опор, якщо на балку діють зосереджена сила F=60 Н, рівномірно розподілене навантаження з

інтенсивністю q = 15 Н/м і пара сил з моментом М = 40 Нм; відстань а = 1 м.



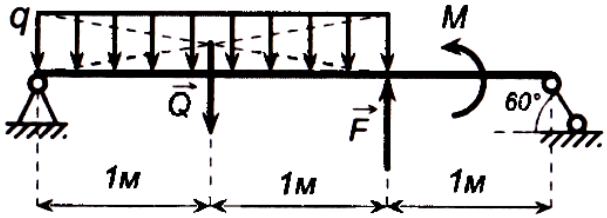
Дано:
F=60 Н;
q =15 Н/м;
М= 40 Нм;
а= 1 м.
Знайти: *(не заповнюється!)*

Розв'язування

Розглянемо рівновагу навантаженої і закрапленої балки.

Виконаємо розрахункову схему, зобразивши на ній задані активні навантаження (сила F, розподілені сили інтенсивністю q і пара сил з моментом М).

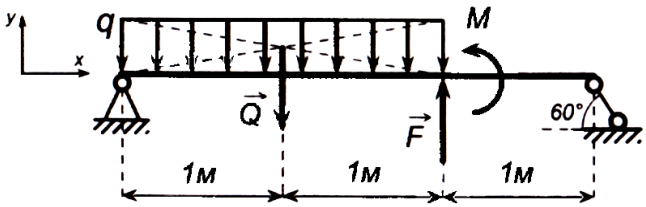
Замінимо розподілене навантаження зосередженою силою Q, зобразивши її в центрі фігури, і підрахуємо її модуль.



Модуль зосередженої сили Q дорівнює:

$$Q = q \cdot l, Q = 15\ \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 2\ \text{м} = 30\ \text{Н}.$$

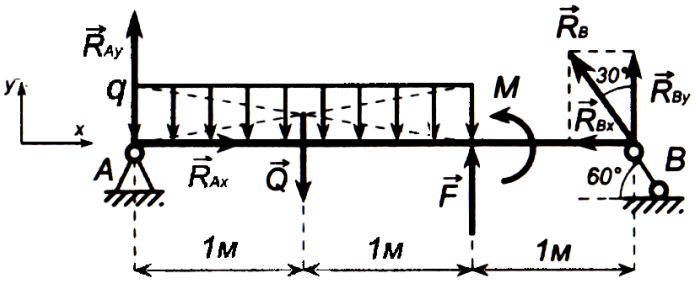
Виберемо осі координат xy, розташувавши їх найбільш зручним способом. Виявимо зв'язку, які утримують балку, замінимо їх силами реакції зв'язків і зобразимо їх.



У точці А балка кріпиться за допомогою нерухомого шарніра, в точці В – з допомогою невагомого стержня. Шарнірно-нерухому опору А замінимо двома силами реакції: R_{Ax} і R_{Ay}, спрямованими по координатним осях. Невагомий стержень В замінимо силою реакції RB, спрямованої уздовж стрижня.

Заповнимо графу «Знайти».

Дано:
F=60 Н;
q =15 Н/м;
M= 40 Нм;
a= 1 м.
Знайти: R_{Ax}, R_{Ay}, R_B



Встановимо вид системи сил, що діють на балку.

З розрахункової схеми видно, що на балку діє довільна плоска система сил. Запишемо умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Для складання рівняння моментів виберемо точку А, в якій прикладено дві невідомі сили реакції: R_{Ax} і R_{Ay}.

Умови рівноваги балки під дією довільної плоскої системи сил мають вид:

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} = 0; \\ R_y = \sum F_{iy} = 0; \\ M_A = \sum m_A(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Встановимо, чи є завдання статично визначної.

У задачі потрібно визначити три невідомих опорних реакції: R_{Ax}, R_{Ay}, R_B. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил містять три незалежних рівняння рівноваги. Завдання є статично визначної, так як число невідомих опорних зусиль дорівнює числу рівнянь рівноваги.

Складемо рівняння рівноваги балки під дією довільної плоскої системи сил, що складається із заданих активних сили і невідомих сил реакції зв'язків.

Алгебраїчні моменти сил беремо зі знаком плюс, якщо вони спрямовані проти ходу годинникової стрілки і зі знаком мінус, якщо вони спрямовані по ходу годинникової стрілки. При обчисленні моменту сили реакції R_B застосуємо теорему Варіньона:

$$m_A(\vec{R}_B) = m_A(\vec{R}_{Bx}) + m_A(\vec{R}_{By}).$$

Рівняння рівноваги балки з урахуванням даних завдання мають вигляд:

$$\begin{cases} R_{Ax} - R_B \cdot \sin 30° = 0; \\ R_{Ay} + R_B \cdot \cos 30° - Q + F = 0; \\ M - Q \cdot 1 + F \cdot 2 + R_B \cdot \cos 30° \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Вирішуємо отриману систему рівнянь і визначаємо з них шукані опорні реакції R_{Ax}, R_{Ay}, R_B. З рівняння (3) отримуємо:

$$R_B = \frac{-M + Q \cdot 1 - F \cdot 2}{3 \cdot \cos 30°}.$$

Підставами числові значення і обчислимо значення R_B:

$$R_B = \frac{-40 + 30 \cdot 1 - 60 \cdot 2}{3 \cdot 0{,}866} = \frac{-130}{2{,}598} = -50{,}038 = -50{,}0 \text{ Н}.$$

З рівняння (1) знаходимо:

$$R_{Ax} = R_B \cdot \sin 30°.$$

Підставами числові значення і обчислимо R_{AX}:

$$R_{Ax} = -50 \cdot 0{,}5 = -25 \text{ Н}.$$

З рівняння (2) визначаємо:

$$R_{Ay} = -R_B \cdot \cos 30° + Q - F.$$

Підставами числові значення і обчислимо R_{Ay}:

$$R_{Ay} = -(-50{,}0) \cdot 0{,}866 + 30 - 60 = 13{,}3 \text{ Н}.$$

Перевірка рішення

Складемо додаткове рівняння рівноваги моментів щодо центру B і виконаємо перевірку отриманих результатів.

$$M_B = \sum m_B(\vec{F}_i) = 0;$$
$$M - R_{Ay} \cdot 3 + Q \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

Підставами числові значення всіх відомих і обчислених сил з отриманими

знаками:

$$40 - 13.3 \cdot 3 + 30 \cdot 2 - 60 \cdot 1 = 0, \text{то есть}, 40 - 39{,}9 \approx 0.$$

Висновок: шукані сили реакції визначені вірно.

Запишемо відповідь.

Відповідь: R_{AX} = - 2 5 Н, R_{AY} = 13,3 Н, R_B = -50,0 Н.

Сила реакції R_{AX}, що має позитивне значення, спрямована так, як показано на кресленні.

Сили реакції R_{AY} і R_B, отримані зі знаком мінус, мають напрямки, протилежні тим, які показані на кресленні.

Завдання. Проаналізувати умови роботи балок, наведених на рисунку 1: активні сили, типи в'язів та їхні реакції, визначити яка система сил діють у даній конструкції та умови її рівноваги. Нехтуючи вагою елементів конструкції, визначити реакції в'язів. Замінити в'язь у точці В іншою опорою та визначити, як зміняться числові значення реакцій в'язів.

Чисельні значення до задачі наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Чисельні значення

Номер рисунку	*l*, *м*	l/a_1	l/a_2	Кути, град.		*P*, *кН*	*q*, *кН/м*	*m*, *кНм*
				α	β			
1	2	10	2	30	30	1	2	1
2	4	8	4	45	45	2	4	2
3	6	6	6	60	60	3	6	3
4	8	4	8	90	30	4	8	4
5	10	2	10	120	45	5	10	5
6	2	10	2	135	60	6	2	6
7	4	8	4	150	30	7	4	7

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади зосереджених і розподілених сил.
2. Що називається рівнодіючої системи сил?
3. Яка сила називається врівноважує?
4. Дайте визначення зовнішньої і внутрішньої сили.
5. Сформулюйте аксіому про рівновагу двох сил.
6. Що таке система сил?
7 Які системи сил називаються еквівалентними?
8. Що таке рівнодіюча і урівноважує сила?
9. Які системи сил називаються статично еквівалентними?
10. У чому подібність між рівнодіючої і врівноважує сил і чим вони один від одного відрізняються?

11. Сформулюйте першу, другу, третю і четверту аксіоми статики.

ТЕМА 5. РІВНОВАГА СИСТЕМИ ТІЛ

План

5.1. Рівновага системи тіл.
5.1.1. Нерухома опора – жорстке кріплення.
5.1.2. Системи статично визначені та невизначені.
5.1.3. Рівновага складеної конструкції (системи тіл).
5.2. Приклади розв'язання задач.

5.1. Рівновага системи тіл

Перш, ніж перейти до використання умов рівноваги для системи тіл, розглянемо ще один вид в'язі - жорстке кріплення, а також питання про можливість взагалі використання умов рівноваги.

5.1.1. Нерухома опора – жорстке кріплення

Особливий вид в'язі, який наведено на рисунку 5.1.1, називається жорстким кріпленням.

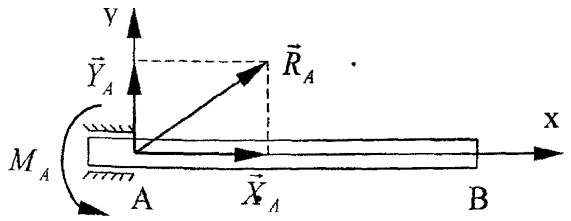


Рисунок 5.1.1 – Жорстке кріплення

Ця в'язь перешкоджає не тільки лінійним переміщенням в горизонтальному та вертикальному напрямах точок закріпленого тіла, але й обертальному рухові в площині активних сил.

При навантаженні зовнішніми силами на закріплений кінець балки *AB* з боку поверхонь опори діє система розподілених реакцій.

Зводячи ці сили до центра *A*, ми замінюємо їх однією силою $\overline{R}_A$, яка прикладена в точці *A*, і парою сил з моментом M_A. При цьому і реакція $\overline{R}_A$, і момент M_A наперед невідомі. Силу $\overline{R}_A$ можна розкласти на взаємо перпендикулярні складові в горизонтальному і вертикальному напрямах $\overline{x}_A$ та $\overline{y}_A$. Тоді реакція жорсткого кріплення може бути зображена в вигляді двох сил $\overline{x}_A$ та $\overline{y}_A$ і моменту M_A, які наперед невідомі.

5.1.2. Системи статично визначені та невизначені

При розв'язанні задач про рівновагу невільного твердого тіла реакції, накладені на об'єкт рівноваги, в'язей мають бути, за правилом, невідомими величинами. Кількість цих невідомих залежить від числа та вигляду в'язей.

Відповідні задачі статики полягають у розв'язанні систем рівнянь, складених на базі умов рівноваги розглядаємого об'єкту. Можливі два випадки, коли, по-перше, кількість невідомих не більше кількості умов рівноваги, і, по-друге, число невідомих реакцій в’язей більше числа можливих рівнянь рівноваги.

В першому випадку задачу називають статично визначеною, а системи розглядаємих об'єктів рівноваги – статично визначеними. В другому випадку задачі, а також відповідні системи сил, називаються статично невизначеними. Останнє виникає тоді, коли на об'єкт рівноваги накладені зайві в'язі, які не потрібні для забезпечення рівноваги.

На рисунку 5.1.2. наведена статично невизначена механічна система.

Балка *AB*, один кінець якої защімлено в точці *A*, другий кінець навантажено вантажем *P*, в точці *C* встановлена шарнірно-рухома опора, а в точці D діє деяка активна сила $\overline{F}$. Розставимо реакції: $\overline{x}_A$, $\overline{y}_A$, M_A – в опорі *A* та $\overline{R}_C$ – в опорі C.

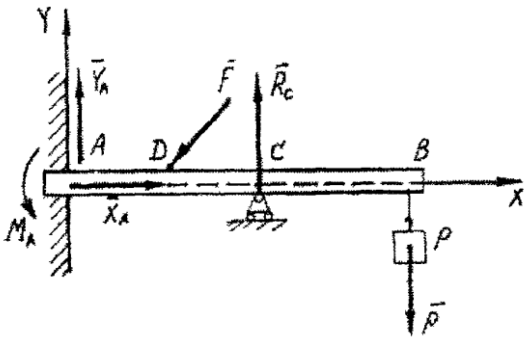


Рисунок 5.1.2 – Статично невизначена механічна система.

Система сил, що діє на балку *AB,* плоска довільна, тому для визначення невідомих можна використати три умови рівноваги.

Але число невідомих – чотири. Очевидно, що має бути статична невизначеність. В цій конструкції зайвою є опора *C*, без якої рівновага все одно забезпечена.

Прибравши шарнірну опору *C,* можна зробити задачу статично визначеною.

5.1.3. Рівновага складеної конструкції (системи тіл)

Статичне обчислення інженерних будівель часто зводиться до розгляду умов рівноваги конструкції, яка складена з системи тіл, що з'єднані будь-якими в'язями. Таким чином, об'єктом рівноваги служить складена конструкція, яка має в'язі (опори) як зовні, так і усередині. В'язі, з'єднуючі частини даної конструкції, називаються внутрішніми, і реакції в них також будуть внутрішніми. Зовнішні в'язі з'єднують об'єкт рівноваги з тілами, які не входять до нього (наприклад, опори). Відповідні реакції також носять назву зовнішніх. Як правило, складені конструкції можуть бути в рівновазі тоді, коли кількість реакцій опор перевищує кількість рівнянь рівноваги, які можуть бути складені для всієї конструкції в цілому, тобто задача стає статично невизначеною. Однак, цю задачу часто можна звести до статично визначеної, якщо поділити

конструкцію на складові частини, використовуючи до них умови рівноваги і розуміючи при цьому, що внутрішні в'язі стають тепер зовнішніми.

5.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1

Визначити зусилля в стрижнях СА, СВ і СД, які підтримують вантаж Q=100 Н, якщо стрижні СД і СВ взаємно перпендикулярні в горизонтальній площині і рівні за величиною. Кут θ дорівнює 60°(рисунок 5.2.1).

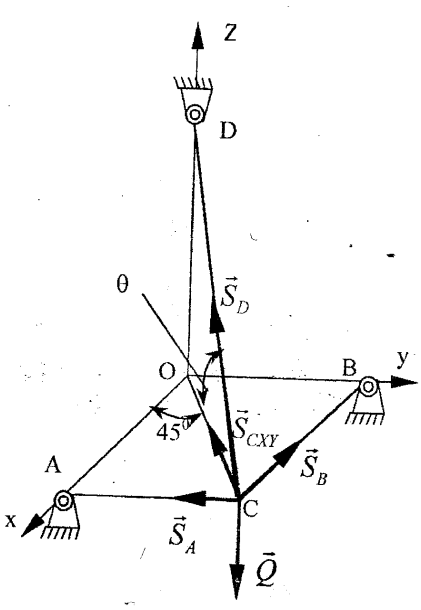


Рисунок 5.2.1 – Рівновага системи збіжних сил

Розв'язування

Розглянемо рівновагу вузла С, до якого прикладена активна сила Q – вага вантажу, а також зусилля в стрижнях $\overline{S}_A$, $\overline{S}_B$, $\overline{S}_D$.

Ці зусилля спрямуємо від вузла, вважаючи, що стрижні розтягнуті. Лінії дії усіх сил перетинаються в точці С і не лежать в одній площині, отже на вузол С діє просторова система збіжних сил. Обираємо вісі координат як показано на рисунку.

$$\sum F_{kx} = 0; -S_B - S_{Dxy}\cos 45° = -S_B - S_D \cos\theta \cos 45° = 0$$
$$\sum F_{ky} = 0; -S_A - S_{Dxy}\sin 45° = -S_A - S_D \cos\theta \sin 45° = 0$$
$$\sum F_{kz} = 0; S_D \sin\theta - Q = 0.$$

Підставивши числові значення відповідних величин у ці рівняння, дістанемо $\overline{S}_A$ = 115,5*H*, $\overline{S}_B$ = $\overline{S}_D$ = *-40,4H.*

Знак "-" означає, що стрижні ОА та СВ - стиснуті.

Примітка: при проектуванні сили $\overline{S}_D$ на вісі *X* та *Y* використовується метод подвійного проектування, тобто сила $\overline{S}_D$ спочатку проектується на площину XY в вигляді проекції $\overline{S}_{Dxy}$, а потім вже ця сила - на вісі *X* та *Y*.

Приклад 2.

Розв'язування задачі на рівновагу плоскої довільної системи сил.

На схемах, наведених на рисунках 5.2.2.*а, б, в* показані три засоби закріплення брусу, вісь якого — ломана лінія. Навантаження та розміри (м), в усіх трьох випадках однакові:

P= 5 кН; M = 8 кН м; q = 1,2 кН/м.

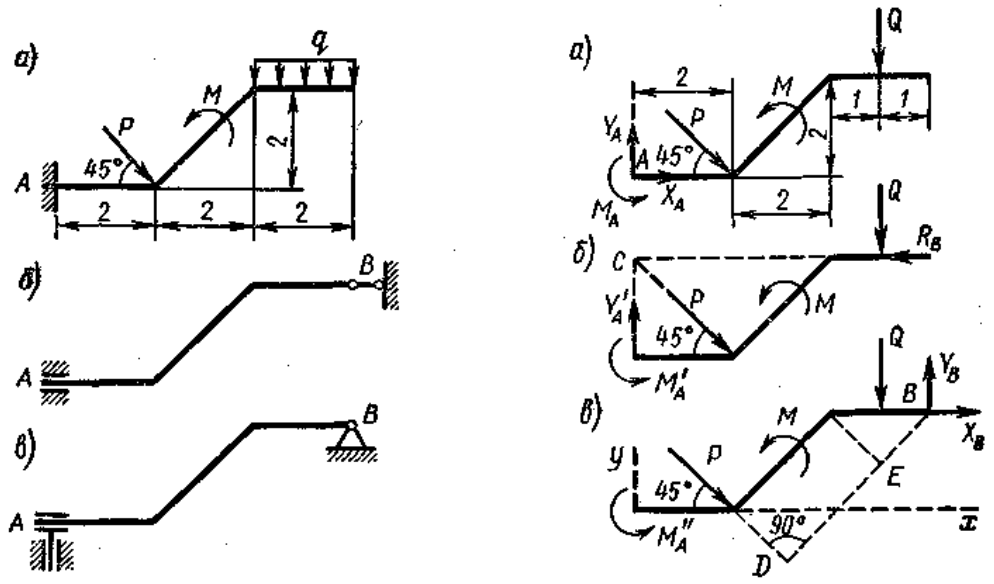


Рисунок 5.2.2 – Засоби закріплення брусу та розрахункові схеми

Визначити реакції опор для того засобу закріплення брусу, при якому момент M_A має найменше числове значення.

Розв'язування

Розглянемо систему сил, доданих до конструкції, що врівноважуються. Дію в'язів на конструкцію замінюємо їхніми реакціями (рисунок 6.2.2): в схемі *а* – X_A, Y_A, M_A, в схемі *б* – Y'_A, M'_A и R_B, в схемі *в* – M''_A, X_B и Y_B. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q замінюємо рівнодіючею $Q = q\cdot 2 = 2{,}4$ *кН.*

Щоб з'ясувати, у якому випадку момент є найменшим, знайдемо його для всіх трьох схем, не визначаючи доки інших реакцій.

Для схеми а: $\sum M_{iA} = 0;\ M_A - P\cdot 2\sin 45^\circ + M - Q\cdot 5 = 0.$ $M_A = 11{,}07$ *kH·м.*

Для схеми б: $\sum M_{iC} = 0;\ M'_A + M - Q\cdot 5 = 0.$ $M'_A = 4{,}00$ *kH·м.*

Для схеми в: $\sum M_{iB} = 0;\ M''_A + P\cdot BD + M + Q\cdot 1 = 0.$ $M''_A = -31{,}61$ *kH·м.*

$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4{,}24$ *м.*

Таким чином, найменший момент одержується при закріпленні брусу по схемі *б.* Визначимо інші опорні реакції для цієї схеми:

$\sum X_i = 0;\ P = \cos 45° - R_B = 0,$ звідки $R_B = ,54$ *kH;*

$\sum Y_i = 0;\ Y'_A - P\cdot \sin 45° - Q = 0,$ звідки $Y'_A = 5{,}94$ *kH.*

Результати розрахунку наведені у таблиці 5.2.2.

Таблиця 5.2.2. Результати розрахунку

Схема за рисунком	Момент M_A (M'_A, M''_A), кНм	Сили, кН	
		Y_A'	R_B
а	11,07	-	-
б	4,00	5,94	3,54
в	-31,61	-	-

Приклад 3

Розв'язування задачі на рівновагу просторової довільної системи сил

Вал коловорота і його рукоятка розміщені в одній площині. Вантаж вагою $\overline{G}$, підвішений на коловороті утримується горизонтально силою $\overline{P}$, прикладеною перпендикулярно до середини рукоятки, як наведено на рисунку 6.2.3. Нехтуючи вагою вала, визначити силу $\overline{P}$ і реакцію в підшипниках при заданих розмірах, якщо радіус шківа дорівнює R.

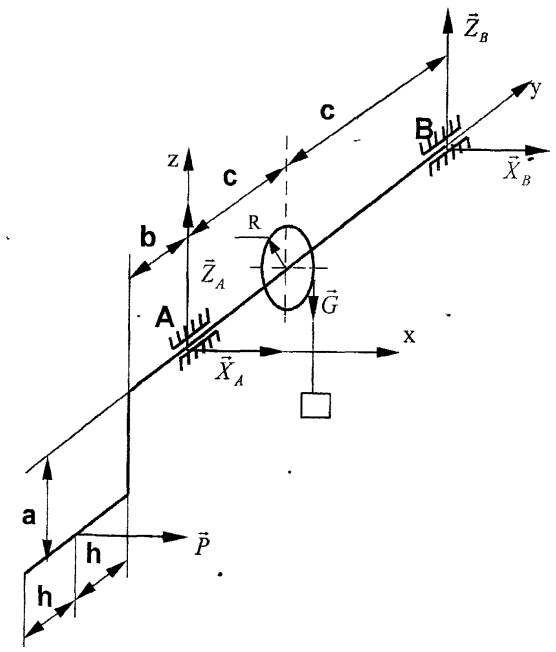


Рисунок 5.2.3 – Розрахункова схема

Розв'язування

Розглянемо рівновагу коловорота. На нього діє вага вантажу $\overline{G}$ та горизонтальна сила $\overline{P}$. Окрім того, в підшипниках А і В будуть діяти по дві складові реакції ($\overline{X}_A$, $\vec{Z}_A$, $\overline{X}_B$, $\vec{Z}_B$).

Маємо просторову довільну систему сил і складаємо рівняння рівноваги. Їх буде п'ять, так як сума проекцій сил на вісь Y тотожньо дорівнює нулю.

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + X_B + P = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0; Z_A + Z_B - G = 0$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0; Z_B \cdot 2c - G \cdot c = 0$$
$$\sum M_y(\overline{F}_k) = 0; G \cdot R - P \cdot a = 0$$
$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0; P(h+b) - X_B \cdot 2c = 0.$$

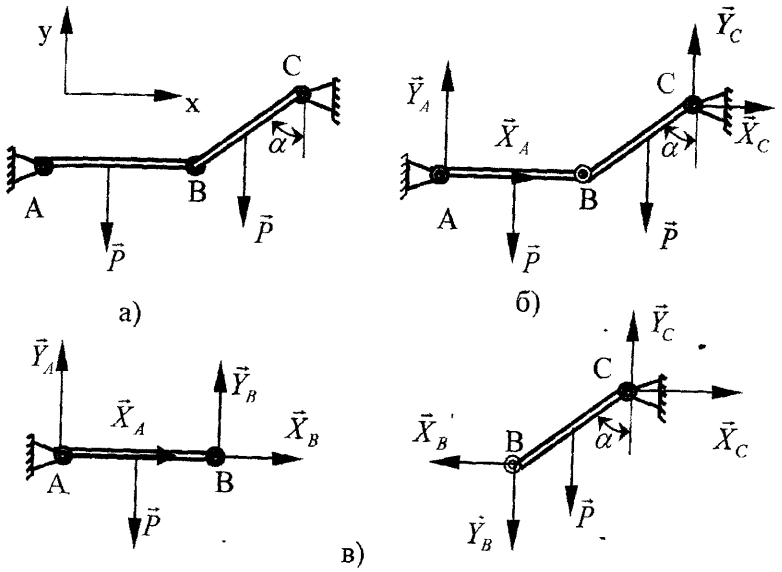
Розв'язавши ці рівняння, дістанемо:

$$Z_B = \frac{G}{2}; P = G \cdot \frac{R}{a}; X_B = \frac{G \cdot R \cdot (h+b)}{2ac};$$
$$Z_A = \frac{G}{2}; X_A = -\frac{GR}{a}(1 + \frac{h+b}{2c}).$$

Приклад 4

Розв'язування задачі про рівновагу складеної конструкції.

Дві однакові балки вагою $\overline{P}$ кожна, з'єднані шарніром *B* і прикріплені до шарнірно-нерухомих опор *A* та *C* так, що балка *AB* - горизонтальна, а балка *BC* має з вертикаллю кут α (рисунок 5.2.4.). Визначити реакції шарнірів.



Розв'язування

Виберемо вісі координат *XY* та розташуємо активні сили та реакції в'язей $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$. Так як на конструкцію діє плоска довільна система сил, то умов рівноваги для неї повинно бути три.

Рисунок 5.2.4 – Розрахункова схема

Тобто невідомих реакцій більше, ніж можна скласти рівнянь рівноваги. На перший погляд задача статично невизначена але цю невизначеність можна усунути, якщо прибрати шарнір В і розглянути рівновагу кожної з балок *AB* і *BC* окремо (рисунок 6.2.4.в).

Шарнір *B* являє собою внутрішню в'язь, а тому при поділені конструкції на дві частини повинні з'явитися реакції: для балки *AB* - з боку відкинутої балки *BC*, для балки *BC* - з боку відкинутої балки *AB*. Ці реакції, згідно з аксіомою про рівність дії та протидії, дорівнюють одна одній та спрямовані протилежно.

Оскільки в'язь *B* – шарнірна, то реакцій тут дві: для балки *AB* - це $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, для балки *BC* - це $\overline{X}'_B$, $\overline{Y}'_B$, до того ж модулі цих сил:

$$X'_B = X_B; Y'_B = Y_B.$$

Таким чином, ми додали ще дві невідомі реакції $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, тобто тепер невідомих сил вже шість. Але і рівнянь рівноваги можна скласти шість: по три для кожної частини конструкції, так, що задача тепер є статично визначеною.

Складемо рівняння рівноваги для балок АВ і ВС:

Для балки АВ:

$$\begin{aligned} &\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \\ &\sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \\ &\sum F_{kx} = 0; \end{aligned} \qquad \begin{cases} Y_B \cdot AB - P \cdot \dfrac{AB}{2} = 0 \\ P \cdot \dfrac{AB}{2} - Y_A \cdot AB = 0 \cdot \\ X_A + X_B = 0 \end{cases}$$

Для балки *BC*:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0; \\ &\sum F_{ky} = 0; \\ &\sum m_B(\overline{F}_k) = 0; \end{aligned} \qquad \begin{cases} X_C - X'_B = 0 \\ Y_C - Y'_B - P = 0 \\ Y_C \cdot BC \cdot \sin\alpha - X_C \cdot BC \cdot \cos\alpha - P \cdot \dfrac{BC}{2} \cdot \sin\alpha = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо системи рівнянь з шістьма невідомими та знайдемо:

$$X_A = -X_B = -X_C = Ptg\alpha; Y_A = Y_B = \frac{P}{2}; Y_C = \frac{3P}{2}.$$

Напрямки реакцій $\overline{X}_B$, $\overline{X}'_B$ та $\overline{X}_C$ протилежні тим, що показані на рисунці, бо вони одержані від'ємними.

Задачу можна вирішити і іншим шляхом, розглядаючи спочатку рівновагу усієї системи. Так як внутрішні сили взаємно зрівноважуються, то в рівняння рівноваги увійдуть тільки зовнішні сили: активні - $\overline{P}$ і реактивні - $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{X}_C$, $\overline{Y}_C$.

В результаті одержимо:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad \begin{cases} X_A + X_C = 0; \\ Y_A + Y_C - 2P = 0; \\ Y_C(AB + BC \cdot \sin\alpha) - \dfrac{P \cdot AB}{2} - P\left(AB + \dfrac{BC}{2} \cdot \sin\alpha\right) - \\ - X_C \cdot BC \cdot \cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Розглядаючи додатково одну з частин конструкції (чи то *AB*, чи то *BC*) та складаючи рівняння для неї, одержимо систему з шести рівнянь з шістьма невідомими. Розв'язуючи цю систему, знайдемо шукані величини.

З поданого прикладу витікає, що питання про статичну визначеність конструкції, яка складається з кількох тіл, повинно вирішуватися за допомогою розкладення цієї конструкції на окремі частини.

Приклад 5

Невагома складова рама, частини якої з'єднані шарніром в точці С, знаходиться в рівновазі під дією заданих навантажень. визначити опорні реакції зовнішніх зв'язків і зусилля в проміжному шарнірі С.

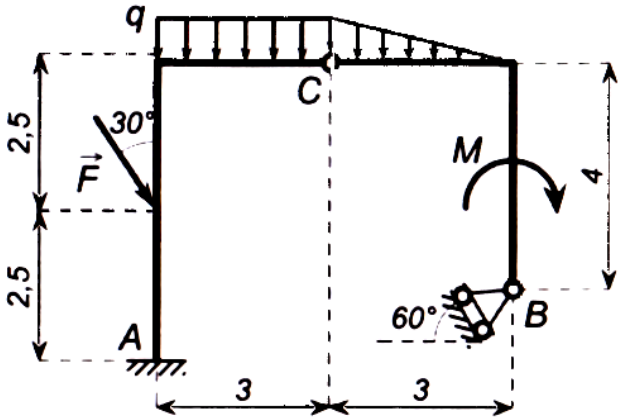
Дано:

F= 5 кН;

q=2 кН/м;

M=8 кНм.

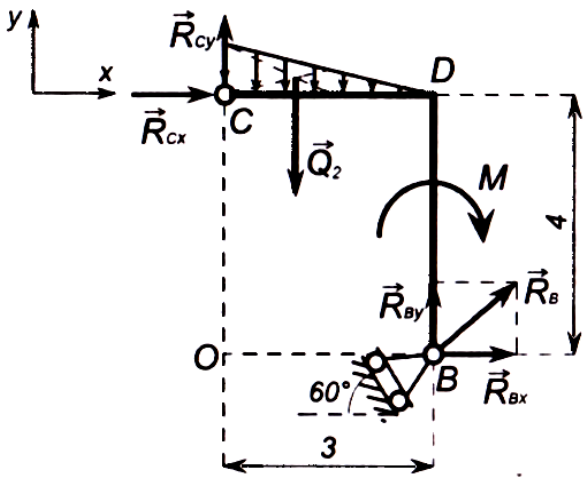
Знайти: R_{Ax}, R_{Ay}, m_A, R_{Cx}, R_{Cy}, R_B.



Розв'язування

Розділимо раму на дві частини по проміжному шарніру С, вважаючи, що проміжний шарнір С одночасно належить кожної з частин.

Розглянемо рівновагу правої частини рами.



Складемо розрахункову схему правій частині рами. На неї діє активна пара сил з моментом М. Розподілене навантаження, що змінюється за лінійним законом, замінюємо рівнодіюча силою Q_2, яку прикладаємо в точці перетину медіан трикутника, тобто на відстані – CD/3 від точки С, її чисельне значення одно:

$$Q_2 = q \cdot \frac{CD}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ кН}.$$

Зображені сили реакцій зовнішніх і внутрішніх зв'язків. Реакцію рухомого шарніра R_B направляємо перпендикулярно поверхні. Для нерухомого проміжного шарніру С вказуємо дві складові реакції – горизонтальну R_{Cx} і вертикальну R_{Cy}.

Виберемо систему відліку: вісь Ох спрямовуємо горизонтально, вісь Оу - вертикально.

Сили, що діють на праву частину конструкції, утворюють довільну плоску систему сил, умова рівноваги якої має вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{Ci} = 0. \end{cases}$$

Складемо три рівняння рівноваги правої частини рами:

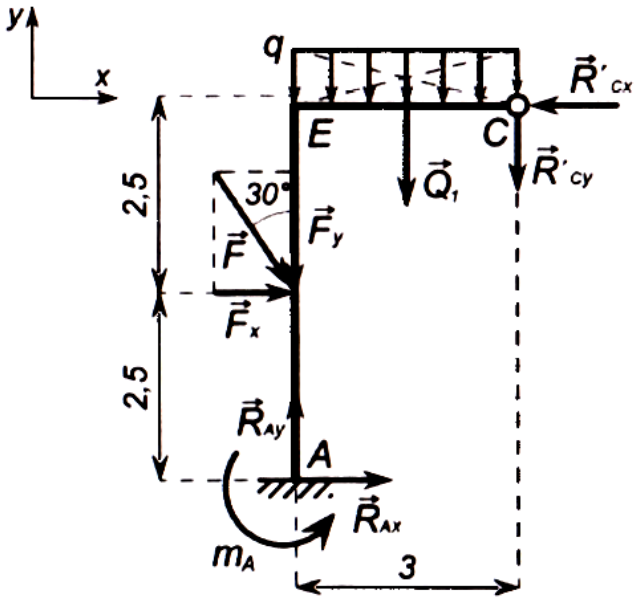
$$\begin{cases} R_B \cdot \cos 30° + R_{Cx} = 0; \\ R_B \cdot \cos 60° + R_{Cy} - Q_2 = 0; \\ R_B \cdot \cos 60° \cdot 3 + R_B \cdot \cos 30° \cdot 4 - M - Q_2 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Момент сили R_B знайдений з використанням теореми Варіньона, враховуючи, що проекції сили R_B на осі координат дорівнюють:

$$R_{Bx} = R_B \cdot \cos 30°,\ R_{By} = R_B \cdot \cos 60°.$$

Розглянемо рівновагу лівої частини конструкції і складемо для неї розрахункову схему. На ліву частину рами діють активна сила F і рівномірно розподілене навантаження q, яку замінюємо зосередженої силою Q_1 з чисельним значенням

$$Q_1 = q \cdot CE = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН}.$$



Зв'язки в точках А і С замінюємо силами реакції зв'язків. У закладенні в точці А вказуємо дві складові реакції - горизонтальну R_{Ax} і вертикальну R_{Ay} і реактивний момент закладення т А. Реакція шарніра С включає дві складові R'_{Cx} і R'cy. Відповідно до аксіомою про дію та протидію вони рівні по значенням і протилежні за напрямками силам R_{Cx} і R_{Cy}:

$$\vec{R}_{Cx} = -\vec{R}'_{Cx};$$
$$\vec{R}_{Cy} = -\vec{R}'_{Cy}.$$

На ліву частину складеної конструкції діє також довільна плоска система сил, тому для неї складемо три рівняння рівноваги у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{Ai} = 0. \end{cases}$$

З урахуванням даних завдання отримуємо:

$$\begin{cases} R_{Ax} + F \cdot \cos 60° - R'_{Cx} = 0; \\ R_{Ay} - F \cdot \cos 30° - Q_1 - R'_{Cy} = 0; \\ -F \cdot \cos 60° \cdot 2{,}5 + m_A - Q_1 \cdot 1{,}5 + R'_{Cx} \cdot 5 - R'_{Cy} \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Тут відразу враховано, що $R'_{Cx} = R_{Cx}$; $R'_{Cy} = R_{Cy}$.

Вирішуючи отриману систему рівнянь (1)-(6), знаходимо невідомі реакції зв'язків.

З рівнянь (3), (1), (2) послідовно отримуємо значення шуканих опорних реакцій:

$$R_B = \frac{M + Q_2}{3 \cdot \cos 60° + 4 \cdot \cos 30°} = \frac{11}{3 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}866} = 2{,}22 \text{ кН};$$

$$R_{Cx} = -R_B \cdot \cos 30° = -2{,}22 \cdot 0{,}866 = -1{,}92 \text{ кН};$$

$$R_{Cy} = Q_2 - R_B \cdot \cos 60° = 3 - 2{,}22 \cdot 0{,}5 = 1{,}89 \text{ кН}.$$

З рівняння (4) маємо:

$$R_{Ax} = R'_{Cx} - F \cdot \cos 60° = -1{,}92 - 5 \cdot 0{,}5 = -4{,}42 \text{ кН}.$$

З рівняння (5):

$$R_{Ay} = F \cdot \cos 30° + Q_1 + R'_{Cy} = 5 \cdot 0{,}866 + 6 + 1{,}89 = 12{,}22 \text{ кН}.$$

З рівняння (6) знаходимо:

$$m_A = F \cdot \cos 60° \cdot 2{,}5 + Q_1 \cdot 1{,}5 - R'_{Cx} \cdot 5 + R'_{Cy} \cdot 3 = \\ = 5 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}5 + 6 \cdot 1{,}5 + 1{,}92 \cdot 5 + 1{,}89 \cdot 3 = 30{,}52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для перевірки правильності рішення розглянемо рівновагу рами в цілому.

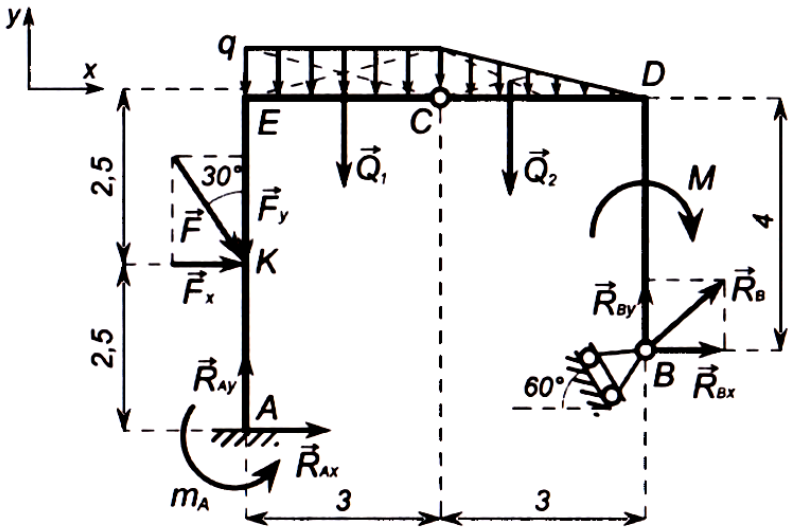
Складемо розрахункову схему рами, зобразивши на ній всі активні сили і сили реакції зовнішніх зв'язків в точках А і В. Внутрішні сили в точці С компенсують один одного і тому на схемі не зображуються.

Умова рівноваги рами має вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{Ki} = 0. \end{cases}$$

Складемо три рівняння рівноваги рами в цілому:

$$\begin{cases} R_{Ax} + F \cdot \cos 60° + R_B \cdot \cos 30° = 0; \\ R_{Ay} - F \cdot \cos 30° - Q_1 - Q_2 + R_B \cdot \cos 60° = 0; \\ m_A + R_{Ax} \cdot 2{,}5 - Q_1 \cdot 1{,}5 - Q_2 \cdot 4 - M + R_{Bx} \cdot 1{,}5 + R_{By} \cdot 6 = 0. \end{cases}$$



Підставляючи чисельні значення величин, заданих в умові завдання, і знайдені значення опорних реакції з отриманими знаками, переконуємося, що все сили реакції і реактивний момент в закладенні визначені вірно:

$$\begin{cases} -4{,}42 + 5 \cdot 0{,}5 + 2{,}22 \cdot 0866 = 0; \\ 12{,}22 - 5 \cdot 0{,}866 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1{,}5 + 2{,}22 \cdot 0{,}5 = 0; \\ 30{,}52 - 4{,}42 \cdot 2{,}5 - 6 \cdot 1{,}5 - 3 \cdot 4 - 8 + 2{,}22 \cdot 0{,}866 \cdot 1{,}5 + 2{,}22 \cdot 0{,}5 \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. Сили реакції зв'язків рівні: R_{Ax} = -4,42 кН; R_{Ay} = 12,22 кН; m_A =30,52 кН • м; R_B = 2,22 кН; R_{Cx} = -1,92 кН; R_{Cy} = 1,89 кН. Знаки реакцій вказують, що зусилля R_{Ay}, m_A, R_{Cy}, R_B. Спрямовані так, як показано на кресленні, а сили R_{Ax}, R_{Cx} спрямовані в сторони, протилежні тим, які показані на кресленні.

Контрольні запитання

1. Рівняння рівноваги просторової паралельної системи сил.
2. Залежність між головними моментами щодо різних центрів приведення.
3. Рівновага складових тіл.
4. Центр паралельних сил, центр ваги тіла. Визначення його положення.
5. Момент сили щодо осі.
6. Моменти сили щодо координатних осей.
7. Тертя.

ТЕМА 6. ТЕРТЯ

План

6.1. Закони тертя ковзання Кулона

6.2. Реакція шорсткої в'язі. Кут та конус тертя

6.3. Тертя кочення

6.4. Приклади розв'язування задач про рівновагу сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)

В попередніх розділах, розглядаючи рівновагу невільних тіл (тобто таких, на які накладені в'язі), ми мали на увазі, що поверхні стикання об'єкта рівноваги і в'язей – ідеально гладкі, і тоді на цій поверхні не виникає сил опору, якщо тіло має рухатися відносно в'язі.

Якщо ж поверхні стикання тіл – шорсткі та знаходяться під деяким стиском між собою, то при прагненні рухати одне тіло уздовж іншого в площині їх стикання виникає сила опору їх відносному ковзанню, яка зветься силою тертя ковзання.

Таким чином, тертя викликається шорсткістю поверхні та наявністю зчеплення тіл, що стикаються.

При розгляданні явища тертя належить відрізняти статичне тертя, що має місце при відносному спокої тіл, які стикаються, і тертя руху (динамічне тертя). Розглянемо закони тертя ковзання в спокої.

6.1. Закони тертя ковзання Кулона

Перший закон. Розглянемо тіло, що наведено на рисунку 6.1, яке знаходиться на площині в спокої, при цьому площини їх стикання – шорсткі.

Так як тіло знаходиться в рівновазі, то очевидно, що в відповідності з визначенням, сила тертя відсутня (нема прагнення до руху).

Прикладемо до тіла *A* змінну силу $\overline{Q}$, яка діє паралельно поверхні. Цю силу, яка прагне перемістити тіло *A*, назвемо зсуваючою силою. Очевидно, якщо б поверхні стикання були б ідеально гладкими, то будь-яка мала, але більша нуля, сила $\overline{Q}$ привела б тіло *A* до руху. Якщо ж поверхні опору шорсткі, то наявність між ними зчеплення призводить до виникнення сили опору, тобто сили тертя - $\overline{F}_{тр}$.

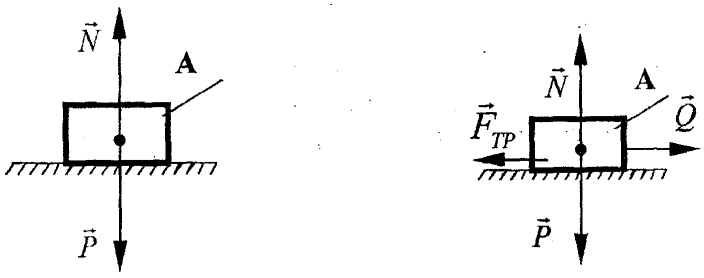


Рисунок 6.1 – Сили, діючи на тіло на шорсткій площині

Щоб тіло *A* почало рухатися, зсуваючій силі $\overline{Q}$ треба подолати силу тертя. Вона при цьому повинна досягти деякого граничного значення, бо до цього моменту сили $\overline{Q}$ і $\overline{F}_{тр}$ врівноважувались, так як руху немає. З того, що сказано, можливо зробити такі висновки:

1. При відсутності зсуваючої сили нема і сили тертя.

2. Сила тертя до деякого моменту дорівнює зсуваючій силі. Цей момент визначається миттю, коли тіло виходить з положення рівноваги.

Ці висновки дають підставу для формулювання першого закону Кулона: ***сила тертя ковзання знаходиться в спільній дотичній площині до поверхні стичних тіл, спрямована в бік, протилежний напрямку можливого руху тіла під дією зсуваючої сили, а чисельно величина сили тертя може отримати будь-яке значення від нуля до деякої граничної величини*** $\overline{F}_{гр}$***, яку досягає в момент виходу тіла з положення рівноваги.***

Отже,

$$0 \le \overline{F}_{тр} \le \overline{F}_{гр}.$$

Другий закон. Цей закон установлює зв'язок між граничною силою тертя та силою, з якою тіла притисканні одне до одного: ***величина граничної сили тертя ковзання пропорційна нормальному тиску (нормальній реакції).***

$$\overline{F}_{гр} = Nf_0,$$

де *N* – виникаюча при сумісному тиску тіл, нормальна реакція;

f_0 - коефіцієнт пропорційності, який зветься коефіцієнтом тертя ковзання в спокої (або статичним коефіцієнтом тертя).

Цей коефіцієнт тертя визначається дослідним шляхом і залежить від фізичних властивостей матеріалів сутичних поверхонь та їх стану (характер обробки, вологість, мастило, температура та ін.).

Якщо тіло знаходиться в рівновазі, то, об'єднуючи перший та другий закони, будемо мати: $\overline{F}_{тр} \le \overline{F}_{гр}$ тобто:

$$\overline{F}_{тр} \le Nf_0.$$

Уяву про величину f_0 дають наступні цифри: при терті дерева об дерево f_0 = 0,4 - 0,7, метала об метал f_0 = 0,15 - 0,35, сталі об льод f_0 = 0,027.

Третій закон. Цей закон в деякій мірі дає межі використання попереднього закону та формулюється так: ***гранична сила тертя ковзання при інших рівних умовах не залежить від площі стискання поверхонь тертя.***

6.2. Реакція шорсткої в'язі. Кут та конус тертя

Розглядаючи види в'язей, ми особливо виділили ідеально гладку поверхню з нормальною реакцією. В дійсності ж в'язі - шорсткі, і тоді можна казати, що виникають дві реакції - нормальна $\overline{N}$ та перпендикулярна до неї сила тертя $\overline{F}_{тр}$.

Ці реакції, якщо їх додати, утворюють одну силу $\overline{R}$, яка називається реакцією шорсткої поверхні. Вона буде відхилена від нормалі до сумісної дотичної на деякий кут, який при зміні сили тертя до її граничного значення $\overline{F}_{гр}$ буде збільшуватися до максимального значення $\overline{R}_{\max}$; при цьому і реакція шорсткої поверхні збільшується до максимуму. Кут φ, який утворює максимальна реакція з нормаллю, це кут тертя.

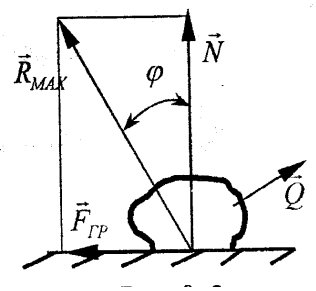


Рисунок 6.2.1 – Кут тертя

З рисунку 6.2.1. видно, що $\overline{F}_{гр} = N tg\varphi$.

Зв'язок між кутом тертя і коефіцієнтом тертя: $tg\varphi = f_0$. Так як при рівновазі сила тертя завжди менша, або дорівнює граничній силі тертя,то і повна реакція $\overline{R}$ при рівновазі завжди менша, або дорівнює $\overline{R}_{\max}$.

Звідси витікає - якщо кут, який утворює повна реакція шорсткої поверхні, менш, ніж кут тертя φ, то тіло знаходиться в рівновазі під дією заданої системи активних сил.

В залежності від дії активних сил напрям граничної реакції може змінюватися. Геометричне місце всіх можливих напрямів максимальної реакції $\overline{R}_{\max}$ утворює конічну поверхню - конус тертя, який наведено на рисунку 6.2.2,а.

Якщо коефіцієнт тертя в усіх напрямках однаковий, то і кут φ буде також однаковим, отже, конус буде круговий. У тих випадках, коли коефіцієнт тертя залежить від напрямку можливого руху (наприклад, вздовж або проти волокон дерев'яної дошки), конус тертя не буде круговим.

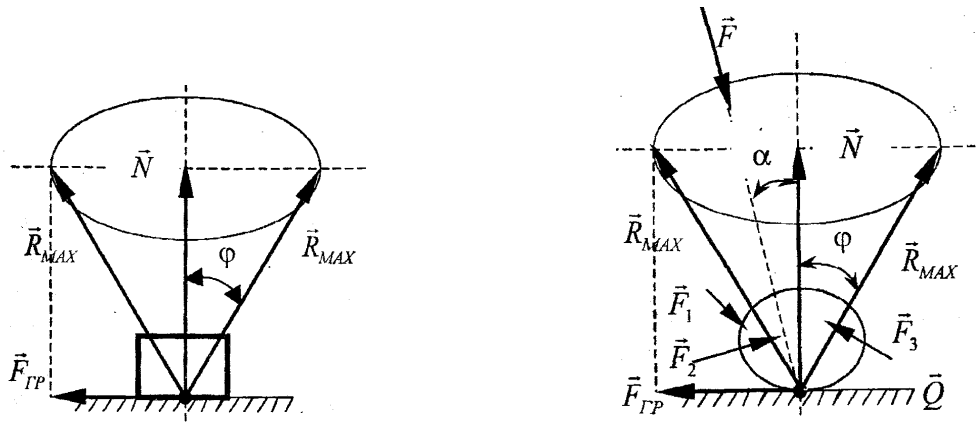
Розглянемо випадок, коли активні сили, діючі на тіло, зводяться до однієї рівнодіючої $\overline{F}$, яка складає кут α з нормаллю до поверхні (рисунок 6.2.2,б.).

При цьому нормальна реакція $\overline{N}$ та зсуваюча сила $\overline{Q}$ за величиною будуть дорівнювати:

$$N = F\cos\alpha; Q = F_{тр} = F\sin\alpha.$$

Гранична сила тертя:

$$F_{гр} = f_o N = f_o F\cos\alpha.$$



а) б)

Рисунок 6.2.2 – Конус тертя

Як було показано раніше, якщо зсуваюча сила $\overline{Q}$ менша або дорівнює граничній силі тертя $\overline{F}_{гр}$, то тіло рухатися не буде, тобто його рівновага не порушиться, при цьому:

$$Q \le F_{гр} \quad або \quad F\sin\alpha \le f_o F\cos\alpha.$$

Вважаючи, що

$$f_o = tg\varphi; \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

будемо мати:

$$tg\alpha \le tg\varphi, \quad або \quad \alpha \le \varphi.$$

Висновки:

1. Для рівноваги тіла на шорсткій поверхні необхідно та достатньо, щоб лінія дії рівнодіючої активних сил, прикладених до тіла, проходила в середині конуса тертя або вздовж його твірної.

2. Тіло неможливо вивести з рівноваги будь-якою за величиною активною силою, якщо її лінія дії проходить в середині конуса тертя.

6.3. Тертя кочення

З повсякденного досвіду відомо, що для того, щоб зрушити з місця (покотити) важкий каток, необхідно прикласти деяку, іноді достатньо велику, силу. Наочно, що при цьому долається опір, який виникає при коченні циліндра. Цей опір називається тертям кочення.

Однак, в рамках абсолютно твердого тіла обґрунтувати та вивести які-небудь співвідношення для тертя кочення неможливо. Це саме той випадок, коли треба відійти від моделі абсолютно твердого тіла.

Розглянемо круглий циліндричний каток, що деформується, радіуса *R* та ваги P , який лежить на горизонтальній шорсткій нетвердій поверхні (рисунок 6.3.).

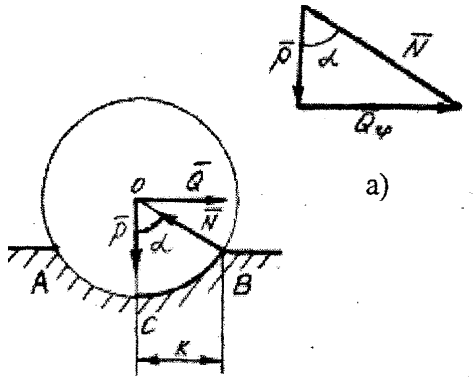


Рисунок 6.3 – Сили, діючи на тіло з урахуванням тертя кочення

Внаслідок деформації тіл торкання їхнє відбувається не в точці *C* (як це було б у випадку абсолютно твердих, тіл), а вздовж деякої поверхні *ACB*.

Нехай до осі циліндра прикладена зсуваюча горизонтальна сила $\overline{Q}$, що менша, ніж $\overline{R}_{\max}$ (щоб циліндр не ковзав на поверхні).

При дії сили $\overline{Q}$ інтенсивність тиску у кінця А поверхні торкання зменшується, а у кінця В – росте.

Тобто нормальна реакція $\overline{N}$ нібито зміщується в точку В і відхиляється від вертикалі на малий (за рахунок малої деформації) кут α. Ця реакція зрівноважує сили тяжіння P та зсуваючу $\overline{Q}$.

Зміщення точки *B* від вертикалі *OC* зростає зі збільшенням зсуваючої сили і в деякий момент, який залежить від матеріалів стикаючих тіл, коли $\overline{Q} = \overline{Q}_{гр}$ рівновага порушується, тобто циліндр починає рухатися. В цей момент відстань *CB* дістає величини, яку позначимо «*k*». Зображуючи окремо силовий трикутник, зображений на рисунку 6.3.а, і, вважаючи трикутник *OBC* приблизно прямокутним, найдемо з їх подібності:

$$\frac{Q_{гр}}{N} = \frac{k}{R}, \quad або \quad Q_{гр} = \frac{k}{R} N.$$

Якщо $\overline{Q} \le \overline{Q}_{гр}$ каток нерухомий; кочення починається при $\overline{Q} \ge \overline{Q}_{гр}$. Величина «*k*» має розмірність довжини і називається коефіцієнтом тертя

кочення. Цей коефіцієнт звичайно вимірюється в сантиметрах і визначається дослідне. Для прикладу приведемо значення коефіцієнта "k" для деяких матеріалів. Так, для дерева по дереву k = 0,05-0,08 см, для сталь по сталі k=0,005см.

Відмітимо, що слід поділяти чисте кочення, коли точка стикання котка не ковзає на нерухомій поверхні, чисте ковзання - коли коток рухається по площині, не маючи обертання, від кочення з ковзанням, коли разом з обертанням котка є і проковзання, тобто точка торкання рухається по площині.

Відношення $\frac{k}{R}$ носить назву приведеного коефіцієнта тертя кочення і характеризує різницю в величині зсуваючої сили, необхідної для початку руху даного котка при чистому ковзанні і чистому коченні.

6.4. Приклади розв'язування задач про рівновагу сил з урахуванням зчеплення (тертя спокою)

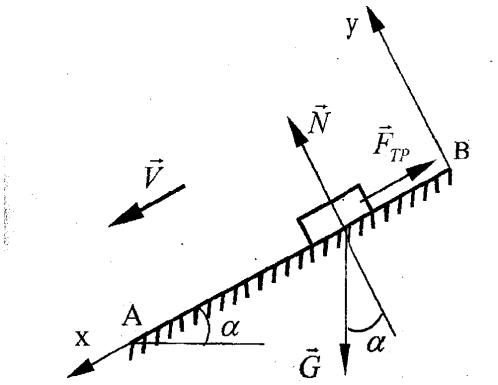


Рисунок 6.4.1 – Тіло на похилій площині

Приклад 1. Шорсткій похилій площині надан такий кут α (рисунок 6.4.1.) нахилу до обрію, що важке тіло, яке розташовано на цій площині, спускається з тією постійною швидкістю, яка була йому подана на початку руху. Визначити коефіцієнт тертя.

Розв'язування

Так як тіло рухається рівномірно та прямолінійно, то система сил, прикладених до тіла, знаходиться в рівновазі. Це сили: тяжіння $\overline{G}$, нормальна реакція $\overline{N}$ та сила тертя ковзання $\overline{F}_{тр}$.

Система сил плоска збіжна і для неї можна записати дві умови рівноваги.

Спрямуємо вісь ***X*** вздовж напряму руху тіла, тоді умови та рівняння рівноваги запишуться:

$$\sum F_{kx} = 0; G\sin\alpha - F_{тр} = 0$$
$$\sum F_{ky} = 0; N - G\cos\alpha = 0.$$

Як відомо $F_{тр} = f_o N.$

Знайдемо $N = G\cos\alpha.$

Тоді $F_{тр} = f_o g\cos\alpha.$

Підставимо та знайдемо

$$G\sin\alpha - f_0 g\cos\alpha = 0$$

Звідки:

$$f_0 = tg\alpha.$$

Приклад 2. Схема системи, яка знаходиться у стані спокою наведена на рисунку 8.4.2.: G = 2 кН; Q = 20 кН; коефіцієнт зчеплення (тертя спокою) $f_{зч}$ = =0,1; α = 20°, *a* =10 см; *b*=20 см.

Визначити мінімальне значення сили *P* та реакції опор *O, A.* та *B.*

Розв'язування

Розглянемо спочатку систему сил, доданих до тіла *Q*, що врівноважуються (рисунок 6.4.3.). На тіло діють сила тяжіння *Q*, реакція нитки *T* та нормальна реакція N_1.

Розглядаючи тіло *Q* як матеріальну точку, складемо рівняння рівноваги означених сил:

$$\sum X_i = 0;\ \ Q\cos 45^o - T = 0; \qquad \sum Y_i = 0;\ \ N_1 - Q\sin 45^o = 0.$$

Звідки

$$T = Q\cos 45^o;\ \ N_1 = Q\sin 45^o.$$

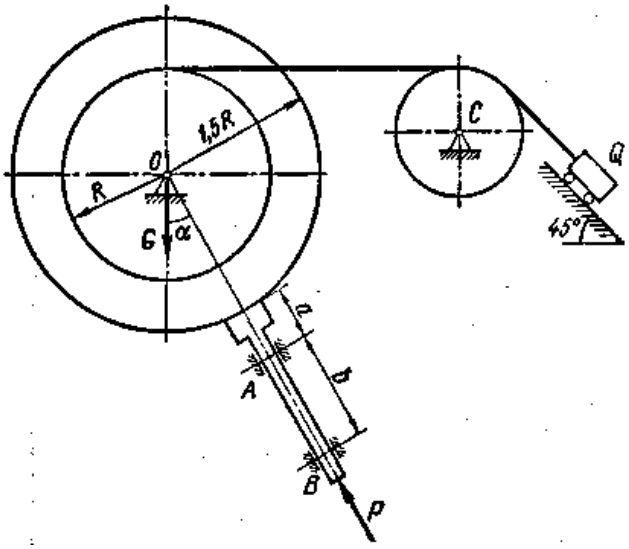


Рисунок 6.4.2 – Схема системи

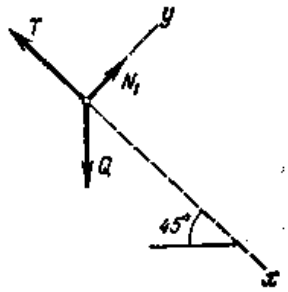


Рисунок 6.4.3 – Система сил, доданих до тіла *Q*

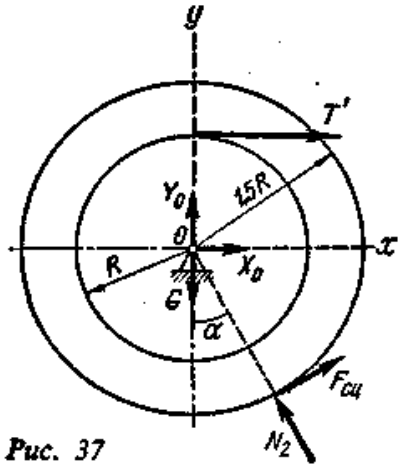


Рисунок 6.4.4 – Рівновага сил, доданих до барабану

Після цього розглянемо рівновагу сил, доданих до барабану, наведеного на рисунку 6.4.4.

$$M_{iO} = 0;\ -T'R+F_{зч}\cdot 1,5R = 0,$$

де $F_{зч}$ – сила зцеплення (сила тертя спокою).

$$\sum X_i = 0;\ T'+F_{зч}\cos\alpha - N_2\sin\alpha + X_O = 0$$

$$\sum Y_i = 0;\ N_2\cos\alpha + F_{зч}\sin\alpha + Y_O - G = 0$$

$$F_{зч} = f_{зч} N_2.$$

З рівнянь отримаємо:

$$F_{зч} = T'/1,5;\ N_2 = F_{зч}/f_{зч};\ X_O = -T'-F_{зч}\cos\alpha + N_2\sin\alpha$$

$$Y_O = -N_2\cos\alpha - F_{зч}\sin\alpha + G.$$

Для визначення мінімального значення сили *P* та реакцій опор *A* і *B* (ці реакції перпендикулярні *A* та *B*, бо тертям нехтуємо) розглянемо рівновагу сил, доданих до штоку гальмовного приладу (рисунок 8.4.5):

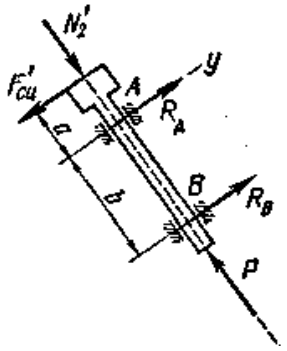


Рисунок 6.4.5 – Рівновага сил, доданих до штоку

$$\sum M_{iA} = 0;\ F'_{зч}a + R_B b = 0$$

$$\sum X_i = 0;\ N_2 - P_{min} = 0$$

$$\sum Y_i = 0;\ R_A + R_B - F'_{зч} = 0.$$

Вирішуючи ці рівняння, отримаємо:

$$R_B = -F'_{зч}a/b;\quad P_{min} = N'_2;\ R_A = -R_B + F'_{зч}.$$

Враховуючи задані в умові числові значення, отримаємо:

$$N_1 = 14,1kH;\quad F_{зч} = 9,4kH$$

$$N_2 = 94kH;\quad X_0 = 9,2kH$$

$$Y_0 = -89,6kH;\quad R_B = -4,7kH$$

$$R_A = 14,1kH;\quad P_{min} = 94kH.$$

Для визначення реакцій опори *C* достатньо скласти рівняння рівноваги сил, доданих до блоку.

Приклад 3. Схема системи, яка знаходиться у стані спокою наведена на рисунку 8.4.6.: G = 1 кН; $f_{зч}$ = 0,4; *a*=6 м; в=2 м (рисунок 6.4.6).

Визначити максимальне значення сили *P* та реакції у точках *A, B, D* та *E.*

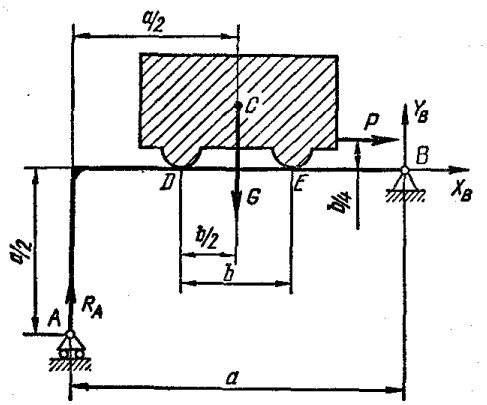


Рисунок 6.4.6 – Схема системи

Розв'язування

Розглянемо спочатку систему сил, доданих до тіла вагою *G*, що врівноважуються.

До тіла додані сила тяжіння *G*, сила *P*, складові реакцій N_D и N_E, а також дотичні складові сили зчеплення $F_{зч\ D}$ та $F_{зч\ E}$ (сили тертя спокою).

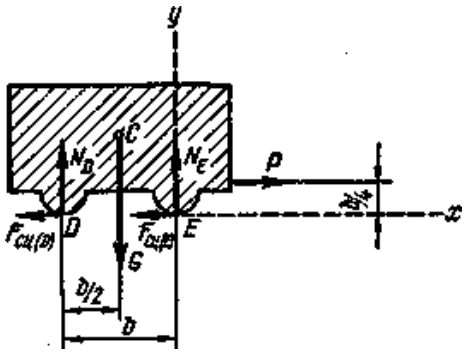


Рисунок 6.4.7 – Розрахункова схема

Складемо три рівняння рівноваги означених сил:

$$\sum X_i = 0;\ -F_{зч\ (D)} - F_{зч\ (E)} + P = 0$$

$$\sum Y_i = 0;\ N_D + N_E - G = 0$$

$$\sum M_{iD} = 0;\ -Gb/2 + N_E b - Pb/4 = 0.$$

У випадку граничної рівноваги $P = P_{max}$. В цьому випадку сили зчеплення (сили тертя спокою) приймають екстремальні значення.

Система рівнянь доповнюється рівняннями:

$$F_{зч\ (D)} = f_{зч} N_D;$$

$$F_{зч\ (E)} = f_{зч} N_E.$$

Вирішуючи систему рівнянь, одержуємо:

$$P_{max} = f_{зч} G;\quad N_E = (G/2)(1+0{,}5 f_{зч});\quad N_D = (G/2)(1-0{,}5 f_{зч}).$$

Звідки:

$$P_{max}=0,4kH; \quad N_E= 0,6kH.$$

$$N_D=0,4kH; \quad F_{зч(D)} = 0,16kH.$$
$$F_{зч(E)} = 0,24kH.$$

Сукупності сил N_D и $F_{зч\ (D)}$, N_E и $F_{зч\ (E)}$ утворюють відповідно опорні реакції у точках *D* і *E*.

Розглянемо тепер рівновагу системи сил R_A, $X_в$, $У_в$, G и P = P_{max}, доданих до всієї системи:

$$\sum X_i =0; \ X_B+P_{max}=0$$

$$\sum Y_i=0; \ R_A-G+Y_B=0$$

$$\sum M_{iB}=0; \ -P_{max}\cdot b/4+G\cdot a/2-R_A\cdot a=0.$$

Вирішуючи ці рівняння, одержуємо:

$$X_B= -P_{max}; \quad R_A=(G\cdot a/2-P_{max}\cdot b/4)/a; \quad Y_B=G-R_A.$$

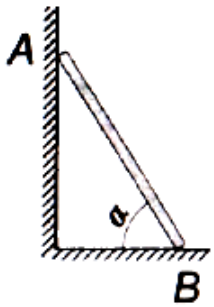
Звідки

$$X_B=-0,4\ кН, \quad R_A=0,467\ кН, \quad Y_B=0,533\ кН.$$

Приклад 1

Сходи вагою G = 100 Н спирається на горизонтальну підлогу і вертикальну стіну. Стіна гладка, коефіцієнт тертя сходи об підлогу f = 0,4.

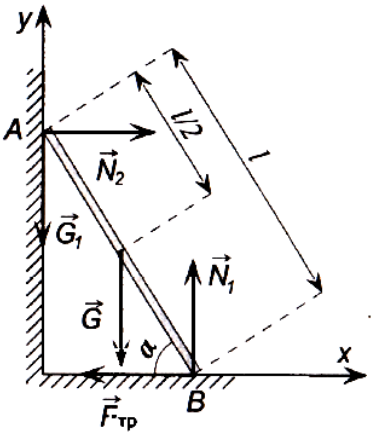
Під яким кутом α потрібно поставити драбину, щоб по ній міг піднятися наверх людина вагою G_1 = 800 Н ?



Дано:
G=100Н;
f = 0,4;
G_1 =800 Н.
Знайти: *a*

Складемо розрахункову схему. Покажемо на схемі сили, діючі на сходи з людиною: сила тяжіння сходів G, сила тяжіння людини G_1, нормальні реакції N_1 і N_2 в точках A і B і сила тертя $F_{Тр}$, спрямована в бік протилежний можливого руху сходів.

Розв'язування



Сили, що діють на сходи, утворюють довільну плоску систему сил, рівновагу якої можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0\,; \\ \sum F_{iy} = 0\,; \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Позначимо довжину драбини l і складемо рівняння рівноваги.

$$\begin{cases} N_2 - F_{тр} = 0; & (1) \\ N_1 - G - G_1 = 0; & (2) \\ G_1 \cdot l \cdot \cos\alpha + G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha - N_2 \cdot l \cdot \sin\alpha = 0. & (3) \end{cases}$$

Рівняння (3) розділимо l • cos α, і воно набуде вигляду:

$$G_1 + 0{,}5 \cdot G - N_2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 0. \qquad (4)$$

Для граничного стану рівноваги, відповідного мінімального значення кута α, сили тертя відповідно до закону Кулона дорівнює:

$$F_{тр} = F_{max_{тр}} = f \cdot N_1.$$

З рівнянь (1), (2) і (4) отримаємо:

$$N_2 = F_{тр} = f(G + G_1),$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2 \cdot G_1 + G}{2 \cdot f \cdot (G_1 + G)}.$$

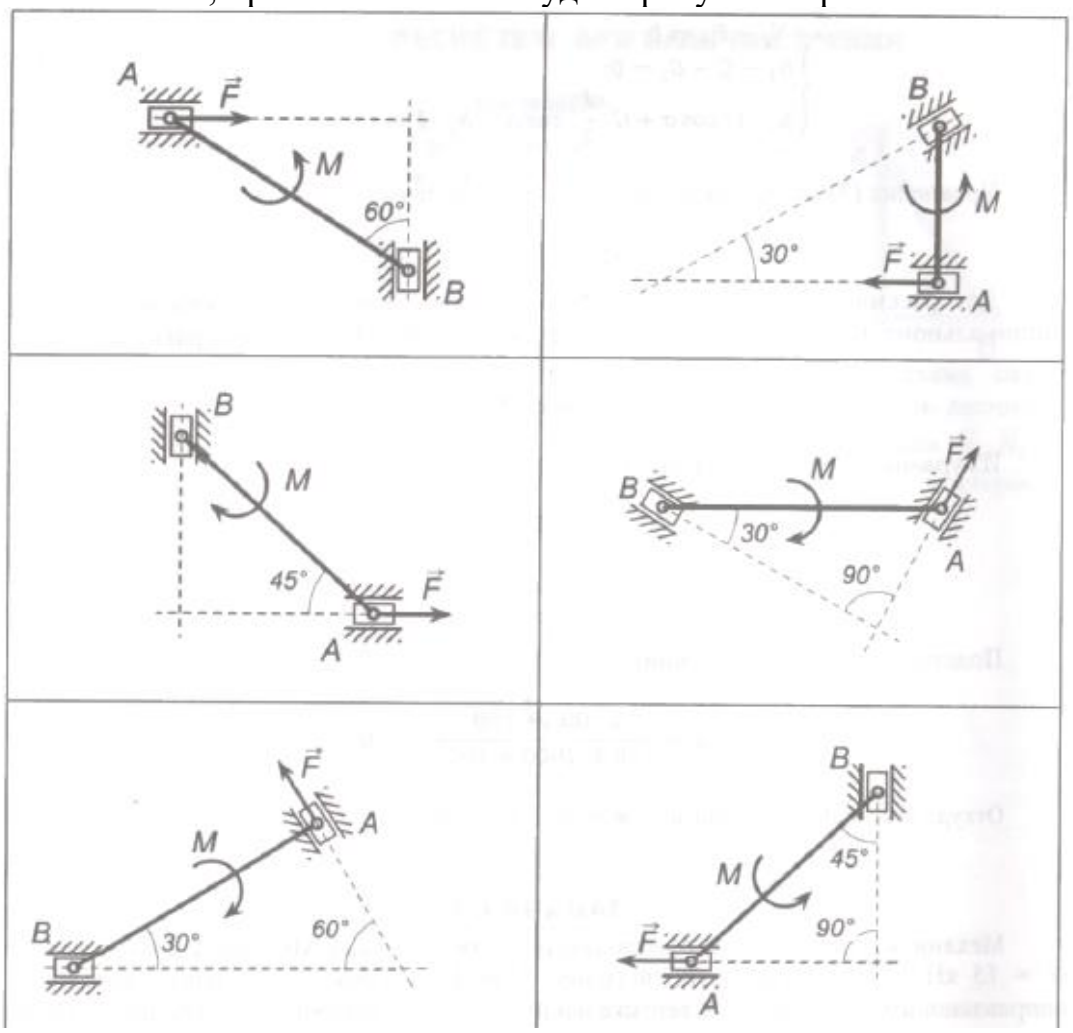
Підставами числові значення:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2 \cdot 800 + 100}{2 \cdot 0{,}4 \cdot (800 + 100)} \approx 2{,}36.$$

Звідки шуканий кут а дорівнює:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\, 2{,}36 \approx 67°.$$

<u>Завдання.</u> Механізм, що складається з однорідного тонкого стрижня АВ довжиною 1 = 4 м, вагою G = 15 кН і двох невагомих плазунів А і В, які можуть переміщатися по напрямних, розташований у вертикальній площині. Коефіцієнт тертя повзуна А по направляючої становить f = 0,4, тертя у повзуна В відсутня. на стрижень АВ діє пара сил з моментом М = 20 кН м. Визначити значення сили F, при якої механізм буде перебувати в рівновазі.



Контрольні запитання

1. Де прикладена і як спрямована сила тертя ковзання при спокої?
2. Сформулюйте закони тертя ковзання спокою.
3. Як визначається статичний коефіцієнт тертя, які його властивості?
4. Чому дорівнює і як спрямована сила тертя ковзання при русі?
5. Як визначається динамічний коефіцієнт тертя, які його властивості?
6. Де прикладена, як спрямована і чому дорівнює сила тертя кочення?
7. Як визначається коефіцієнт тертя кочення? Вкажіть його розмірність.
8. Чому дорівнює момент тертя кочення?

ТЕМА 7. ЦЕНТР ВАГИ

План

7.1. Центр паралельних сил.
7.2. Центр ваги твердого тіла.
7.3. Координати центрів ваги однорідних тіл.
7.4. Способи визначення координат центрів ваги тіл.
7.4.1. Симетрія.
7.4.2. Розбиття.
7.4.3. Доповнення (метод від'ємних мас).
7.4.4. Експериментальний спосіб.
7.5. Центри ваги простіших фігур.

Сила тяжіння тіла до Землі називається силою ваги, або вагою тіла.

Якщо прив'язати до одного з кінців нитки вагу, закріпив другий кінець нерухомо, то очевидно, що сила ваги буде мати напрям нитки. Цей напрям називається прямовисним або вертикальним, а площина, що перпендикулярна цій вертикалі, називається горизонтальною площиною.

Розіб'ємо уявно тверде тіло на велику кількість малих часток, тоді на кожну з них буде діяти сила ваги, що прикладена в точці, яка співпадає з даною часткою. При невеликих, порівняно з Землею, розмірах тіла напрямки сил будуть практично паралельні між собою, тобто приблизно утворюють систему паралельних сил. Дійсно, лінії дії сил тяжіння двох матеріальних часток на земній поверхні, які лежать між собою на відстані 31 м, утворюють кут, що дорівнює одній секунді.

7.1. Центр паралельних сил

Розглянемо систему паралельних та спрямованих в один бік сил $\{\overline{F}_k\}$ ($k = 1,2,...,n$), прикладених в незмінних точках твердого тіла (рисунок 7.1.).

Очевидно, що у цій системи сил є рівнодіюча, що прикладена в деякій точці С, яка спрямована, як і усі сили, і дорівнює по величині:

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k \ .$$

З'ясуємо, що відбувається з рівнодіючою $\overline{R}$ при одночасному повороті ліній дій даної системи сил на один і той же кут, при незмінних точках прикладення сил. В цьому випадку нова система сил становить собою також систему паралельних сил, яка має ті ж величини, що і задана система $\{\overline{F}_k\}$. Очевидно, що рівнодіюча нової системи сил буде мати той же модуль, але інший напрям, який визначається одночасним поворотом даної системи сил. З'ясуємо, чи буде змінюватися положення точки С, через яку проходить лінія дії рівнодіючої системи паралельних сил при усіх таких поворотах.

Додамо спочатку дві сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ та знайдемо точку прикладення C_1 рівнодіючої $\overline{R}_1$ цих сил. Для цього використаємо рівність:

$$A_1C_1 \cdot F_1 = A_2C_1 \cdot F_2.$$

Останній вираз не залежить від того, як спрямовані в просторі сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, тобто положення точки С, при поворотах сил не зміниться.

Додамо тепер сили $\overline{F}_2$ та $\overline{F}_3$, знайдемо їх рівнодіючу, яка водночас є рівнодіючою трьох сил і також переконуємося, що ця рівнодіюча буде завжди проходити через точку C_2 прямої.

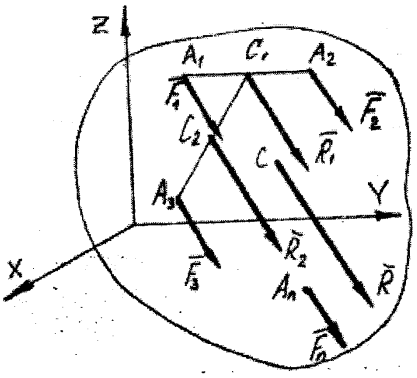


Рисунок 7.1 – Система паралельних та спрямованих в один бік сил, прикладених в незмінних точках твердого тіла

Якщо проводити цю операцію послідовно із всіма силами, то одержимо, що рівнодіюча усіх сил завжди при будь-яких поворотах проходить через одну й ту ж точку С, що незмінно зв'язана з тілом.

Точка С, через яку проходить лінія дії рівнодіючої системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо їх точок прикладення в один бік і на однаковий кут, називається центром паралельних сил.

7.2. Центр ваги твердого тіла

Як ми вже бачили, систему сил тяжіння часток даного тіла можна уявити як систему паралельних сил, отже усі властивості такої системи сил зберігаються. Точка, яка є центром паралельних сил тяжіння часток тіла, називається центром ваги даного тіла.

Знайдемо координати центра ваги X_C, Y_C, Z_C твердого тіла, вважаючи його однорідним, тобто таким, що складається з матеріалу, який має однакову

густину усіх своїх часток. Координати точок прикладення сил ваги часток тіла відомі:

$$A_1(x_1, y_1, z_1),..., A_n(x_n, y_n, z_n).$$

Рівнодіючу сил ваги часток тіла $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_n$,позначимо $\overline{P}$ (рисунок 7.2.).

Модуль цієї сили, яка зветься вагою тіла, визначається рівністю:

$$P = \sum \overline{P}_k \ .$$

Використовуючи теорему Варіньона про момент рівнодіючої, знайдемо момент сили $\overline{P}$ відносно осі *Oy:*

$$m_y(\overline{P}) = \sum m_y(\overline{P}_k).$$

Але

$$m_y(\overline{P}) = P \cdot X_c; \quad m_y(\overline{P}_1) = P_1 \cdot x_1;... \ ...;$$
$$m_y(\overline{P}_n) = P_n \cdot x_n.$$

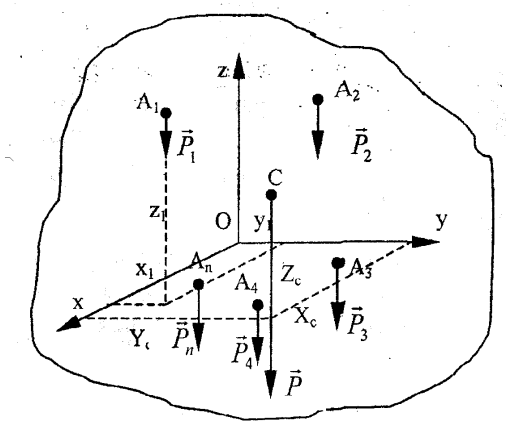


Рисунок 7.2 – Рівнодіюча сил ваги часток тіла

Підставляючи ці вирази в останню рівність, отримаємо:

$$PX_c = P_1x_1 + ... + P_nx_n.$$

Звідки

$$X_c = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n}{P} = \frac{\sum P_kx_k}{P}.$$

Аналогічно дістаємо формули для визначення координат Y_C та Z_C.

Отже:

$$X_c = \frac{\sum P_kx_k}{P}; Y_c = \frac{\sum P_ky_k}{P}; Z_c = \frac{\sum P_kz_k}{P}.$$

Кажучи про те, що центр ваги є точкою, яка незмінно пов'язана з тілом, ми не маємо на уяві, що вона зв'язана з якоюсь часткою тіла, ні, це поняття суто геометричне, бо центр ваги може лежати поза границею даного тіла.

7.3. Координати центрів ваги однорідних тіл

Для однорідного твердого тіла має бути однаковою для всіх часток величина γ - вага одиниці об'єму. Тоді вага усього тіла, а також кожної окремої частки може бути виражена через об'єм тіла або його частки: $P_k = \gamma \cdot V_k$; $P = \gamma \cdot V$, де V і V_k - об'єм часток і всього тіла, відповідно.

Підставляючи ці значення, одержимо:

$$X_c = \frac{\sum V_k X_k}{V}; Y_c = \frac{\sum V_k Y_k}{V}; Z_c = \frac{\sum V_k Z_k}{V}.$$

Як бачимо, положення центра ваги однорідного тіла не залежить від величини γ, а залежить тільки від його геометричної форми. Тому кажуть, що формули (9. 4,) дозволяють визначити координати центра ваги об'єму V .

Якщо тіло уявляє однорідну пластину постійної товщини h то для неї

$$V_k = S_k \cdot h; \quad V = S \cdot h,$$

де S_k та S – площі часток і всієї пластинки, відповідно.

Підставляючи значення об'ємів, а також виконуючи скорочення, одержимо:

$$X_c = \frac{\sum S_k X_k}{S}; Y_c = \frac{\sum S_k Y_k}{S}; Z_c = \frac{\sum S_k Z_k}{S}.$$

Так визначаються координати центра ваги площини. Аналогічно дістаємо формули для центра ваги однорідної лінії однакової товщини та ширини (тобто однакового перерізу):

$$X_c = \frac{\sum l_k X_k}{l}; Y_c = \frac{\sum l_k Y_k}{l}; Z_c = \frac{\sum l_k Z_k}{l},$$

де l_k та l - довжина частки і всієї лінії, відповідно.

7.4. Способи визначення координат центрів ваги тіл

Розглянемо деякі найпростіші способи визначення координат центрів ваги тіл.

7.4.1. Симетрія

Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги лежить, відповідно, в площині, або на вісі, або в центрі симетрії.

7.4.2. Розбиття

Часто буває можливо розбити тіло на такі частки, у яких ваги та центри ваги легко визначаються, або наперед відомі. Тоді, безпосередньо використовуючи формули, можна визначити координати центра ваги всього тіла.

7.4.3. Доповнення (метод від'ємних мас)

Цей спосіб використовують при знаходженні центра ваги тіла, що має виріз, як частковий випадок метода розбиття, вважаючи, що виріз має від'ємну масу.

7.4.4. Експериментальний спосіб

Для тіл складної конфігурації, для яких неможливо використати жоден з описаних методів, можна скористатися експериментальними способами визначення положення центра ваги.

1. Метод підвішування. Він полягає в тому, що тіло підвішується на нитках в різних його точках. Провісний напрям нитки кожен раз дає напрям сили ваги. Точка перетину цих провісних ліній і дасть нам положення центра ваги.

2. Метод зважування. Нехай треба визначити положення центра ваги шатуна, який зображений на рисунку 7.4.4.

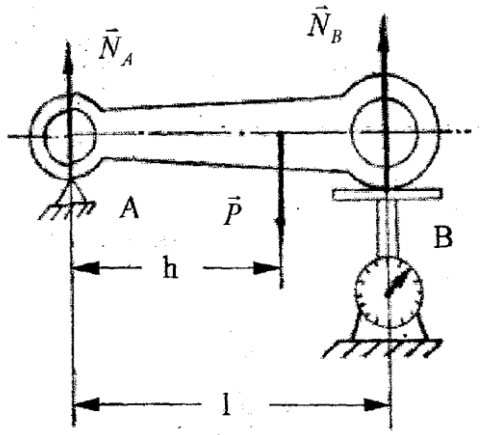


Рисунок 7.4.4 – Положення центра ваги шатуна

Обіпремо (чи підвісимо в залежності від наявності приладів) шатун в точці А на нерухому опору в вигляді призми, а в точці В на чашу терезів так, щоб вісь шатуна була горизонтальна. Тоді вага шатуна P розподілиться на дві опори A та B, в яких виникнуть реакції та $\overline{N}_B$. При цьому величину реакції $\overline{N}$ нам покажуть терези.

Знаючи вагу шатуна P (з попереднього зважування) та відстань $AB = l$ між точками опору (з вимірювання), складемо рівняння рівноваги в вигляді рівняння моментів відносно точки А:

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad N_B \cdot l - P \cdot h = 0.$$

Звідси легко знайти величину h відстані від точки A до центра ваги шатуна:

$$h = \frac{N_B \cdot l}{P}.$$

7.5. Центри ваги простіших фігур

1. Паралелограм. Центр ваги площі паралелограма, який зображенний на рисуноку 10.5,а лежить в точці перетину його діагоналей.

2. Трикутник. Центр ваги площі трикутника, який зображенний на рисуноку 10.5,б лежить в точці перетину його медіан, причому: $CE = \frac{1}{3}BE$.

3. **Дуга кола.** У силу симетрії центр ваги дуги лежить на вісі Ох (рисунок 10.5,в) на відстані від центра дуги О, яка дорівнює: $X_c = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, де кут α вимірюється в радіанах.

4. Круговий сектор. Центр ваги площі кругового сектора АОВ, який зображенний на рисуноку 10.5,г. з центральним кутом 2α лежить на його вісі симетрії (на вісі Ox) на відстані від центра O**,** яка дорівнює: $X_c = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

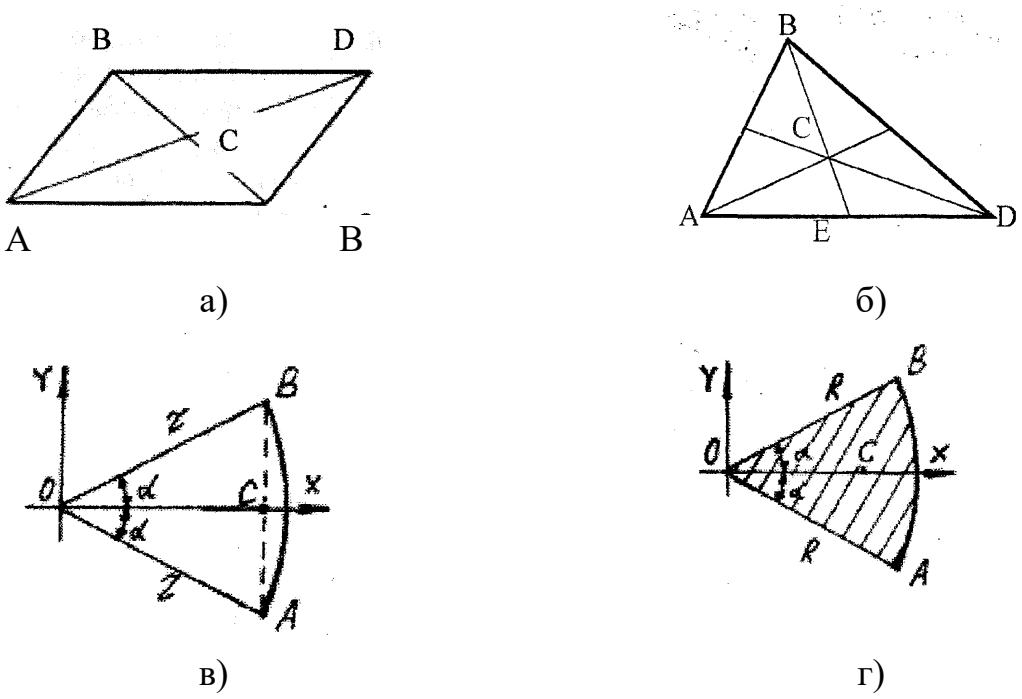
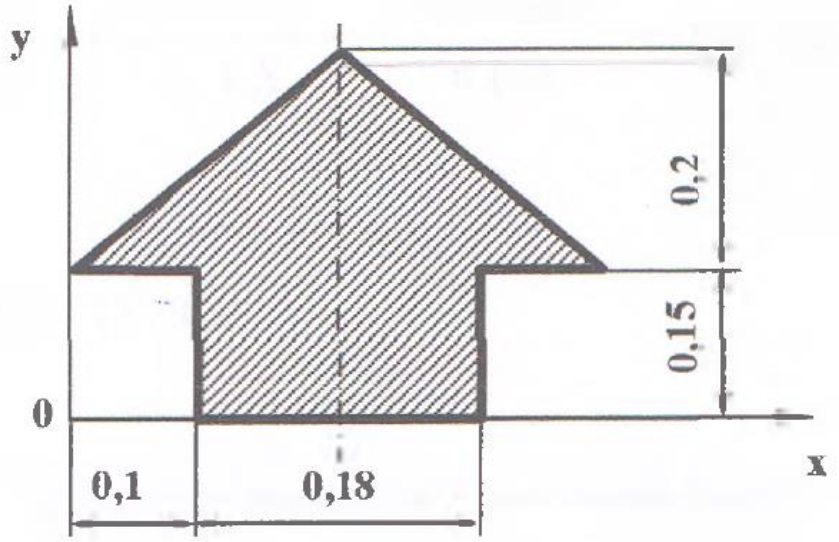


Рисунок 7.5 – Координати центрів ваги простіших плоских фігур

Формули координат центрів ваги інших однорідних тіл є в різних інженерних довідниках.

Приклад 1
Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу, який має вертикальну вісь симетрії. Розміри плоскої фігури задай в метрах.
Знайти: Xc, Yc.



Розв'язування

Координати центра ваги площини:

$$X_C = \frac{\Sigma F_i X_i}{F};$$

$$У_C = \frac{\Sigma F_i Y_i}{F}.$$

Визначимо площу фігури, яка складена з трикутника F_1 і прямокутника F_2:

$$S_1 = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}38 = 0{,}038\ м^2 \text{ – площа трикутника;}$$

$$S_2 = 0{,}18\cdot 0{,}15 = 0{,}027\ м^2 \text{ – площа прямокутника.}$$

Центри ваги фігур:
трикутника X_1 = 0,190 м, $У_1$ = 0,2167 м
прямокутника X_2 = 0,19 м, $У_2$ = 0,075 м.

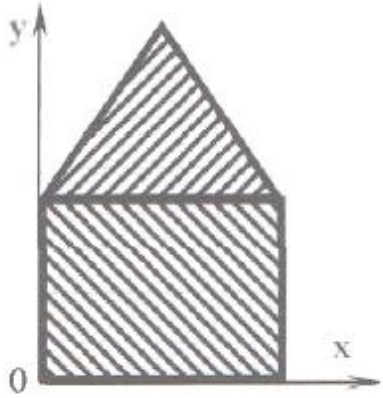
$$X_C = \frac{S_1X_1 + S_2X_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,01235}{0,065} = 0,190\ м;$$

$$Y_C = \frac{S_1Y_1 + S_2Y_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,0102596}{0,065} = 0,1578\ м.$$

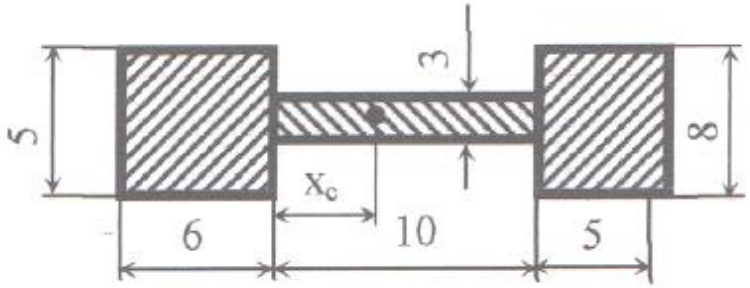
Відповідь: *Xc* = 0,19 *м;* Yc = 0,1578 *м.*

<u>Завдання.</u> Визначити положення центра ваги площі фігури. Розміри подано в сантиметрах.

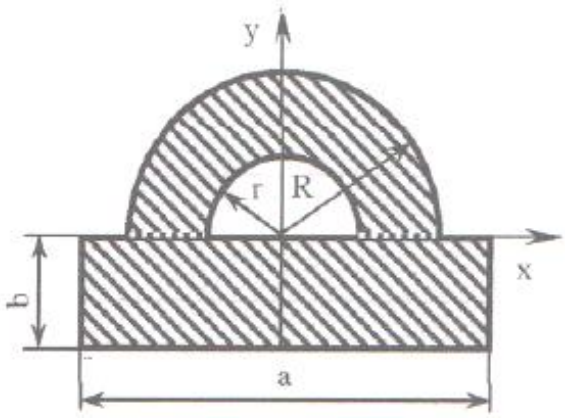
Варіант № 1, 4, 7.



Варіант № 2, 5, 8.

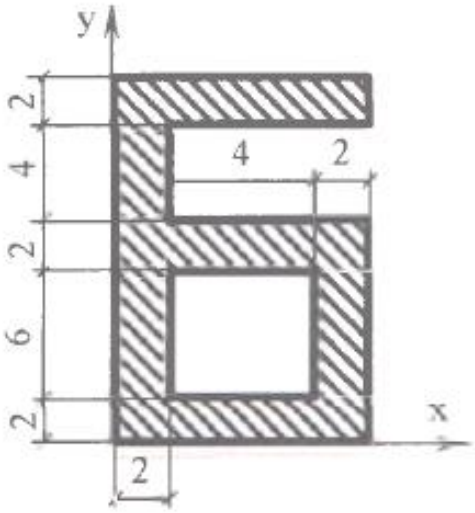


Варіант № 3, 6, 9.



Вихідні дані: а= 14 см, в = 3 см, R = 6 см, r = 4 см.

<u>Завдання.</u> Знайти координати центра ваги пластинки, розміри якої подано в сантиметрах.



Відповідь: хс=3,7 см; ус= 7,7 см.

Контрольні запитання

1. Що називається центром ваги твердого тіла?
2. Як обчислюється повна реакція шорсткою поверхні?
3. Як спрямований вектор повної реакція шорсткою поверхні?
4. Чому дорівнює кут тертя?
5. Яка залежність між кутом тертя і коефіцієнтом тертя?
6. Що таке конус тертя?
7. Сформулюйте умови рівноваги тіла при наявності тертя.

СПИСОК ВИКОРИСТАННИХ ДЖЕРЕЛ

1. Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. Теоретична механіка: метод. реком. з вивчення дисц. Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2019. 101 с.

2. Левіт І.Б. Статика. Курс лекцій. Донецьк: Донецький державний університет економіки і торгівлі ім. М. Туган – Барановського. 106 с.

3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. М.: Наука, 1981. 280 с.

4. Сборник задач по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. М.: Высшая школа, 1989. 120 с.

5. Чикова Т. С., Свистун А. Ч. Задачи по статике с алгоритмами и примерами решений. 2015. 59 с.

6. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1990. 120 с.

7. Павловський М.А. Теоретична механіка. К.: Техніка, 2002. 220 с.

8. Воронков И.М. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1989. 180 с.

Навчальне видання

Дейниченко Григорій Вікторович,

Цвіркун Людмила Олександрівна,

Омельченко Олександр Володимирович

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет
економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського
50042, Дніпропетровська обл.,
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.
Свідоцтво суб’єкта видавничої
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.