МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Л.О. Цвіркун, О.В. Омельченко

ПРАКТИКУМ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчально-методичний посібник

Кривий Ріг
2020

УДК 514.18(076)

Рецензенти:
Дейниченко Г. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри устаткування харчової і готельної індустрії ім. М. І. Беляєва Харківського державного університету харчування та торгівлі.

Моркун Н. В., д.т.н., професор, завідувач кафедри автоматизації, комп'ютерних науки і технологій Криворізького національного університету.

Хорольський В. П. д.т.н., професор кафедри загальноінженерних дисциплін та обладнання Донецького національного університету економіки та торгівлі ім. М. Туган-Барановського.

Цвіркун Л.О., Омельченко О.В.
Практикум з нарисної геометрії [Текст] : навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти всіх форм навчання / Л.О. Цвіркун, О.В. Омельченко; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. загальноінженерних дисциплін та обладнання. – Кривий Ріг : ДонНУЕТ, 2020. – 107 с.

Пропонований навчально-методичний посібник призначений для студентів всіх форм навчання і покликаний допомогти студентам організувати вивчення дисципліни «Нарисна геометрія та інженерна графіка». Навчально-методичний посібник містить короткі теоретичні відомості з кожної теми, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування, які можна використовувати, як завдання для контрольних робіт. Наявність контрольних запитань із кожної теми надає студентам змогу самостійного контролю рівня засвоєння навчального матеріалу. Наведено список рекомендованої літератури.

УДК 514.18(076)

© Цвіркун Л.О., Омельченко О.В., 2020
© Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП……..…...…6

1. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ТОЧКИ.....7
1.1 Проекції точки на три площини……...7
1.2 Точка у квадрантах і октантах простору…….....9

2. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ……...…….....13
2.1 Положення прямої відносно площин проекцій…….....13
2.2 Сліди прямої……...……...19
2.3 Визначення натуральної величини прямої…….....23
2.4 Взаємне положення прямої та точки…….....25
2.5 Взаємне положення прямих…….....29

3. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ПЛОЩИН……..33
3.1 Способи задання площин на кресленні……...33
3.2 Положення площини відносно площин проекцій……..…….35
3.3 Пряма і точка в площині. Головні лінії площини…….....38
3.4 Паралельність прямої та площини.
Паралельність двох площин……...…45
3.5 Перпендикулярність прямої та площини.
Перпендикулярність двох площин…...…….....50
3.6 Перетин площин……..54
3.7 Перетин прямої з площиною…….....58

4. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ...62
4.1 Спосіб заміни площин проекцій…….....62
4.2 Метод паралельного переміщення…….....66
4.3 Спосіб обертання навколо проекціюючої прямої……..….....67
4.4 Обертання навколо лінії рівня (спосіб суміщення)……....68

5. ПОВЕРХНІ……...73
5.1 Точка на поверхні……...73
5.1.1 Точка на поверхні призми……..…….....73
5.1.2 Точка на поверхні піраміди…….....74
5.1.3 Точка на поверхні циліндра……....76
5.1.4 Точка на поверхні конуса……..…….....77
5.1.5 Точка на поверхні сфери…….....79
5.1.6 Точка на поверхні тора……..…79
5.2 Перетин поверхні з площиною…….....82
5.3 Перетин прямої з поверхнею……..……...87
5.4 Взаємний перетин поверхонь……..……91
5.4.1 Спосіб допоміжних січних площин……..91
5.4.2 Спосіб концентричних сфер……92

6. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ…….....96
6.1 Розгортка призми…….....97
6.2 Розгортка піраміди……...……...98
6.3 Розгортка циліндра…….....99
6.4 Розгортка конуса…….....100

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ…….....104
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК…….....105

ВСТУП

Навчально-методичний посібник призначений для роботи студентів на практичних заняттях, а також для самостійної підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни «Нарисна геометрія та інженерна графіка».

Посібник розроблено відповідно до робочої програми з навчальної дисципліни «Нарисна геометрія та інженерна графіка». Він містить шість розділів, які відповідають розділам навчальної програми. Кожен розділ містить теоретичний матеріал, приклади поетапного виконання завдань з наведенням наочних зображень, задачі для самостійного розв'язання.

Пояснення закономірностей процесу розв'язування базових графічних задач дозволяє студентам простежити теоретичні, практичні та технічні етапи графічних побудов. Для закріплення теоретичних знань студентам рекомендується відповісти на контрольні запитання, які подано в кінці кожного розділу. Наявність контрольних запитань із кожної теми надає студентам змогу самостійного контролю рівня засвоєння навчального матеріалу.

1. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ТОЧКИ

1.1 Проекції точки на три площини

У процесі побудови зображень використовують три площини проекцій. Доцільно розглянути закони проектування на три площини проекцій. Нехай задано три взаємно перпендикулярні площини проекцій, що утворюють прямий тригранний кут (рис. 1.1): $П_1$ – горизонтальна, $П_2$ – фронтальна, $П_3$ – профільна площини проекцій; лінії O_X, O_Y, O_Z взаємного перетину площини проекцій називаються осями проекцій, а точка O – початком осей проекцій.

Спроектувавши точку A уявними проекціюючими променями під прямими кутами на три площини проекцій, отримаємо *просторове креслення* (рис. 1.2), а потім *комплексне креслення* заданої точки (рис. 1.3) при суміщенні площин $П_1$ і $П_3$ з фронтальною площиною проекцій.

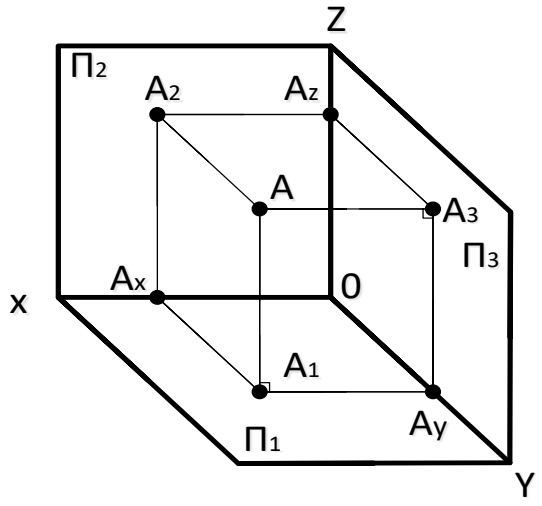


Рис. 1.1 – Взаємно перпендикулярні площини проекцій

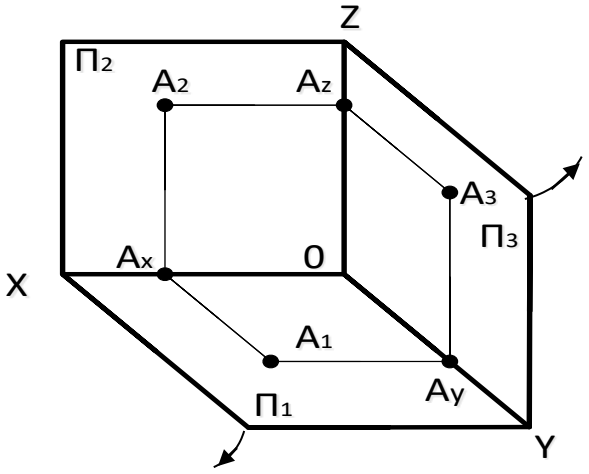


Рис. 1.2 – Просторове креслення проекцій точки A

Якщо відмовитися від обмеження й позначення площин проекцій, отримаємо остаточно комплексне креслення точки А, яке матиме такий вигляд (рис. 1.4.)

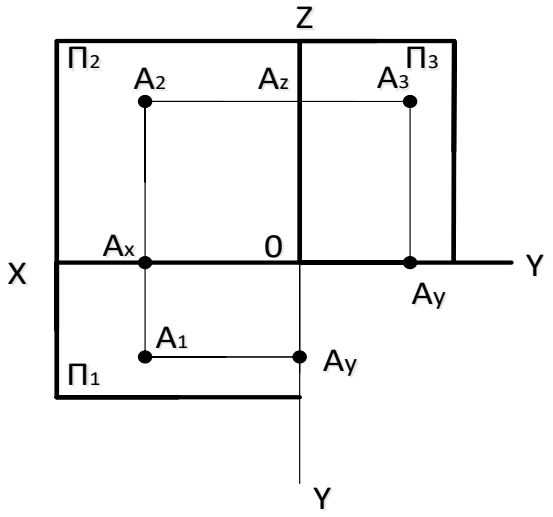


Рис. 1.3 – Комплексне креслення точки А
з позначенням площин проекцій

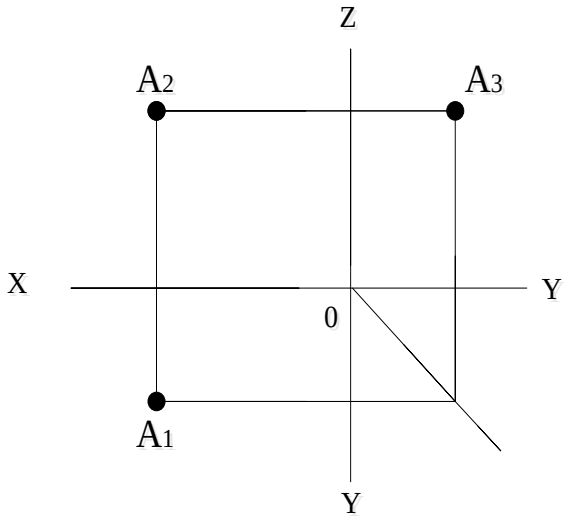


Рис. 1.4 – Комплексне креслення точки А

Пряма, що сполучає дві проекції точки на комплексному кресленні, називається *лінією зв'язку*. Із рис. 1.4 видно основні положення проекцій точки на кресленні:

1. Горизонтальна A_1 та фронтальна A_2 проекції точки завжди розташовані на вертикальній лінії зв'язку, перпендикулярно до осі проекцій Ох.

2. Фронтальна A_2 та профільна A_3 проекції точки завжди розташовані на горизонтальній лінії зв'язку, перпендикулярно до осі проекцій O_Z.

3. Горизонтальна A_1 та профільна A_3 проекції точки завжди розташовані на лініях зв'язку, що перетинаються на бісектрисі кута y_1Oy_3.

Щоб визначити положення точки А, потрібно знати три її виміри – висоту, глибину й широту.

Висота точки визначається її відстанню від горизонтальної площини проекцій, або віддаленням її фронтальної проекції A_2 від осі O_X ($AA_1=A_2A_X$) (рис. 1, 3).

Глибину точки вимірюють її відстанню від фронтальної площини проекцій, або віддаленням її горизонтальної проекції A_1 від осі Ох ($AA_2=A_1A_X$).

Широтою точки є її віддалення від профільної площини проекцій, або відстань від точки Ах до початку осей проекції О ($AA_3=A_XO$).

1.2 Точка в квадрантах і октантах простору

Площини $П_1$ и $П_2$ утворюють у просторі чотири двогранних кути, які називають квадрантами, або чвертями простору. При введенні площини проекцій $П_3$ отримуємо вісім октантів простору. Вважається, що спостерігач завжди знаходиться у першій чверті, або у першому октанті простору (рис.1.5).

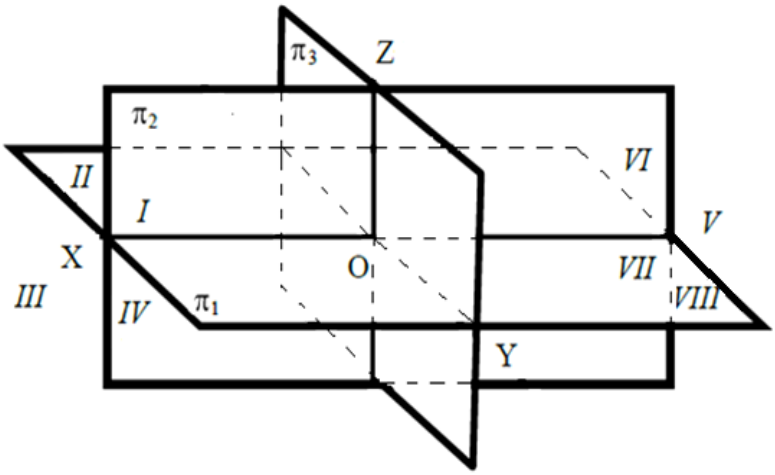


Рис. 1.5 – Декартова система координат

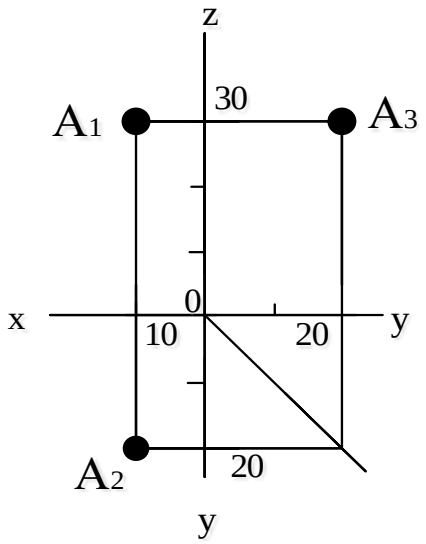
Відповідно до декартової системи координат вісь O_X – абсцис, O_Y – ординат; O_Z – аплікат.

При відліку координат точки й даному напрямку осей отримаємо:

Октант	X	Y	Z	Октант	X	Y	Z
I	+	+	+	**V**	-	+	+
II	+	-	+	**VI**	-	-	+
III	+	-	-	**VII**	-	-	-
IV	+	+	-	**VIII**	-	+	-

Приклад 1

Побудувати комплексне креслення точки А (10; 20; 30) (рис. 1.6).



Розв'язування:

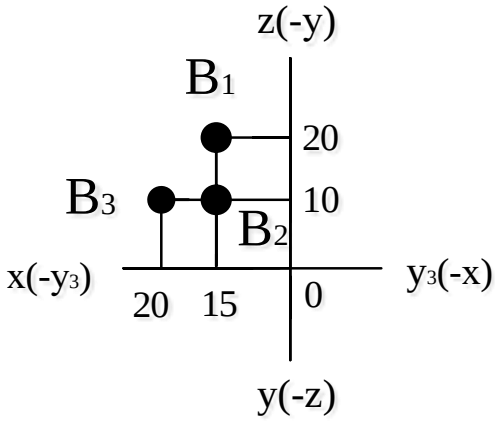
Координата x точки А дорівнює 10 мм, координата y = 20 мм, координата z = 30 мм.

Відклавши дані значення координат на осях «x» і «y», отримаємо горизонтальну проекцію A_1; «x» і «z» – фронтальну проекцію A_2; «y» і «z» – профільну проекцію A_3 точки А.

Рис.1.6 – Комплексне креслення точки А

Приклад 2

Побудувати комплексне креслення точки В (15; -20; 10) (рис. 1.7).



Розв'язування:

Відкладаємо на позитивній осі O_X відрізок OB_X довжиною 15 мм (x) і, провівши через точку B_X пряму перпендикулярно до цієї осі, відкладаємо на ній вгору відрізок B_XB_1 довжиною 20 мм (y) та B_XB_2 довжиною 10 мм (z).

Рис. 1.7 –Комплексне креслення точки В

Для визначення профільної проекції (B_3) точки В проводимо через B_2 перпендикулярно осі O_Z пряму й відкладаємо на ній ліворуч відрізок B_ZB_3 довжиною 20 мм.

Приклад 3

Побудувати комплексне креслення точки N (40; 20; 0) та точки C (20; 0; 0), визначити їх положення в просторі (рис. 1.8).

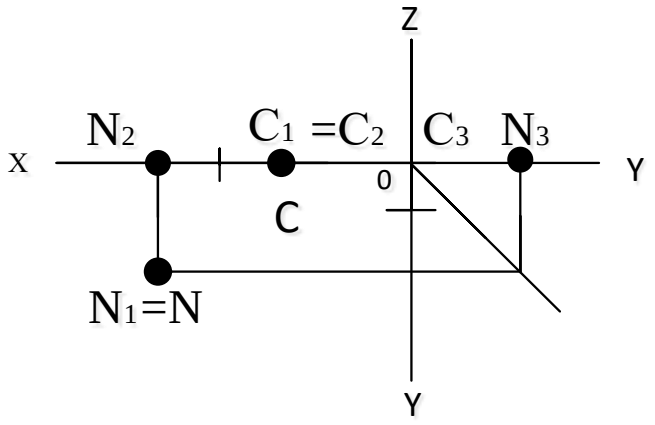


Рис. 1.8 – Комплексне креслення точки N і C

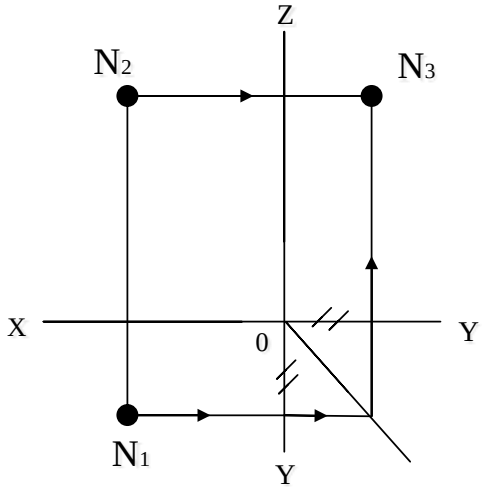
Розв'язування:

1. Для точки N. Оскільки координата z=0, то відразу можна зробити висновок, що точка *N належить горизонтальній площині проекцій* $П_1$.

2. Для точки C. Дві проекції збігаються із самою точкою, а третя знаходиться в точці O – початку осей проекцій. Таким чином, точка *C лежить на осі* O_X. У цьому випадку горизонтальна C_1 і фронтальна C_2 проекції збігаються із самою точкою C, а профільна проекція C_3 знаходиться в точці 0.

Приклад 4

За заданою горизонтальною N_1 та фронтальною N_2 проекціями точки N побудувати її профільну проекцію N_3 (рис. 1.9).



Розв'язування:

Проведемо через N_2 горизонтальну лінію зв'язку і, відклавши на ній відстань від горизонтальної проекції N_1 до осі x, отримаємо шукану профільну проекцію N_3 точки N.

Рис.1.9 – Побудова профільної проекції точки N

Задачі для самостійного розв’язування

<table>
<tr>
<td>

Варіант 1, 8

За заданими координатами x, y, z побудувати проекції точок E, F, L.

E (20; 30; - 45)
F (40; 0; 30)
L (-70; 30; 20)

</td>
<td>

Варіант 2, 9

Побудувати три проекції точок A, B, C, D за координатами

A (-25; -45; -65)
B (0; 0; 30)
C (40; 0; 0)

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Варіант 3, 10

Побудувати проекції точки B, яка симетрична точці A (15; 20; 30) відносно площини проекцій $П_1$.

</td>
<td>

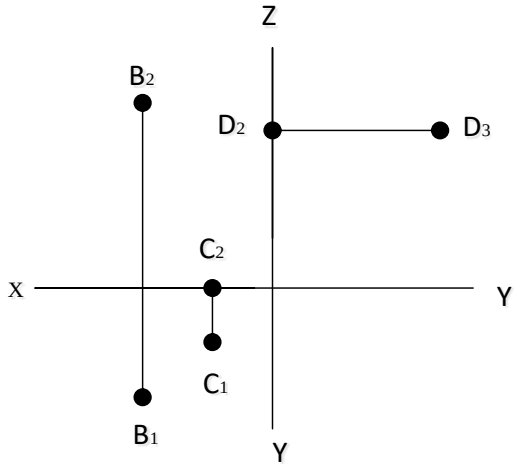
Варіант 4, 11

Побудувати проекції точки B, яка симетрична точці A (15; 20; 30) відносно площини проекцій $П_2$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Варіант 5, 12

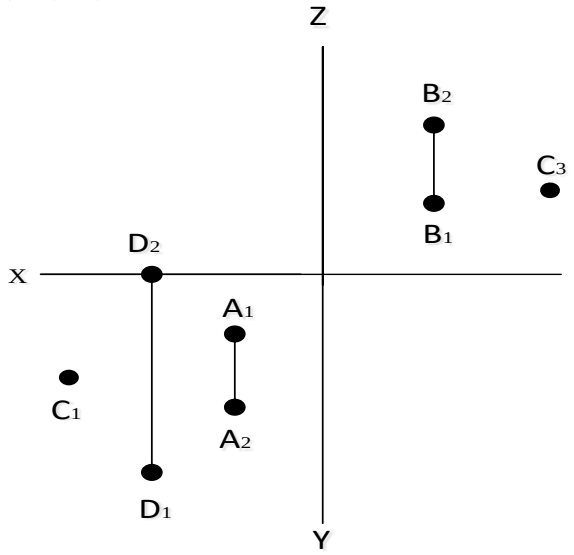
За заданими проекціями точок B, C і D побудувати їх відсутні проекції.



</td>
<td>

Варіант 6, 13

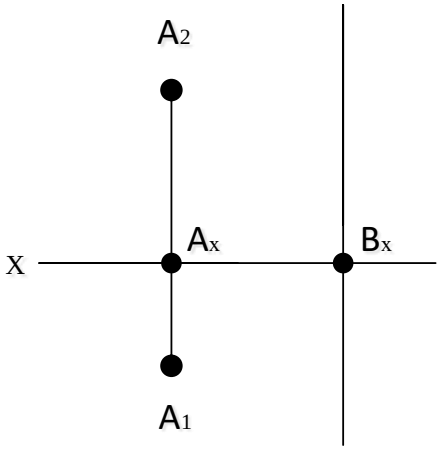
Побудувати відсутні проекції точок A, B, C, D.



</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Варіант 7, 14

Побудувати проекції точки B, розташованої на 20 мм далі від площини $П_1$ і на 10 мм ближче до площини $П_2$, ніж точка A.



</td>
</tr>
</table>

Контрольні запитання

1. Що таке комплексне креслення точки і як його отримують?
2. У якій послідовності будують проекції точки за її координатами?
3. Що таке квадранти? Що таке октанти?
4. Якими способами можна побудувати третю проекцію точки за двома її відомими?
5. Як визначити відстань точки від горизонтальної площини проекцій за епюром Монжа?
6. Як визначити відстань точки від фронтальної площини проекцій за епюром Монжа?

2. ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ

Пряма в просторі безмежна. Обмежена частина прямої називається відрізком.

Отже, через дві будь-які точки можна провести тільки одну пряму, бо дві точки визначають пряму.

2.1 Положення прямої відносно площин проекцій

Розглянемо положення прямої в просторі. Пряма в просторі може займати загальне або особливе положення.

Пряму, яка не паралельна жодній з площин проекцій, називають прямою загального положення (рис. 2.1).

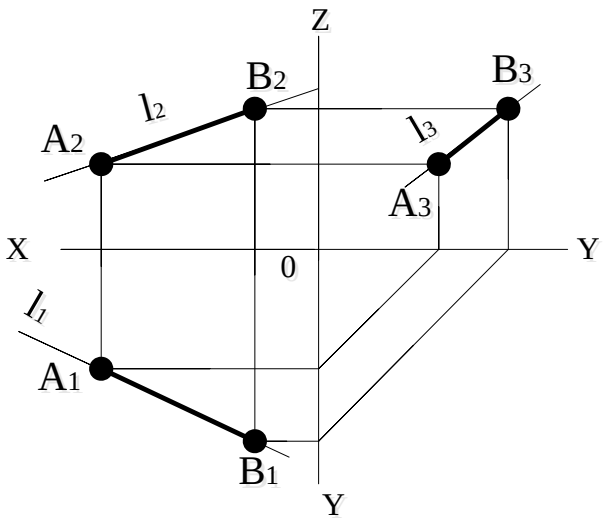


Рис. 2.1 – Пряма загального положення

Крім загального положення, пряма може займати особливе положення відносно площин проекцій:

1. Бути паралельною будь-якій площині проекцій.
2. Бути перпендикулярною до площини проекцій.
3. Належати будь-якій площині проекцій.

Пряму, паралельну одній з площин проекцій або двом площинам проекцій, тобто перпендикулярну третій, називають прямою особливого положення.

Наочно розглянемо прямі особливого положення, які можуть бути проекціюючими або прямими рівня.

1. Прямими рівня називаються прямі, паралельні одній з площин проекцій.

а) **горизонтальна пряма h або горизонталь** – пряма, паралельна площині проекцій $П_1$ (рис. 2.2).

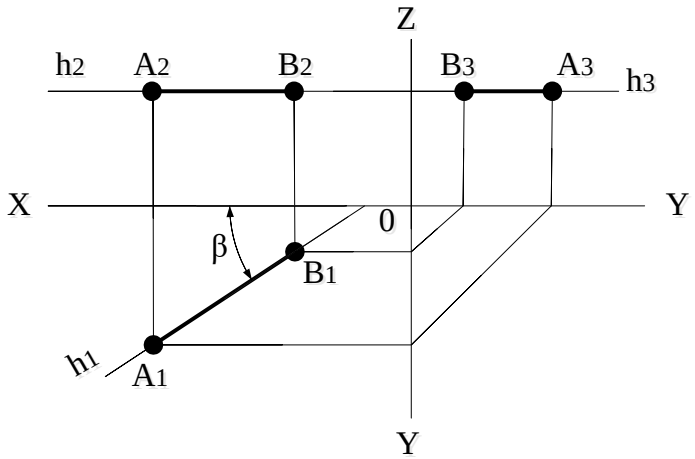


Рис. 2.2 – Горизонтальна пряма

Фронтальна проекція A_2B_2 паралельна осі Ох, а горизонтальна A_1B_1 – дорівнює натуральній величині відрізка прямої (A_1B_1=AB). Кут β між горизонтальною проекцією A_1B_1 і віссю Ох дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої АВ до площини проекцій $П_2$.

б) **фронтальна пряма f або фронталь** – пряма, паралельна площині проекцій $П_2$ (рис.2.3).

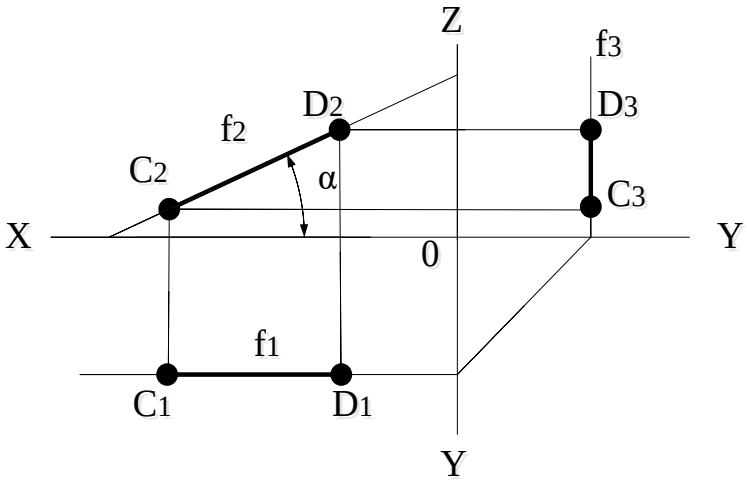


Рис. 2.3 – Фронтальна пряма

Горизонтальна проекція C_1D_1 паралельна осі Ox, а фронтальна C_2D_2 – дорівнює натуральній величині відрізка прямої (C_2D_2=CD). Кут α між фронтальною проекцією C_2D_2 і віссю Ox дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої CD до площини проекцій $П_1$.

с) **профільна пряма р** – пряма, паралельна площині $П_3$ (рис. 2.4).

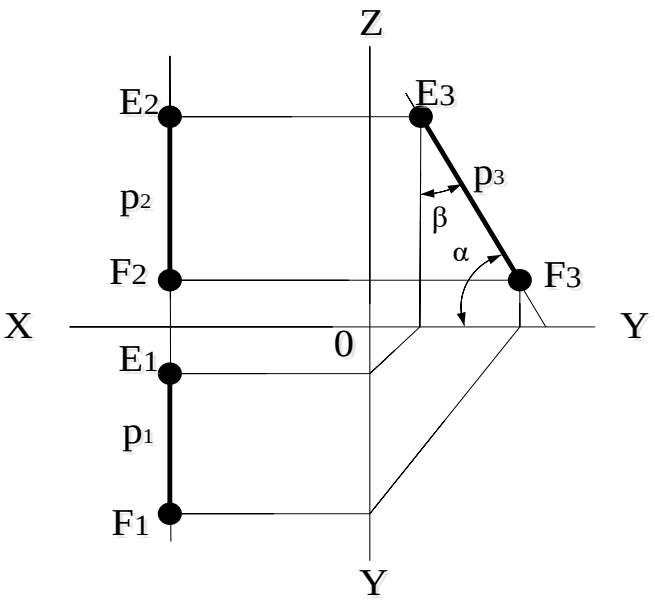


Рис. 2.4 – Профільна пряма

Профільна проекція E_3F_3 дорівнює натуральній величині відрізка прямої (E_3F_3=EF). Кути β і α, утворені профільною проекцією з осями z і y, дорівнюють кутам нахилу прямої до фронтальної та горизонтальної площин проекцій відповідно.

2. Проекціюючими називаються прямі, перпендикулярні до однієї з площин проекцій, тобто паралельні двом іншим площинам.

а) горизонтально проекціююча пряма – пряма, перпендикулярна до площини проекцій $П_1$ (рис. 2.5).

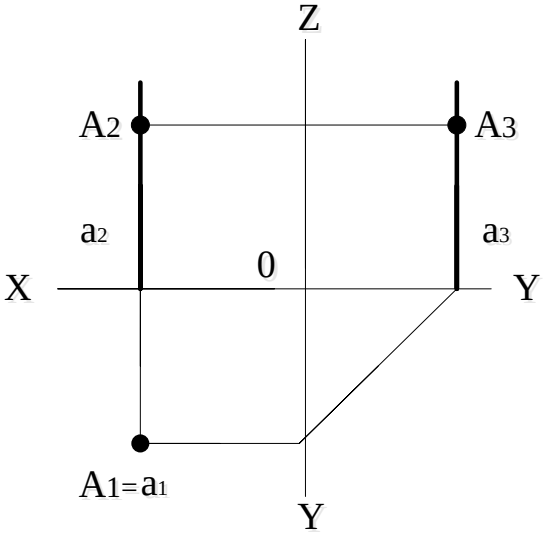


Рис. 2.5 – Горизонтально проекціююча пряма

б) **фронтально проекціююча пряма** – пряма, перпендикулярна до площини проекцій $П_2$ (рис. 2.6).

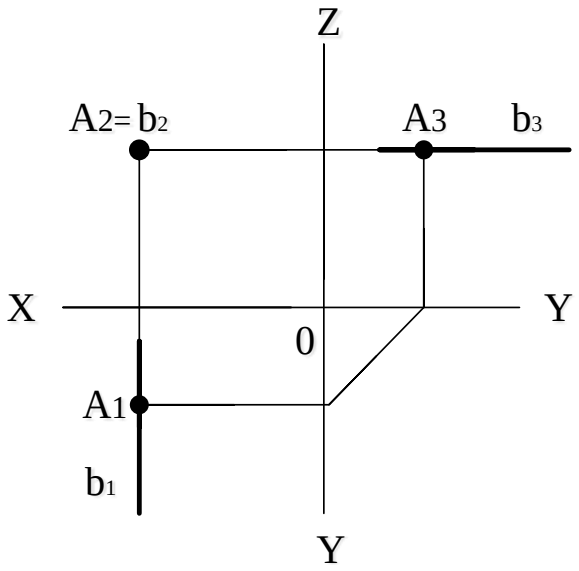


Рис. 2.6 – Фронтально проекціююча пряма

в) **профільно проекціююча пряма** – пряма, перпендикулярна до площини проекцій $П_3$ (рис. 2.7).

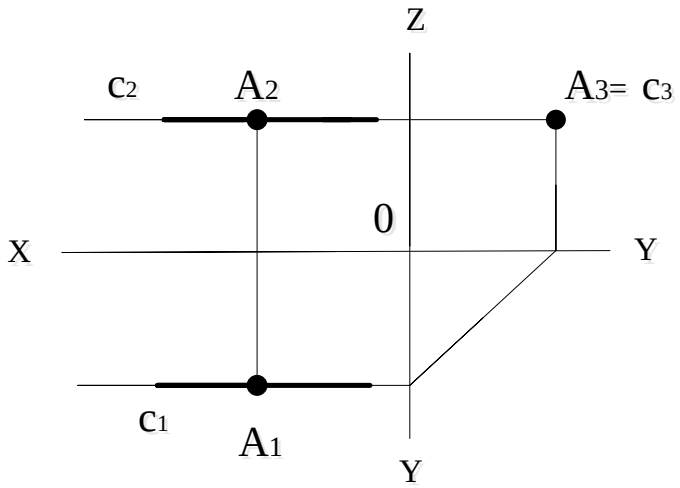
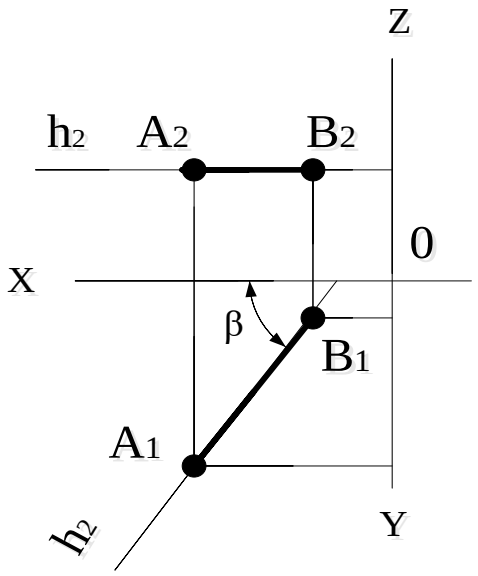


Рис. 2.7 – Профільно проекціююча пряма

На одній з площин проекцій проекціююча пряма зображується у вигляді точки, а на двох інших у вигляді відрізків, що займають горизонтальне або вертикальне положення, величина якого дорівнює натуральній величині самого відрізка прямої.

Приклад 5

Визначити положення у просторі прямої АВ і кути нахилу до фронтальної площини проекцій П2 (рис. 2.8).



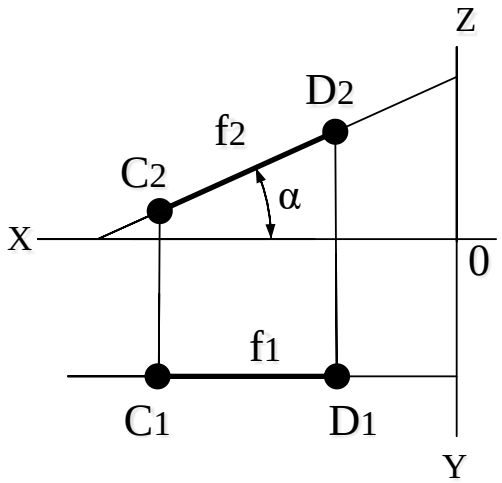
Розв'язування:

Оскільки відстань точок А і В від горизонтальної площини проекцій однакова, задана пряма є горизонталлю. Кут β прямої АВ до фронтальної площини проекцій П2 знаходиться при точці перетину горизонтальної проекції A_1B_1 прямої АВ з віссю х.

Рис. 2.8 – Горизонтальна пряма

Приклад 6

Визначити положення у просторі прямої CD і кути нахилу до горизонтальної площини проекцій П1 (рис. 2.9).



Розв'язування:

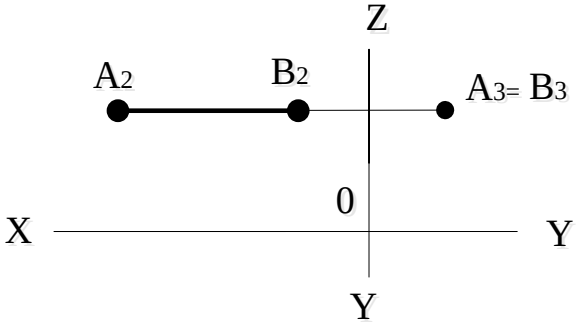
Оскільки відстань точок С і D від фронтальної площини проекцій однакова, задана пряма є фронталлю. Кут α прямої CD до горизонтальної площини проекцій П1 знаходиться при точці перетину фронтальної проекції C_2D_2 прямої CD з віссю х.

Рис. 2.9 – Фронтальна пряма

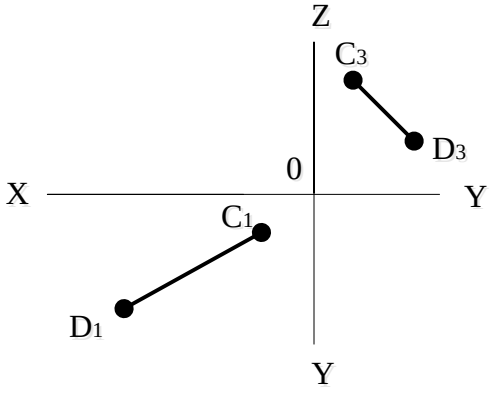
Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати відсутні проекції прямих та визначити їх положення відносно П1, П2, П3

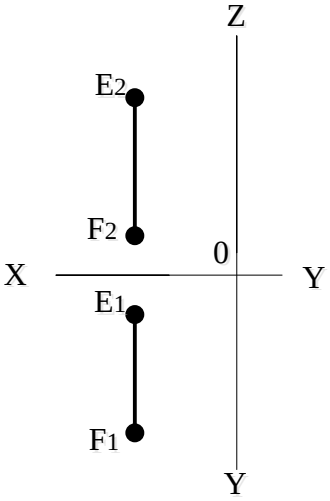
Варіант 1, 7



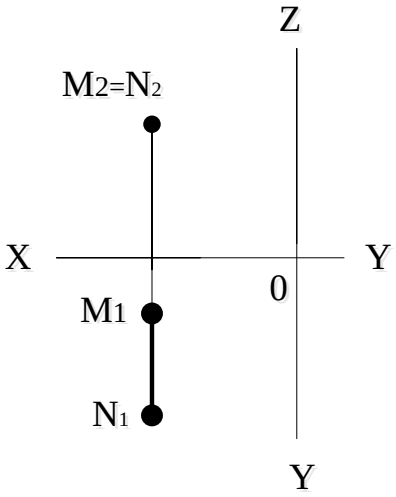
Варіант 2, 8



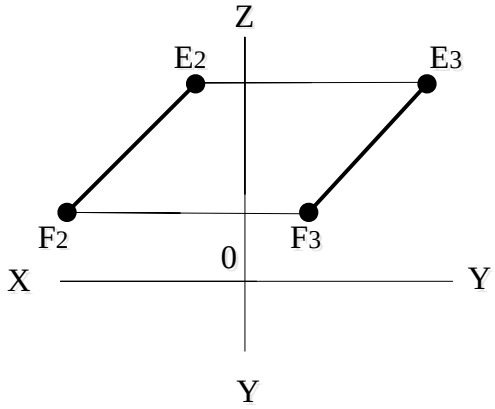
Варіант 3, 9



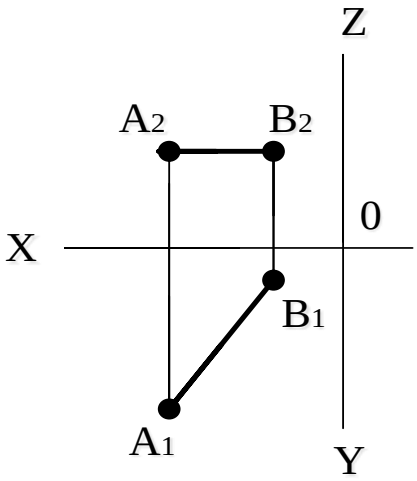
Варіант 4, 10



Варіант 5, 11

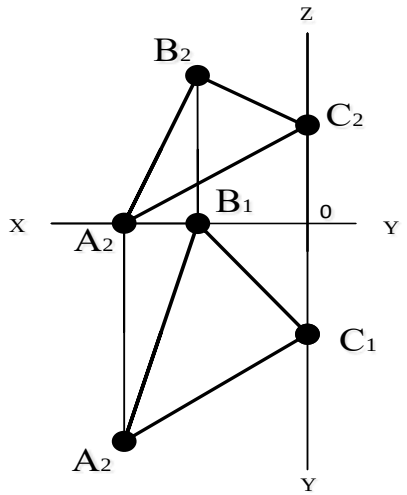


Варіант 6, 12

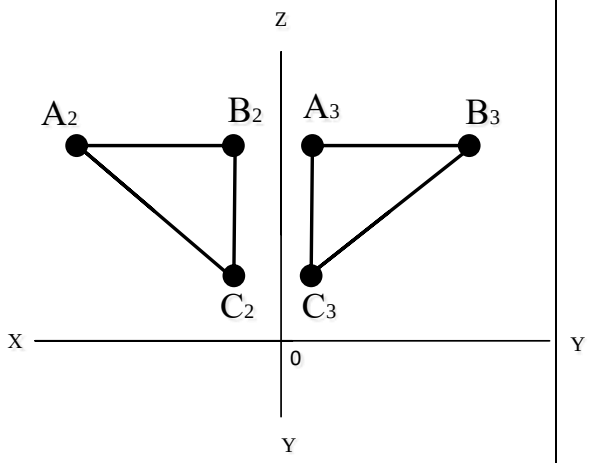


Побудувати відсутні проекції трикутника

Варіант 1, 5

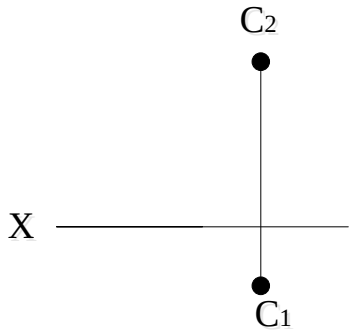


Варіант 2, 6

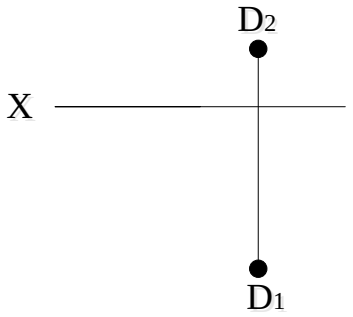


Через т. С провести фронталь під кутом 45^0 до площини П1, $l_{фр.}$ – 50мм, а через т. D – горизонталь під кутом 30^0 до площини П2, $l_{гор.}$–35 мм.

Варіант 3, 7

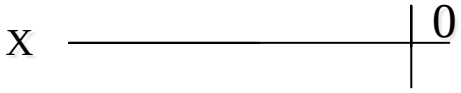


Варіант 4, 8



Варіант 1, 9

Побудувати комплексне креслення прямої горизонтального рівня h, яка знаходиться на відстані 20 мм від горизонтальної площини проекцій П1 та утворює з фронтальною площиною проекцій П2 кут $\beta = 45^0$.



2.2 Сліди прямої

Слідами прямої називається точка перетину прямої з площинами проекцій.

У загальному випадку пряма перетинає три площини проекцій, тому має три сліди: горизонтальний, фронтальний і профільний.

Точка *H – горизонтальний слід прямої*, точка *F – фронтальний.*

Проекції слідів на кресленні відповідно позначаються H_1 і H_2, F_1 і F_2.

Із умови, що слід є точкою, яка одночасно належить даній прямій і площині проекцій, отримаємо алгоритм знаходження слідів прямої:

1. Продовжуємо фронтальну проекцію прямої до перетину з віссю Ох – це буде точка H_2 (точка H_2 – фронтальна проекція шуканого сліду Н), (рис. 2.10).

2. Проводимо із H_2 вертикальну лінію зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією прямої – отримаємо точку H_1 (H_1 – горизонтальна проекція сліду і сам слід Н).

Щоб визначити фронтальний слід прямої, необхідно спочатку знайти точку перетину горизонтальної проекції прямої з віссю Ох – горизонтальну проекцію сліду F_1; відсутня фронтальна проекція F_2 буде тотожна шуканому фронтальному сліду F.

Відносно прямих особливого положення, проекціюючих прямих і прямих рівня, то перші з них мають тільки один слід, бо вони паралельні двом площинам проекцій, а інші – два, тому що вони паралельні одній площині проекцій.

Приклад 7

Побудувати сліди прямої АВ (рис 2.10).

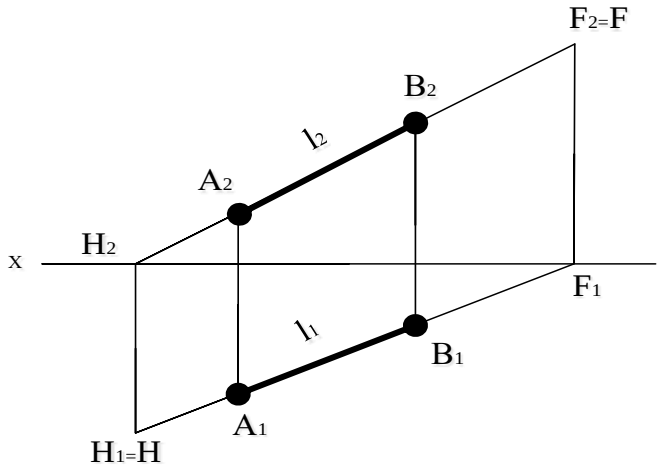


Рис. 2.10 – Сліди прямої АВ

Розв'язування:

Із малюнка видно, що фронтальна проекція H_2 горизонтального сліду Н буде знаходитися на перетині фронтальної проекції l_2 прямої l (що належить відрізку АВ) з віссю x, його горизонтальна проекція H_1 буде знаходитися на одній вертикальній лінії зв'язку з H_2 і буде належати горизонтальній проекції l_1 прямої l. Аналогічно горизонтальна проекція F_1 фронтального сліду F знаходиться на перетині горизонтальної проекції l_1 прямої l з віссю x, а фронтальна F_2 – на фронтальній проекції l_2 прямої l.

Приклад 8

Побудувати сліди прямої АВ (рис. 2.11).

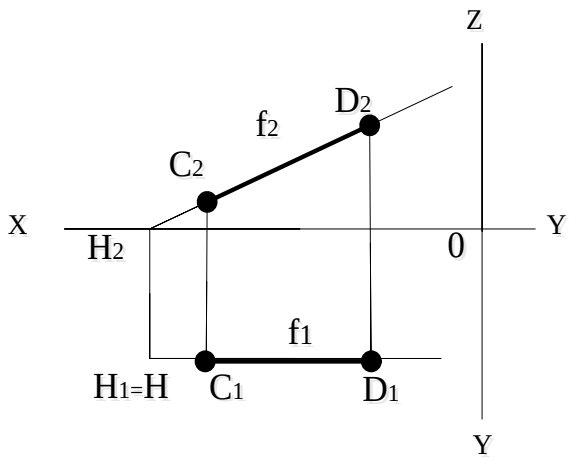


Рис. 2.11 – Сліди прямої АВ

Розв'язування:

Одна із проекцій прямої паралельна осі Ох – пряма є прямою рівня. Горизонтальна проекція прямої до осі Ох паралельна, отже пряма f є фронталлю. У даному випадку пряма має тільки один горизонтальний слід, а на продовженні – профільний слід.

Приклад 9

Побудувати сліди фронтально-проекціюючої прямої j (рис. 2.12).

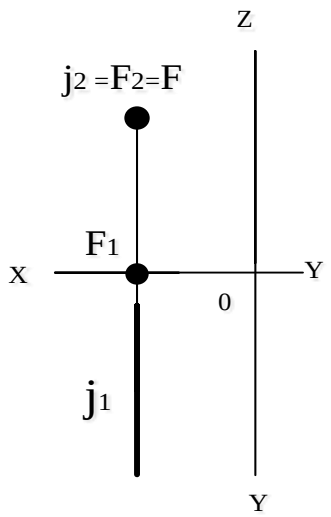


Рис. 2.12 – Сліди прямої АВ

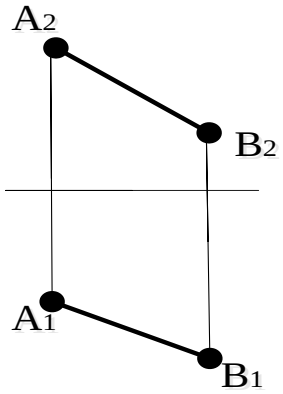
Розв'язування:

Із умови видно, що пряма j є фронтально-проекціюючою прямою. Вона перетинає тільки одну площину проекцій, відповідно має тільки один фронтальний слід. Оскільки фронтально-проекціююча пряма j по відношенню до фронтальної площини проекцій $П_2$ має збірну властивість, тому фронтальна проекція F_2 фронтального сліду F належить фронтальній проекції прямої j_2, а горизонтальна проекція F_1 фронтального сліду F – осі x.

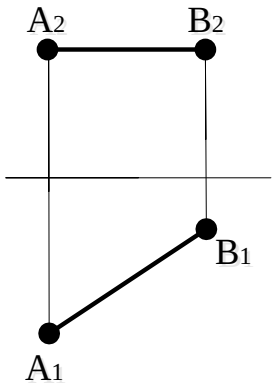
Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати сліди прямих, які задані відрізками

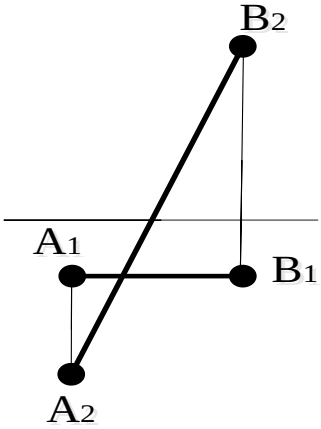
Варіант 1, 9



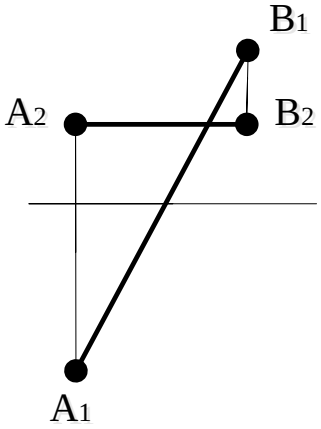
Варіант 2, 10



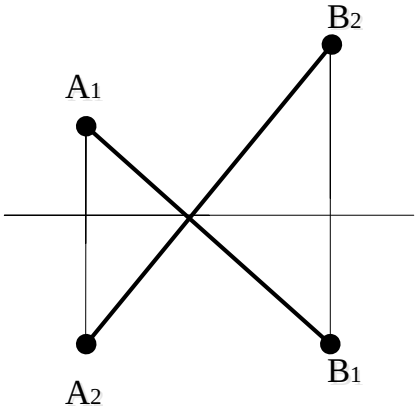
Варіант 3, 11



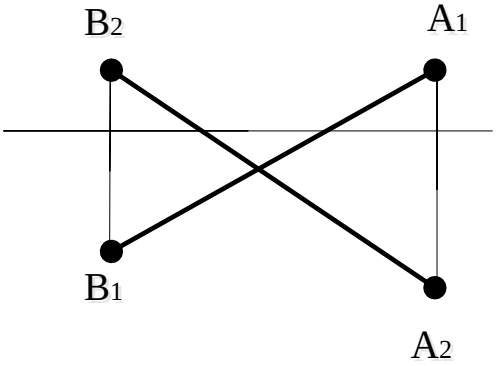
Варіант 4, 12



Варіант 5, 13

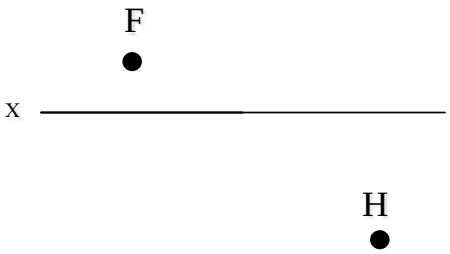


Варіант 6, 14

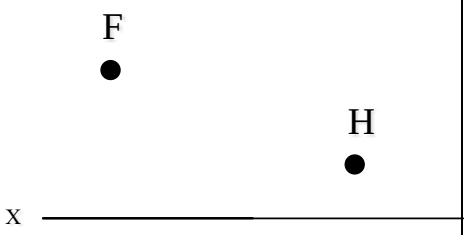


Побудувати проекції прямої за заданими слідами

Варіант 7, 15



Варіант 8, 16



2.3 Визначення дійсної довжини прямої

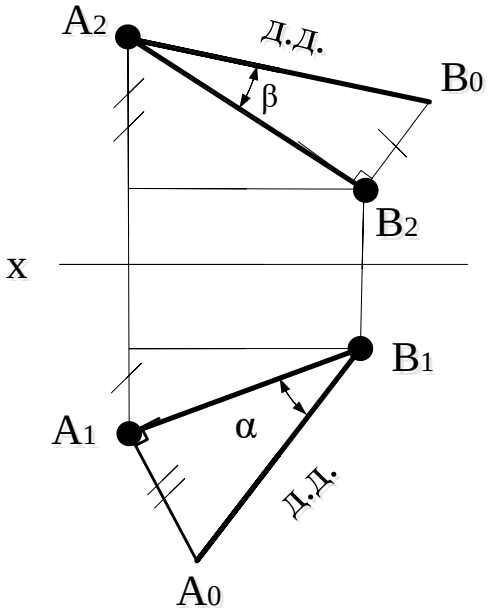
Для визначення дійсної довжини відрізка прямої і кута нахилу до будь-якої площини проекцій необхідно побудувати прямокутний трикутник, у якого один із катетів буде проекцією відрізка, а інший – різницею відстані кінців відрізка від однойменної з проекцією відрізка площини проекцій.

Отже, *дійсну довжину відрізка визначають як гіпотенузу прямокутного трикутника, одним з катетів якого є горизонтальна (фронтальна) проекція відрізка, іншим – різниця координат кінців відрізка до горизонтальної (фронтальної) площини проекцій.*

Кут між гіпотенузою, дійсною довжиною відрізка, і катетом, горизонтальною проекцією відрізка, визначає кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій (до площини, на якій ведуться побудови) і навпаки.

Приклад 10

Визначити дійсну довжину відрізка АВ і кути нахилу до площин проекцій (рис. 2.13).



Розв'язування:

У якості одного з катетів приймемо фронтальну проекцію A_2B_2 відрізка АВ, у якості іншого – різницю відстані кінців відрізка АВ від фронтальної площини проекцій, тобто y_a-$y_в$. Кут між гіпотенузою, дійсною довжиною відрізка, і катетом є кут β (кут нахилу відрізка АВ до фронтальної площини проекцій $П_2$).

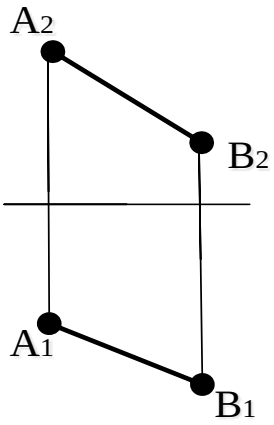
Рис. 2.13 – Дійсна довжина відрізка АВ

Аналогічно беремо у якості одного з катетів горизонтальну проекцію A_1B_1 відрізка АВ, у якості іншого – різницю відстані кінців відрізка АВ від горизонтальної площини проекцій, тобто z_a-$z_в$. Кут між гіпотенузою, дійсною довжиною відрізка, і катетом є кут α (кут нахилу відрізка АВ до горизонтальної площини проекцій $П_1$).

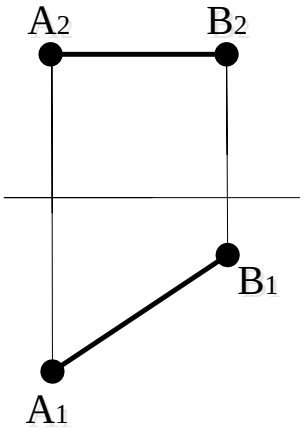
Задачі для самостійного розв’язування

Визначити дійсну довжину відрізка прямої АВ та кути нахилу до площин $П_1$ та $П_2$

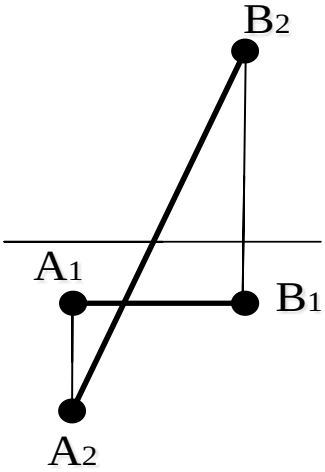
Варіант 1, 9



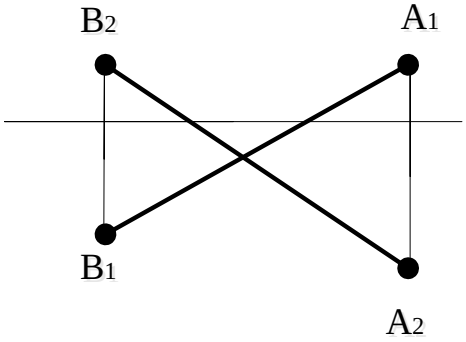
Варіант 2, 10



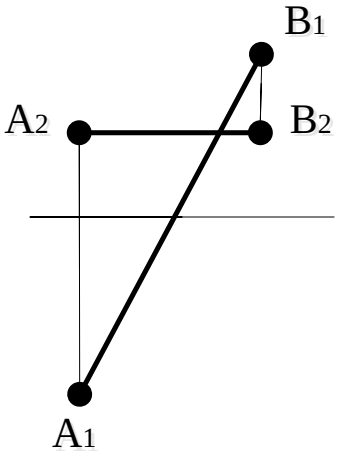
Варіант 3, 11



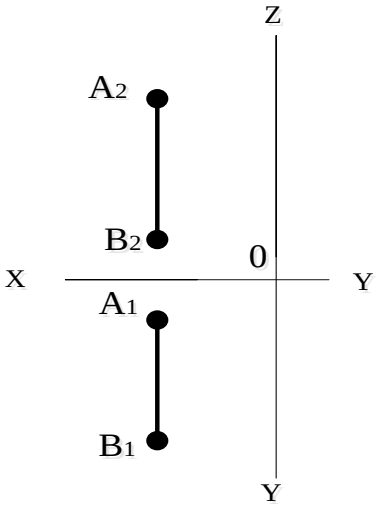
Варіант 4, 12



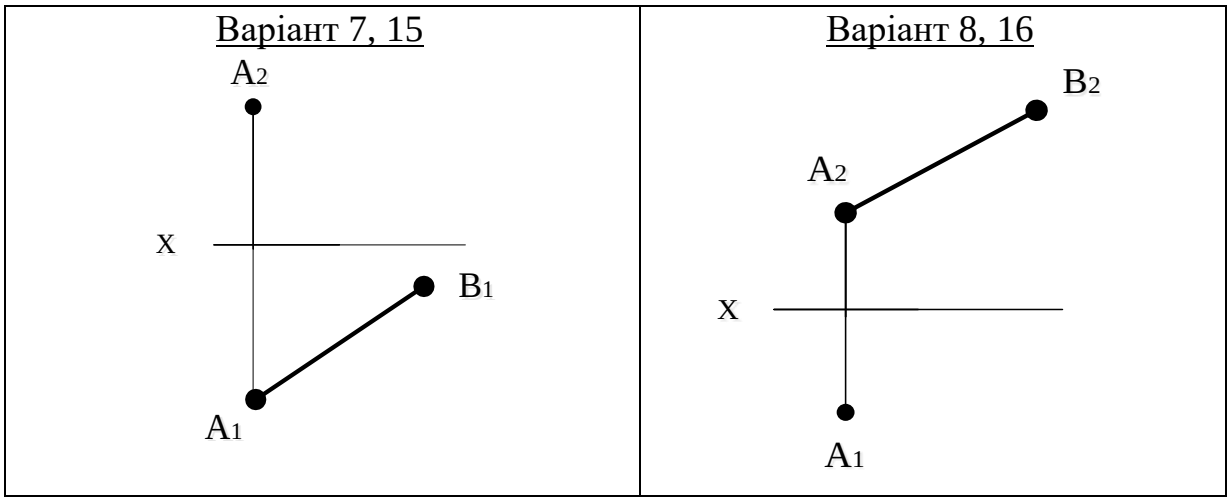
Варіант 5, 13



Варіант 6, 14



Побудувати другу проекцію відрізка АВ, якщо дійсна довжина дорівнює 35 мм



2.4 Взаємне положення прямої і точки

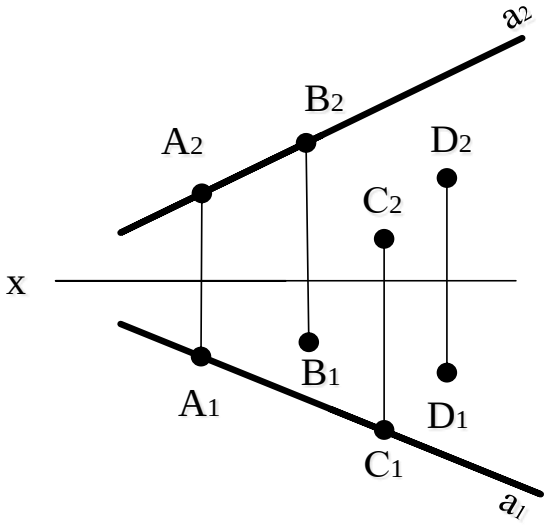
Точка може або належати прямій, або лежати поза прямою.

Якщо точка належить прямій, усі її проекції належать однойменним проекціям прямої і розташовані на спільній лінії зв'язку.

Для того, щоб встановити належність точки будь-якій прямій, достатньо встановити належність двох проекцій точки відповідним проекціям прямої.

Приклад 11

Визначити, чи належать точки прямій а (рис. 2.14).



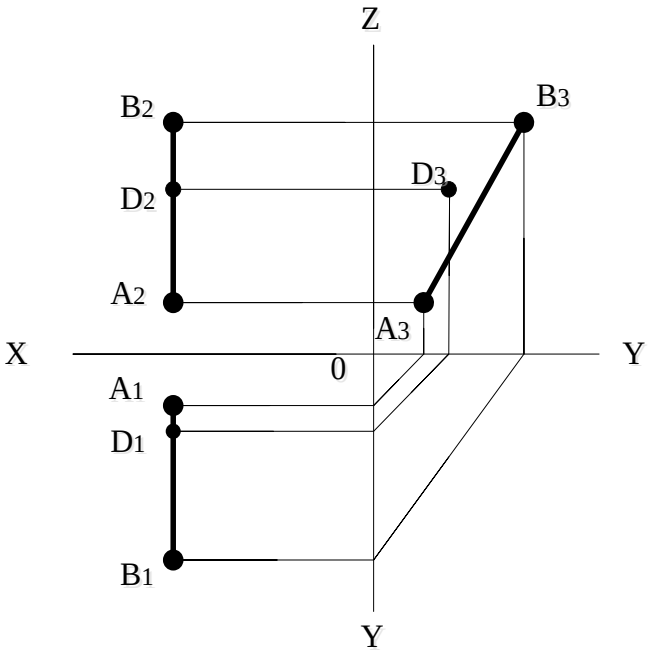
Розв'язування:

Для того, щоб визначити належність точки будь-якій прямій, достатньо встановити належність двох проекцій точки відповідним проекціям прямої. Наприклад, точка А належить прямій а, тому що її горизонтальна A_1 і фронтальна A_2 проекції належать відповідним проекціям a_1 і a_2 прямої а, відповідно точки – В, С, D прямій а не належать.

Рис. 2.14 – Належність точок прямій а

Приклад 12

Визначити, чи належить точка D прямій AB (рис. 2.15).



Розв'язування:

Побудуємо профільні проекції прямої і точки. У зв'язку з тим, що профільна проекція D_3 точки D не належить профільній проекції A_3B_3 прямої AB, можна констатувати, що точка D не належить заданій прямій.

Рис. 2.15 – Точка D не належить прямій AB

Приклад 13

Розділити відрізок AB точкою C у заданому співвідношенні CA:CB=2:3 (рис 2.16).

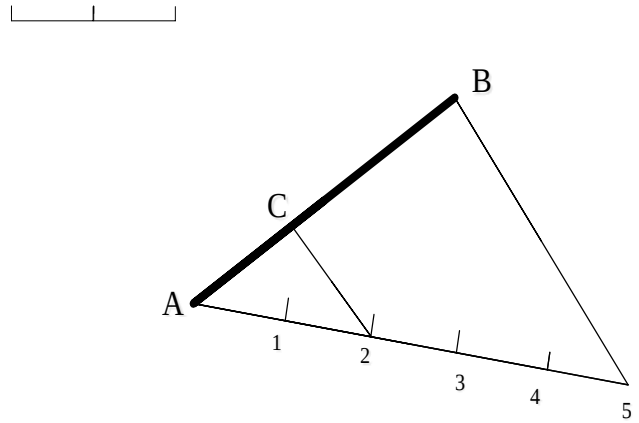


Рис. 2.16 – Ділення відрізка AB

Розв'язування:

Відрізок прямої можна розділити точкою в будь-якому співвідношенні. Точка може розташовуватися як на самому відрізку прямої, так і поза ним, на продовженні цього відрізка.

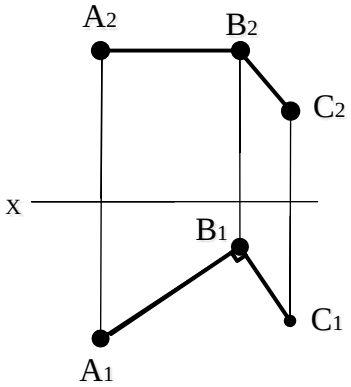
Якщо точка належить відрізку прямої, то вона ділить цей відрізок у певному співвідношенні. Такий поділ називається *внутрішнім.*

Якщо точка належить прямій даного відрізка, але лежить не на відрізку, а на його продовженні, то вона ділить відрізок також у певному співвідношенні. Такий поділ називається *зовнішнім*.

На рис. 2.16 показано ділення відрізка у заданому співвідношенні.

Приклад 14

Побудувати горизонтальну проекцію B_1C_1 відрізка BC, якщо відомо, що він становить з відрізком AB в точці B кут 90^0(рис. 2.17).



Розв'язування:

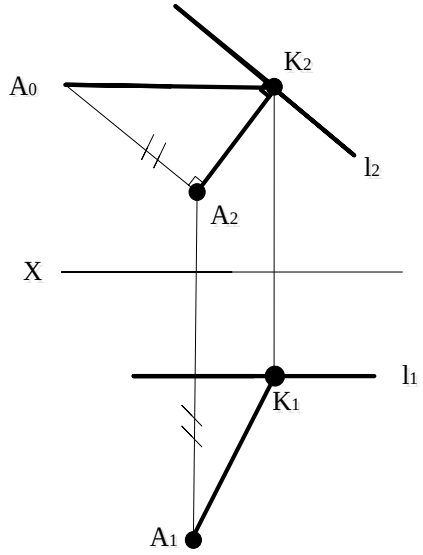
Прямий кут проекціюється в дійсну величину тільки в тому випадку, коли одна з його сторін паралельна площині проекцій. Оскільки відрізок AB є горизонталлю ($AB//П_1$), то прямий кут при точці B повинен проекціюватися в справжню величину на $П_1$.

Рис. 2.17 – Проекціювання прямого кута

Для визначення горизонтальної проекції C_1 точки C достатньо із точки B_1 провести пряму, перпендикулярну A_1B_1 до перетину з вертикальною лінією зв'язку, що проведена із точки C_2.

Приклад 15

Знайти відстань від точки A до прямої l (рис. 2.18).



Розв'язування:

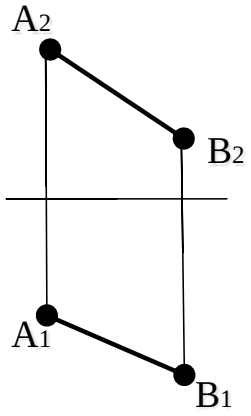
Оскільки пряма l фронталь, то на фронтальній проекції відстань буде перпендикуляром, проведеним до l_2 з точки A_2: $A_2K_2 \perp l_2$. З комплексного креслення очевидно, що відрізок AK – загального положення, а тому його дійсну довжину визначаємо способом прямокутного трикутника.

Рис. 2.18 – Відстань від точки A до прямої l

Задачі для самостійного розв’язування

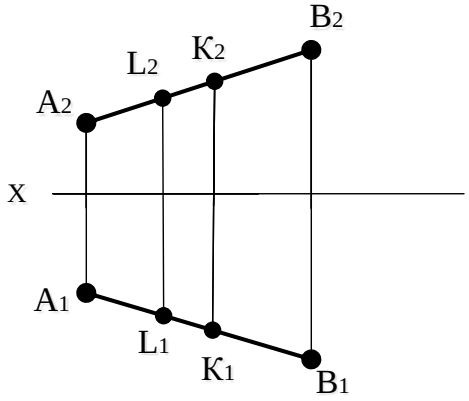
<u>Варіант 1, 7</u>

Розділіть відрізок АВ точкою К у співвідношенні 2:3



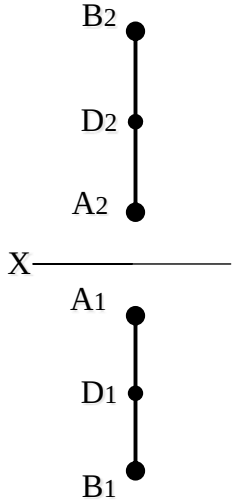
<u>Варіант 2, 8</u>

Визначити, чи належать точки відрізку прямої



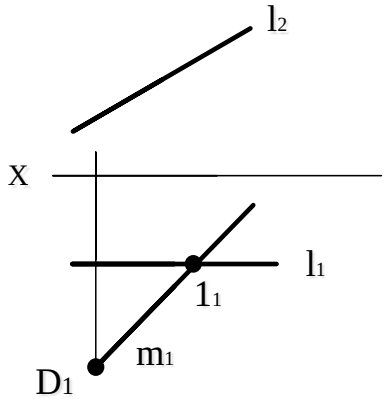
<u>Варіант 3, 9</u>

Визначити, чи належить точка прямій



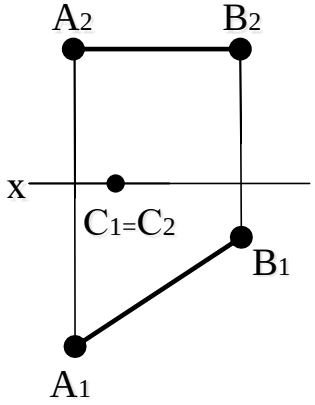
<u>Варіант 4, 10</u>

Побудувати фронтальну проекцію точки D, якщо відомо, що вона належить прямій m, перпендикулярній l



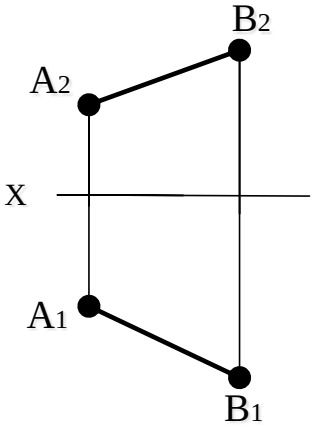
<u>Варіант 5, 11</u>

Побудувати проекції відрізка CD, який перпендикулярний АВ



<u>Варіант 6, 12</u>

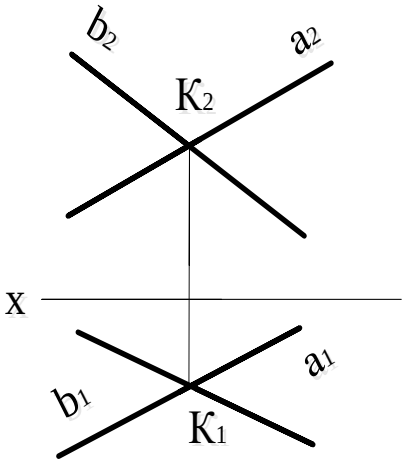
Розділити відрізок АВ точкою К у співвідношенні 3:5



2.5 Взаємне положення прямих

Дві прямі в просторі можуть перетинатися, бути паралельними та мимобіжними.

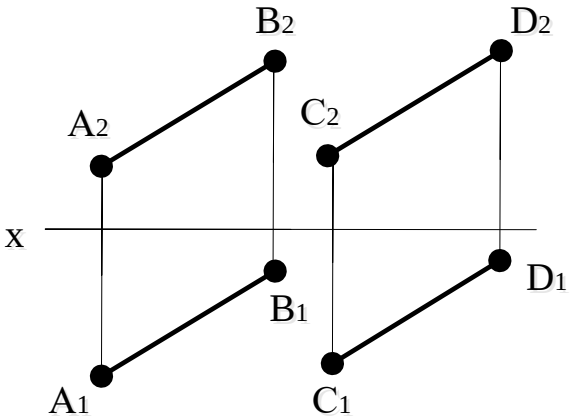
1. Пересічні прямі. Якщо прямі перетинаються, то їх однойменні проекції перетинаються між собою, а проекції точок перетину знаходяться на одній лінії зв'язку.



Якщо прямі «а» і «в» перетинаються в деякій точці К, то ця точка належить кожній із них, і тому її проекції повинні знаходитися на одній лінії зв'язку (рис.2. 19).

Рис. 2.19 – Пересічні прямі

2. Паралельні прямі. *Якщо прямі в просторі паралельні, то їх однойменні проекції на будь-яку площину також взаємно паралельні.*

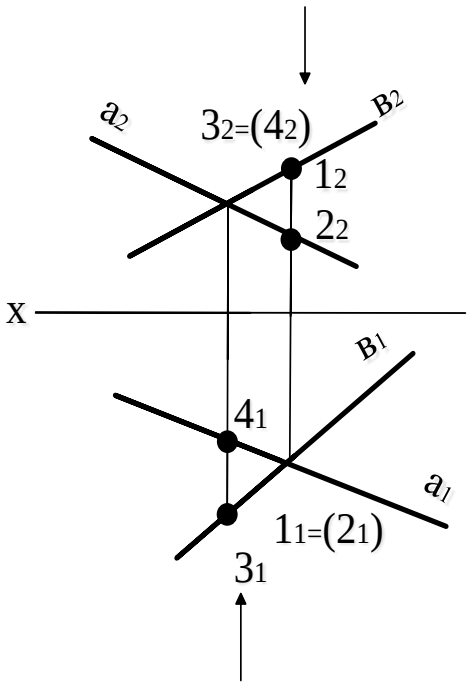


Однойменні проекції паралельних прямих загального положення паралельні, тобто $A_1B_1//C_1D_1$; $A_2B_2//C_2D$. Отже, відрізки паралельні (AB//CD).

Рис. 2.20 – Паралельні прямі

3. Мимобіжні прямі. *Якщо дві прямі у просторі не паралельні між собою і не перетинаються, то вони мимобіжні.*

Точки перетину однойменних проекцій прямих «а» і «в» не знаходяться на одній лінії зв'язку (рис. 2.21), тому дані прямі – мимобіжні.



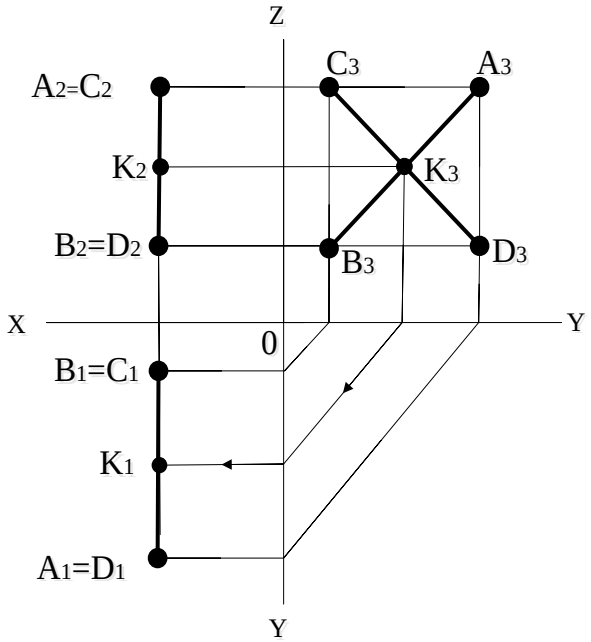
Кожна із точок перетину проекцій прямих є проекцією двох різних точок, котрі належать різним прямим. Такі точки називаються конкуруючими і їх використовують для визначення взаємної видимості окремих геометричних елементів відносно площин проекцій і спостерігача.

Рис. 2.21 – Мимобіжні прямі

Із рис. 2.21 видно, що точки 3 і 4 належать до різних прямих, але вони рівновіддалені від площини $П_1$. По відношенню до площини $П_2$ точка 4 знаходиться ближче й перекривається точкою 3. По відношенню до площини $П_1$ видимість визначається по фронтальній проекції мимобіжних прямих аналогічним чином (конкуруючі точки 1 і 2).

Приклад 16

Визначити взаємне положення відрізків AB і CD, якщо задані їх горизонтальні та фронтальні проекції (рис. 2.22).



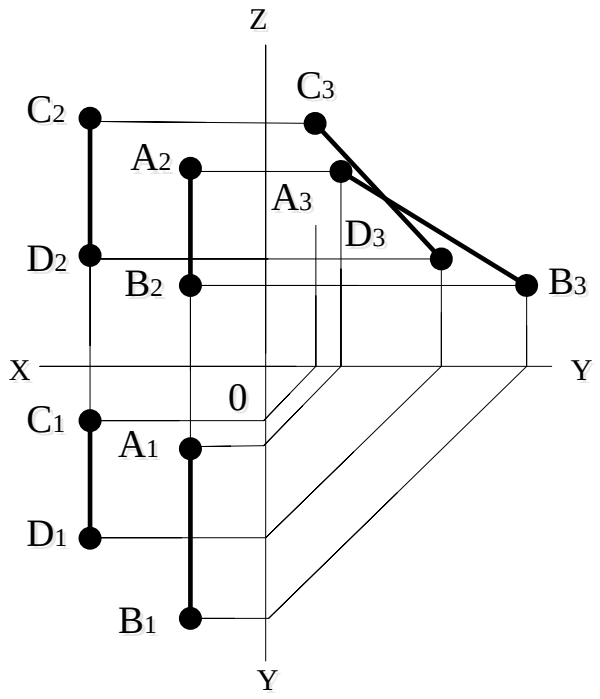
Розв'язування:

Оскільки задані відрізки є відрізками рівня, побудуємо їх профільні проекції – A_3B_3 і C_3D_3. У зв'язку з тим, що профільні проекції заданих відрізків перетинаються, у просторі перетинаються й самі відрізки в точці К.

Рис. 2.22 – Пересічні відрізки AB і CD

Приклад 17

Визначити взаємне положення відрізків AB і CD, якщо задані їх горизонтальні та фронтальні проекції (рис. 2.23).

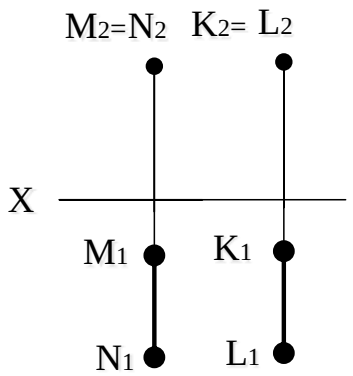
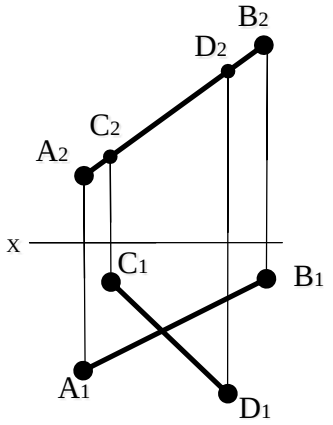


Розв'язування:

Побудуємо профільні проекції A_3B_3 і C_3D_3 заданих відрізків. Профільні проекції заданих відрізків не паралельні, тому відрізки AB і CD мимобіжні.

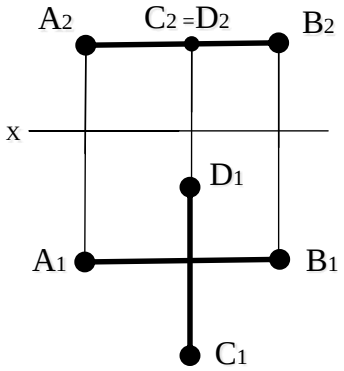
Рис. 2.23 – Мимобіжні відрізки AB і CD

Задачі для самостійного розв'язування

Визначити взаємне положення прямих у просторі	
Варіант 1, 10	Варіант 2, 11
	

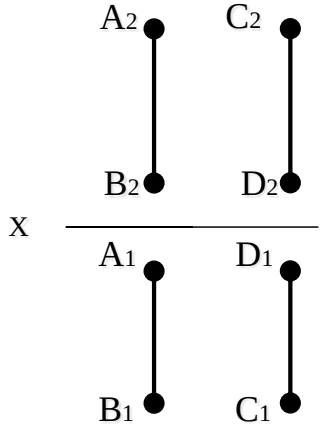
<table>
<tr>
<td>

Варіант 3, 12



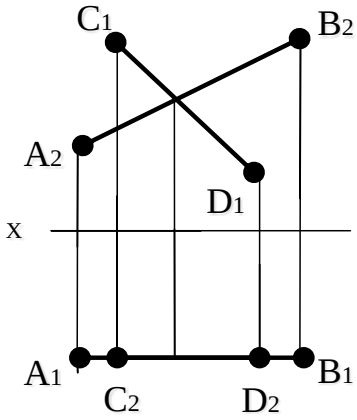
</td>
<td>

Варіант 4, 13



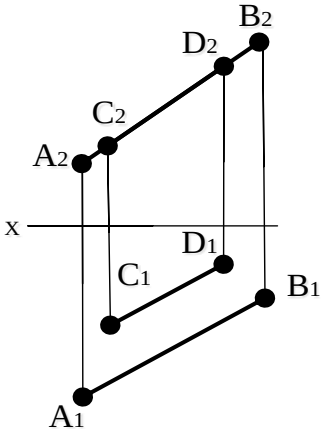
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Варіант 5, 14



</td>
<td>

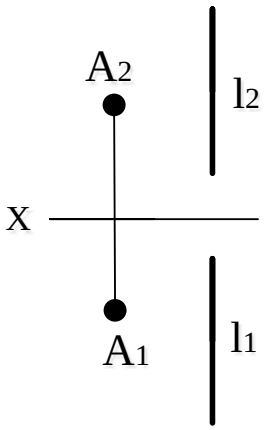
Варіант 6, 15



</td>
</tr>
<tr>
<td>

Варіант 7, 16

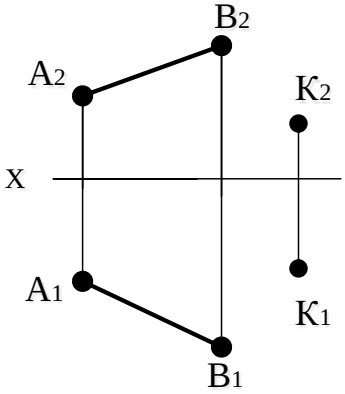
Через точку А провести горизонтальну пряму, яка перетинає пряму l



</td>
<td>

Варіант 8, 17

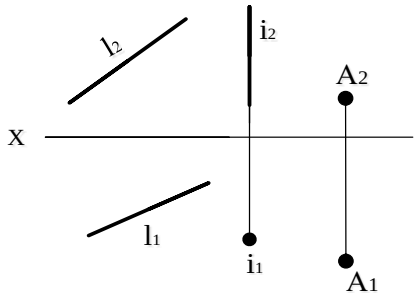
Через точку К провести дві прямі: одну – паралельну прямій АВ, іншу – пряму, що перетинає АВ навпіл



</td>
</tr>
</table>

Варіант 9, 18

Через точку А провести пряму «m», що перетинатиме мимобіжні прямі «l» та «i». У процесі розв'язування задачі використати збірні властивості проекціюючої прямої



Контрольні запитання

1. При якому положенні відносно площин проекцій пряма називається прямою загального положення?
2. Як побудувати профільну проекцію відрізка прямої загального положення за заданими фронтальною та горизонтальною проекціями?
3. Як розміщена фронтальна проекція відрізка прямої лінії, якщо його горизонтальна проекція дорівнює самому відрізку?
4. Як розміщена горизонтальна проекція відрізка прямої лінії, якщо його фронтальна проекція дорівнює самому відрізку?
5. Як розділити на кресленні відрізок прямої лінії у заданому співвідношенні?
6. Що називається слідом прямої лінії на площині проекцій?

3. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ПЛОЩИН

3.1 Способи задання площини на кресленні

На комплексному кресленні площину можна задати проекціями геометричних елементів, що визначають її положення в просторі:

1. Трьома точками, що не лежать на одній прямій (рис. 3.1).

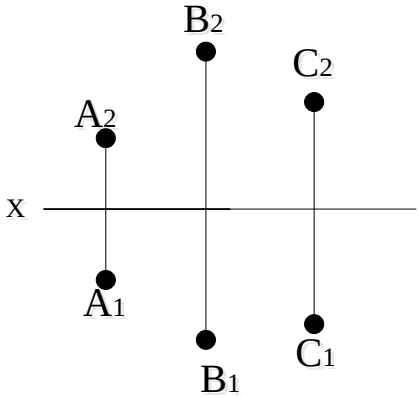


Рис. 3.1 – Трьома точками, що не лежать на одній прямій

2. Прямою і точкою поза цією прямою (рис. 3.2).

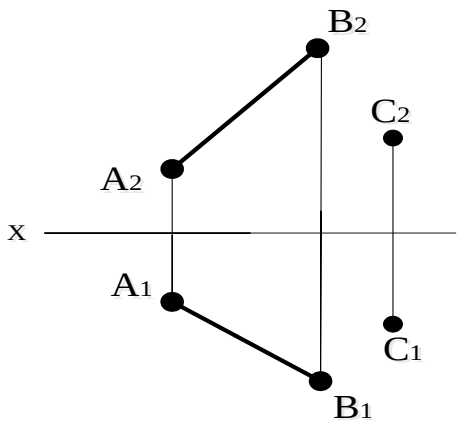


Рис. 3.2 – Прямою і точкою поза цією прямою

3. Двома прямими, що перетинаються (рис. 3.3).

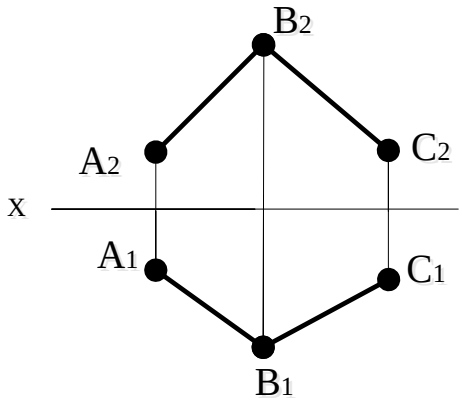


Рис.3.3 – Двома прямими, що перетинаються

4. Двома паралельними прямими (рис. 3.4).

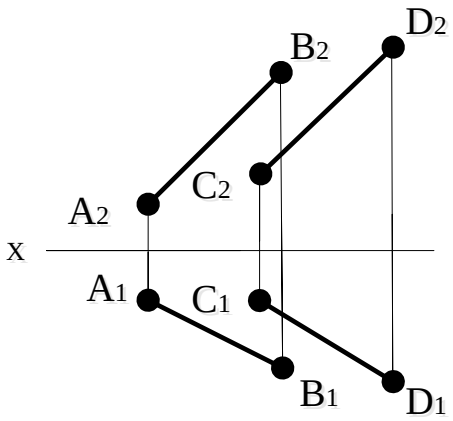


Рис. 3.4 – Двома паралельними прямими

5. Проекціями будь-якої плоскої фігури (рис. 3.5).

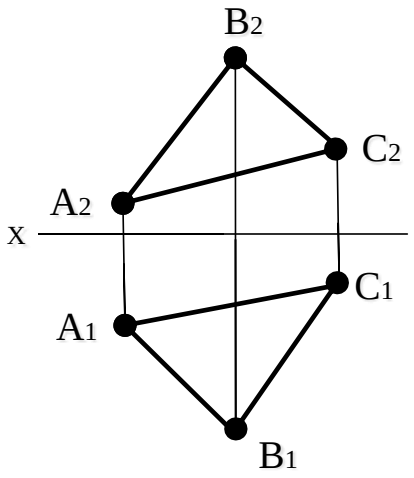


Рис. 3.5 – Площина задана трикутником

6. Слідами площини (рис. 3.6).

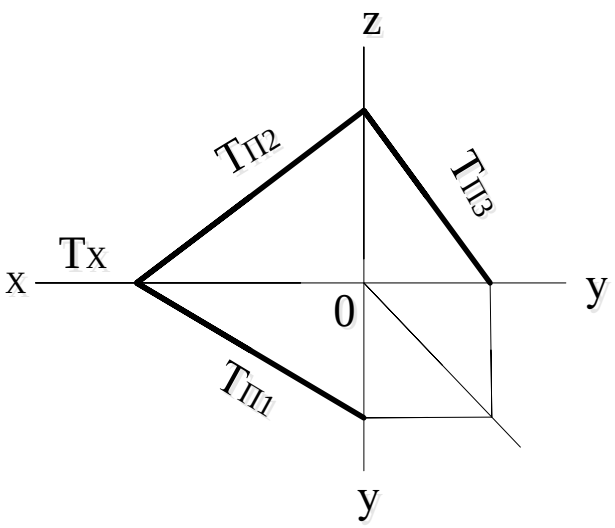


Рис. 3.6 – Слідами площини

Слід площини – це лінія перетину площини з площинами проекцій, тому слід збігається на кресленні з однойменною своєю проекцією, а інші його проекції знаходяться на осях проекцій і не позначаються.

3.2 Положення площини відносно площин проекцій

Площини, паралельні або перпендикулярні до однієї з площин проекцій, називаються площинами особливого положення. Вони поділяються на площини рівня і проекціюючі.

Площиною рівня називається площина, паралельна одній з площин проекцій.

Розрізняють три види площин рівня:

1. **Горизонтальна** – паралельна площині проекцій $П_1$ (рис. 3.7).

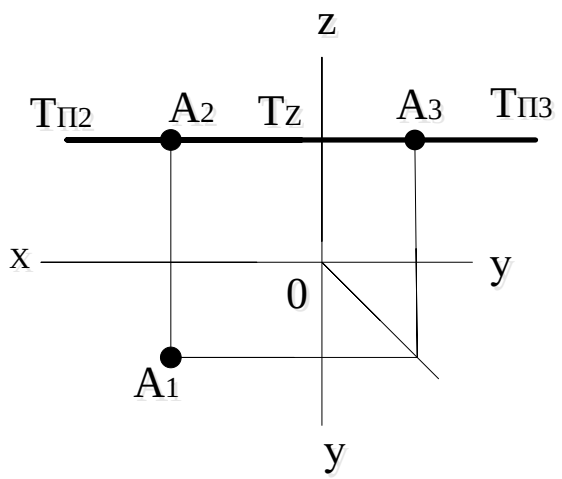


Рис. 3.7 – Горизонтальна площина

2. **Фронтальна** – паралельна площині проекцій $П_2$ (рис. 3.8).

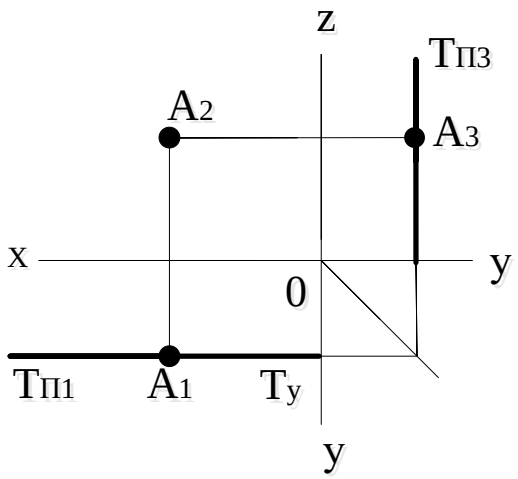


Рис. 3.8 – Фронтальна площина

3. **Профільна** – паралельна площині проекцій $П_3$ (рис. 3.9).

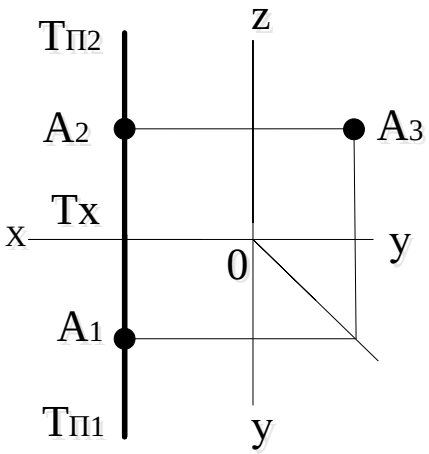


Рис. 3.9 – Профільна площина

Проекціюючою називається площина, яка є перпендикулярною до однієї з площин проекцій.

Розрізняють три види проекціюючих площин:

1. **Горизонтально-проекціююча** – перпендикулярна до площини проекцій $П_1$ (рис.3.10).

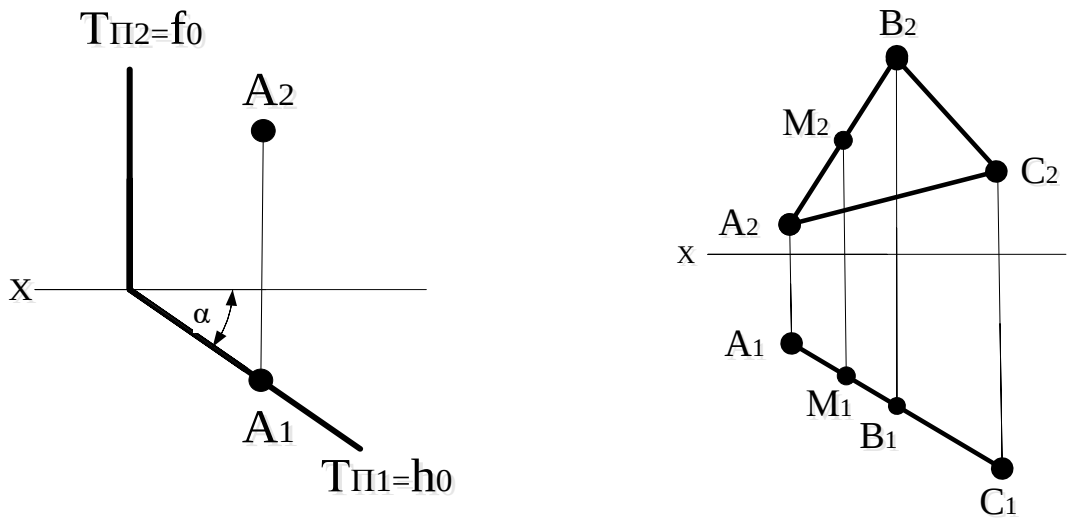


Рис. 3.10 – Горизонтально-проекціююча площина

2. **Фронтально-проекціююча** – перпендикулярна до площини проекцій $П_2$ (рис. 3.11).

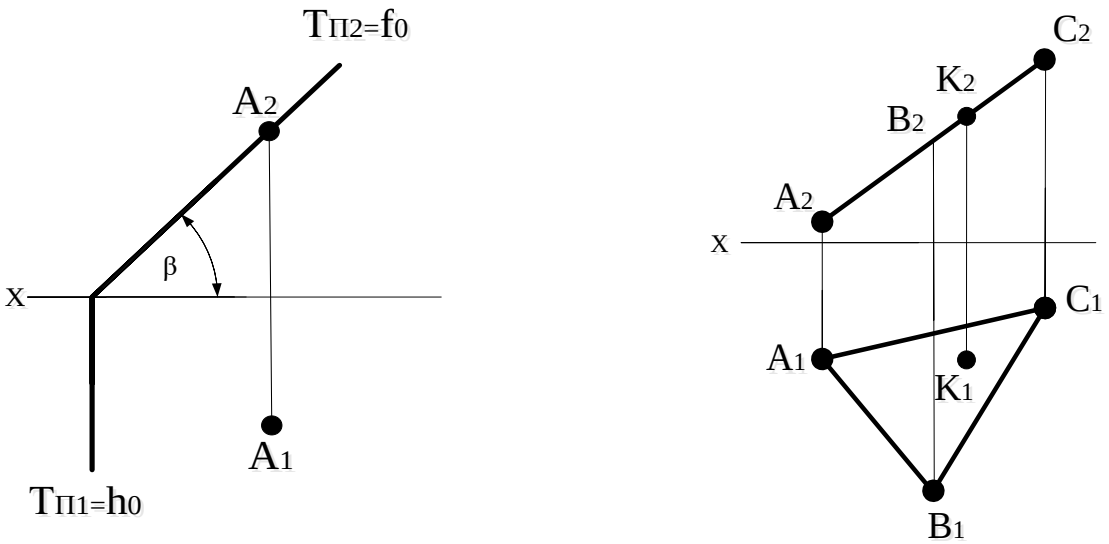


Рис.3.11 – Фронтально-проекціююча площина

3. **Профільно-проекціююча** – перпендикулярна до площини проекцій $П_3$ (рис. 3.12).

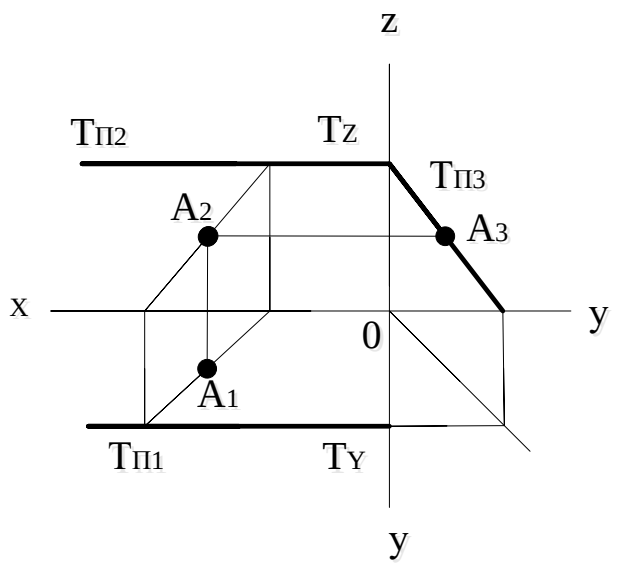


Рис. 3.12 – Профільно-проекціююча площина

Ознакою *горизонтально* чи *фронтально-проекціюючої* площини є вертикальність одного зі слідів. Протилежний слід проекціюючої площини має збірні властивості – відповідна проекція всіх елементів, що знаходяться у даній площині, а потім розташовуються на збиральному сліді цієї площини.

3.3. Пряма і точка в площині. Головні лінії площини

Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що належать цій площині.

Точка належить площині, якщо проекції точки лежать на однойменних проекціях прямої, яка належить даній площині.

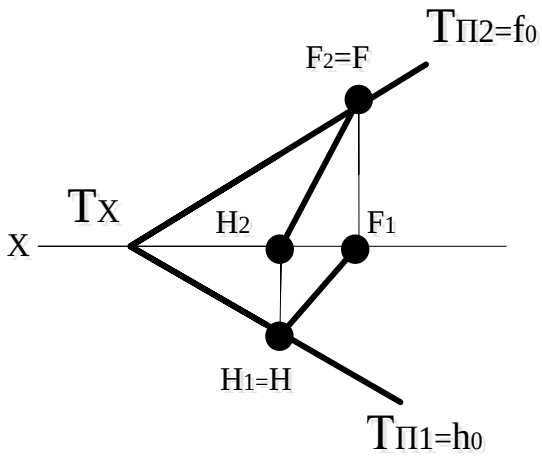
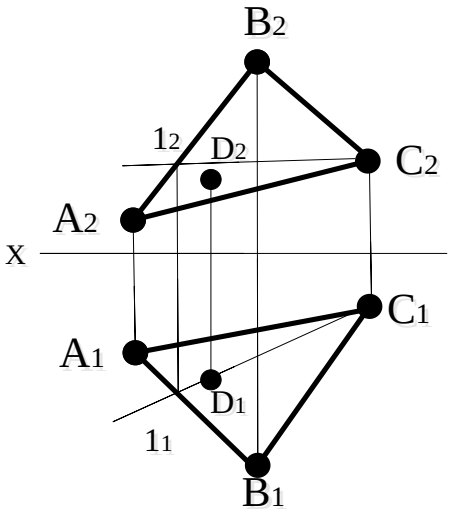


Рис. 3.13 – Належність прямої до площини, заданої слідами

Якщо площина задана слідами, то пряма належить до площини, якщо сліди прямої знаходяться на однойменних слідах цієї площини (рис.3.13).

Приклад 18

Визначити належність точки D площині Т(ΔАВС) (рис. 3.14).



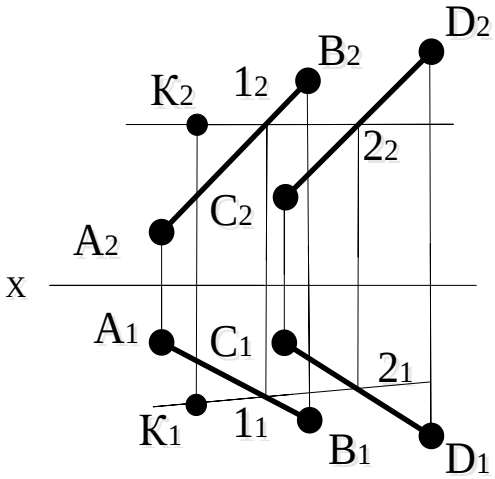
Розв'язування:

Проведемо в площині таку пряму, щоб її горизонтальна проекція проходила через горизонтальну проекцію D_1 точки $D \in (1_1C_1)$. Фронтальна проекція D_2 точки D не належить фронтальній проекції 1_2C_2 прямої 1С, тому точка D не належить площині Т.

Рис. 3.14 – Точка D не належить площині Т

Приклад 19

Побудувати горизонтальну проекцію K_1 точки К, якщо відомо, що вона належить площині Г (АВ//CD) (рис. 3.15).



Розв'язування:

Площина Г задана двома паралельними прямими АВ і CD. Точка К, що належить даній площині, задана проекцією K_2. Горизонтальну проекцію точки К побудуємо за допомогою допоміжної прямої, яка належить площині і проходить через точку К.

Рис. 3.15 – Побудова відсутньої проекції точки К

Для цього проведемо фронтальну проекцію $K_2 1_2 2_2$ прямої, побудуємо її горизонтальну проекцію $1_1 2_1$ і на ній відмітимо горизонтальну проекцію K_1 точки К.

Серед множини прямих, які належать площині, особливе місце займають так звані *головні лінії площини*. Це лінії рівня, котрі паралельні якійсь площині проекцій, тобто ці лінії належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проекцій.

Розглянемо головні лінії площини:

1. *Горизонталь (h)* – це лінія, що лежить у площині та паралельна горизонтальній площині проекцій $П_1$ (рис. 3.16). На комплексному кресленні (епюрі) її фронтальна проекція (h_2) завжди паралельна осі x, а горизонтальна – паралельна горизонтальному сліду площини $Тп_2$.

2. *Фронталь (f)* – це лінія площини, паралельна фронтальній площині проекцій $П_2$ (рис. 3.17). На комплексному кресленні (епюрі) її горизонтальна проекція паралельна осі x, а фронтальна (f_2) паралельна фронтальному сліду площини $Тп_1$.

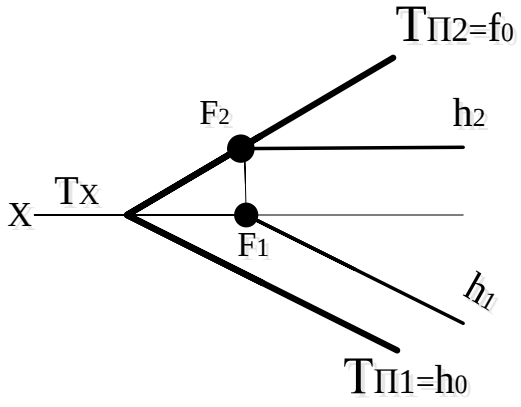


Рис. 3.16. Горизонталь площини

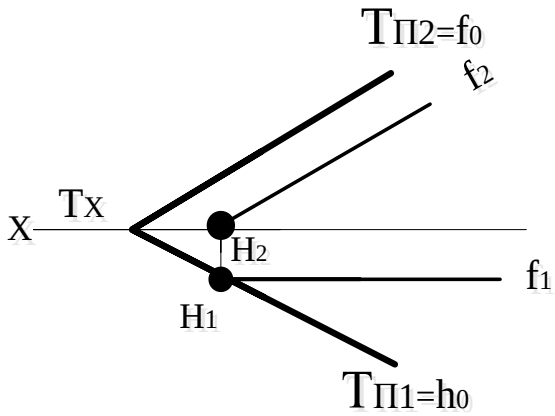


Рис. 3.17. Фронталь площини

3. *Профільна пряма (p)* – лінія, що належить площині й паралельна профільній площині проекцій $П_3$ (рис. 3.18).

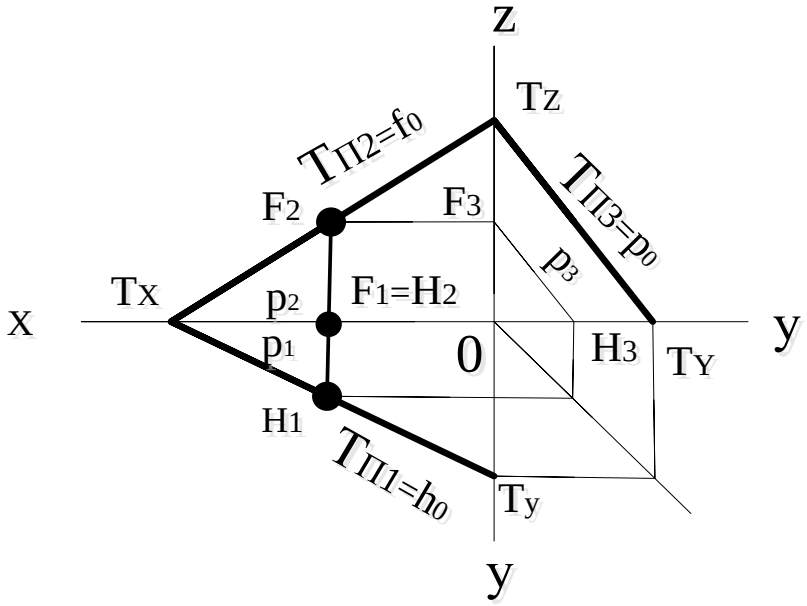


Рис. 3.18 – Профільна пряма

Із трьох ліній найбільшого нахилу до площин проекцій відмітимо лінію найбільшого нахилу до площини П1. Відносно площини П1 лінії найбільшого нахилу називають лініями найбільшого скату, або лініями скату. Це лінії, що належать площині й перпендикулярні до горизонталей цієї площини, їх використовують для визначення кута нахилу (α) площини до горизонтальної площини проекцій П1 (рис. 3.19).

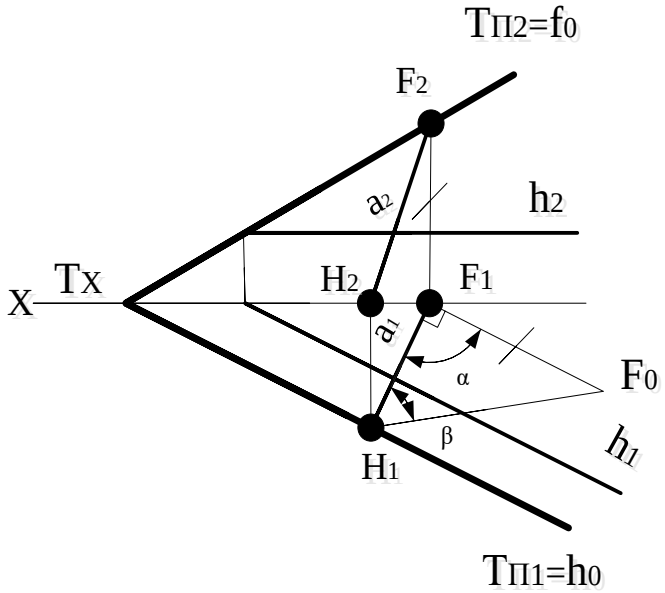
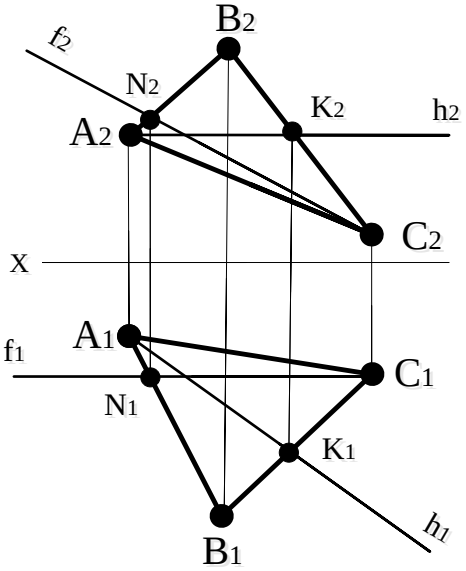


Рис. 3.19 – Лінія найбільшого нахилу до площини П1

Приклад 20

Через точку А площини Г(ΔАВС) провести горизонталь h, а через точку С – фронталь f (рис. 3.20).



Розв'язування:

Горизонталь площини – це пряма, паралельна площині проекцій П1. Фронтальна проекція горизонталі h2 завжди паралельна осі х. Для побудови горизонтальної проекції цієї горизонталі будуємо проекцію К1 точки К і проводимо пряму через проекції А1 і К1.

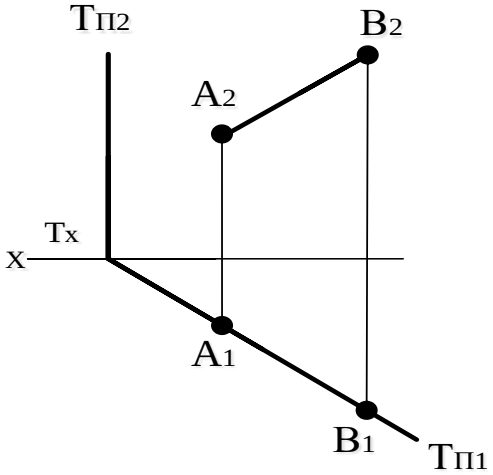
Рис. 3.20 – Головні лінії площини

Побудована пряма АК дійсно є горизонталлю даної площини: пряма належить площині, тому що проходить через дві точки завідомо їй належні, і паралельна площині проекцій $П_1$.

Аналогічно будуємо фронталь площини – це пряма, паралельна площині проекцій $П_2$. Горизонтальна проекція фронталі f_2 завжди паралельна осі x. Для побудови фронтальної проекції цієї горизонталі визначаємо проекцію N_2 точки N і проводимо пряму через точку C і N. Побудована пряма CN дійсно є фронталлю даної площини: пряма належить площині, тому що проходить через дві точки, завідомо їй належні, і паралельна площині проекцій $П_2$.

Приклад 21

Заключити пряму AB в горизонтально-проекціюючу площину T (рис. 3.21).



Розв'язування:

Продовжимо горизонтальну проекцію A_1B_1 прямої до перетину з віссю проекцій у точці Тх і через неї проведемо фронтальний слід площини Тп2 перпендикулярно до осі проекцій.

Рис. 3.21. Горизонтально-проекціююча площина T

Приклад 22

У площині T (a//b) побудувати лінію найбільшого нахилу цієї площини до фронтальної площини проекцій $П_2$ (рис. 3.22).

Розв'язування:

У площині T(a//b) проведемо фронталь f (f_1, f_2). Потім через довільну точку A (точка A належить площині T) проведемо фронтальну проекцію d_2 перпендикулярно до f_2. За проекціями A_2 і B_2 знайдемо A_1 і B_1. Ці дві точки визначають положення горизонтальної проекції прямої d_1 – лінії найбільшого нахилу площини T до площини проекцій $П_2$.

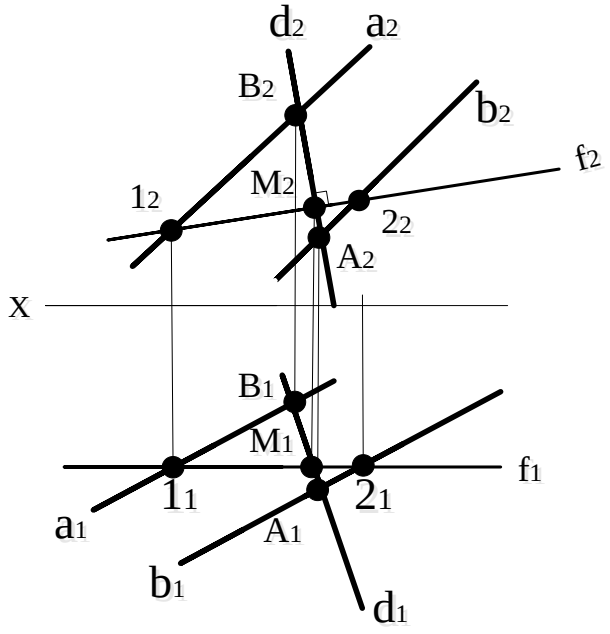
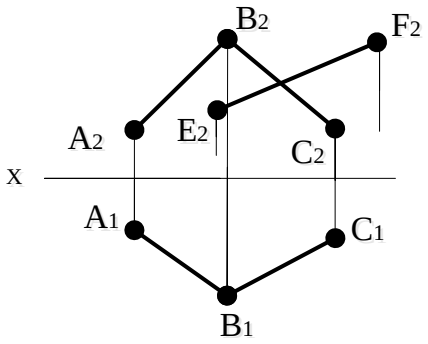
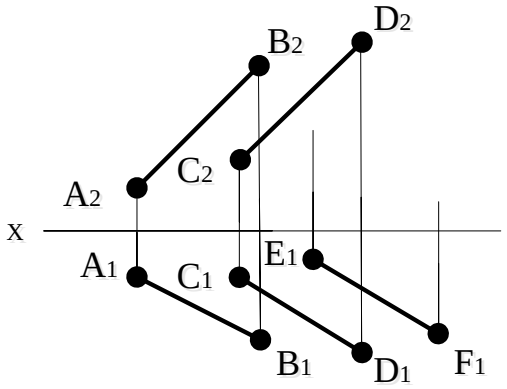


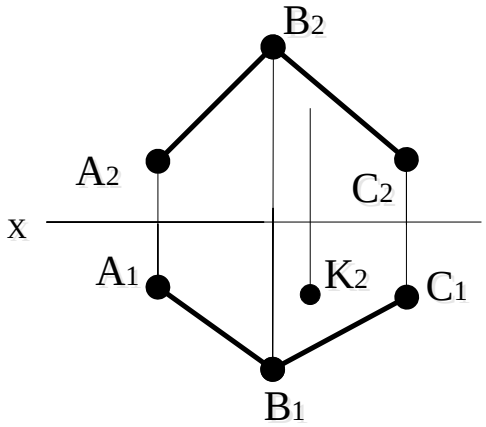
Рис. 3.22 – Лінія найбільшого нахилу до площини П2

Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати відсутню проекцію прямої EF, що належить даній площині	
Варіант 1, 11	Варіант 2, 12
	

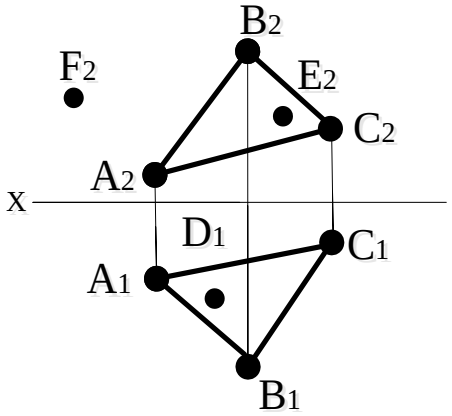
<u>Варіант 3, 13</u>

Побудувати відсутню проекцію точки К, що належить даній площині



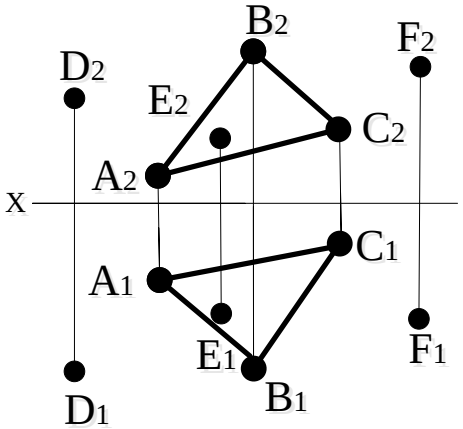
<u>Варіант 4, 14</u>

Побудувати відсутні проекції точок D, E і F, що належать даній площині



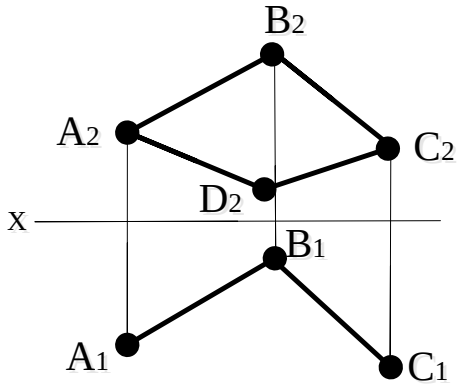
<u>Варіант 5, 15</u>

Визначити належність точок D, E і F площині трикутника ABC



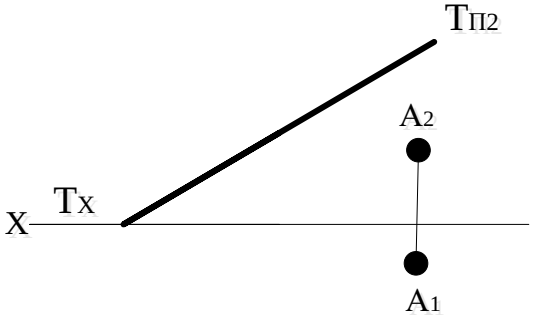
<u>Варіант 6, 16</u>

Добудувати фронтальну проекцію плоского чотирикутника ABCD



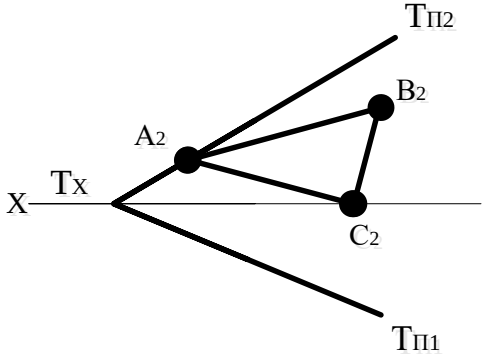
<u>Варіант 7, 17</u>

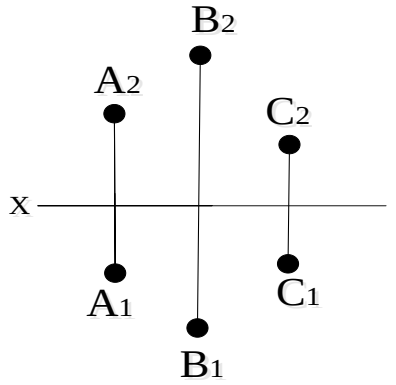
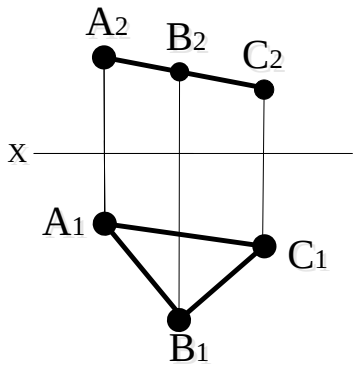
Побудувати горизонтальний слід площини Т, яка задана фронтальним слідом Тп2 та точкою А



<u>Варіант 8, 18</u>

Побудувати горизонтальну проекцію ΔABC, який належить площині Р



Варіант 9, 19	Варіант 10, 20
Побудувати горизонталь та фронталь площини, яка задана точками А, В, С. h – на висоті 20 мм f – на глибині 30 мм  	Через точку С площини Г(ΔАВС) провести фронталь 

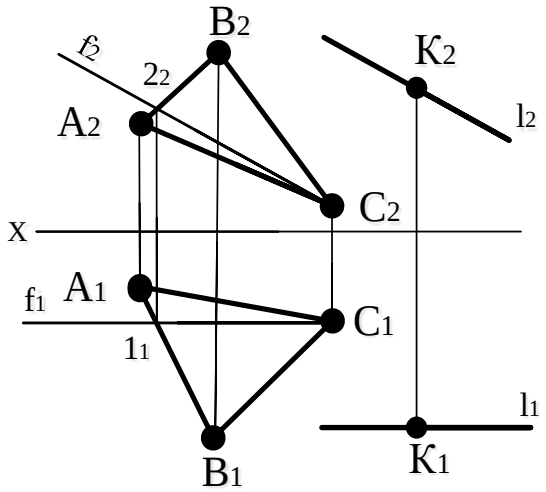
3.4 Паралельність прямої та площини. Паралельність двох площин

Якщо пряма паралельна будь-якій прямій, що лежить у цій площині, то вона паралельна й самій площині.

Отже, якщо прямі паралельні, то їх однойменні проекції паралельні. Для прямих загального положення є зворотне твердження: якщо однойменні проекції прямих паралельні, то дані прямі – паралельні. Лінії рівня паралельні, якщо їх проекції на паралельну їм площину проекцій також паралельні.

Приклад 23

Через точку К провести пряму, паралельну площині Т(ΔАВС) (рис. 3.23).



Розв'язування:

У площині трикутника Т(ΔАВС) проведемо фронталь з проекціями $C_1 1_1$ та $C_2 2_2$. Проекції шуканої прямої l проведені через проекції K_2 та K_1 точки паралельно проекціям фронталі: $l_2 // C_2 2_2$; $l_1 // C_1 2_1$.

Рис. 3.23 – Пряма «l», паралельна площині Т(ΔАВС)

Приклад 24

Через точку N провести пряму, паралельну площині T, яка задана слідами (рис. 3. 24).

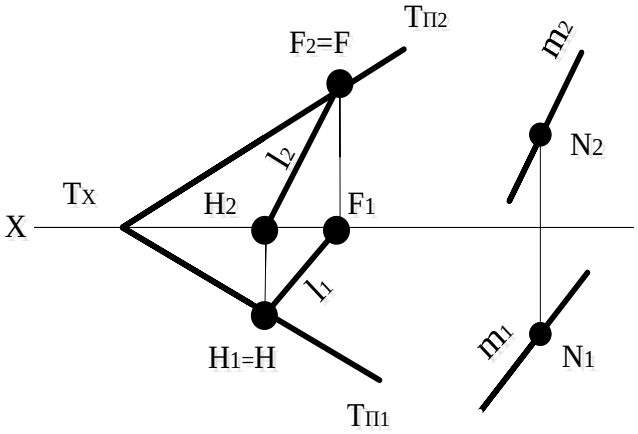


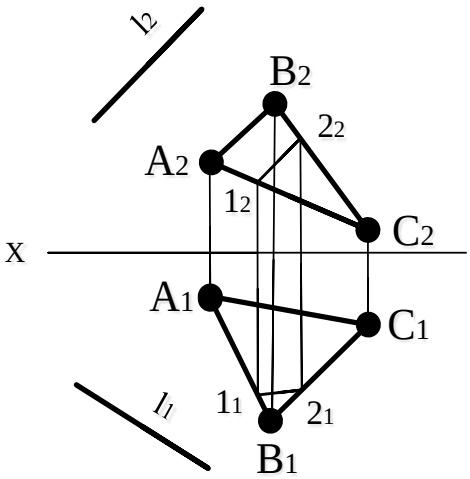
Рис. 3.24 – Пряма «m» паралельна площині

Розв'язування:

Проведемо в площині яку-небудь пряму l, як показано на рисунку, потім через точку N проведемо пряму (m_1; m_2), паралельну l. У зв'язку з тим, що пряма l (l_1; l_2) задається у площині довільно, то через точку можна провести безліч прямих паралельних площині T.

Приклад 25

Визначити, чи паралельна пряма l площині трикутника ABC (рис. 3.25).



Розв'язування:

Побудуємо в площині трикутника таку пряму 1_2, у якої фронтальна проекція $1_2 2_2$ паралельна l_2. У зв'язку з тим, що горизонтальні проекції $1_1 2_1$ та l_1 не паралельні, витікає, що пряма l не паралельна площині T.

Рис. 3.25 – Пряма 1 не паралельна площині T

Дві площини взаємно паралельні, якщо дві пересічні прямі однієї площини відповідно паралельні двом пересічним прямим другої площини.

Якщо дві паралельні площини задані слідами, то однойменні сліди цих площин взаємно паралельні.

Приклад 26

Через точку А провести площину Т, паралельну заданій площині Г(a∩b), (рис. 3.26).

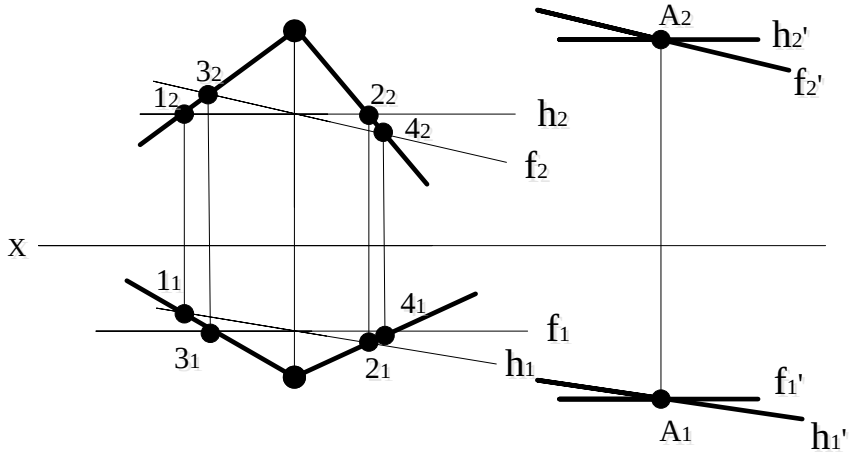


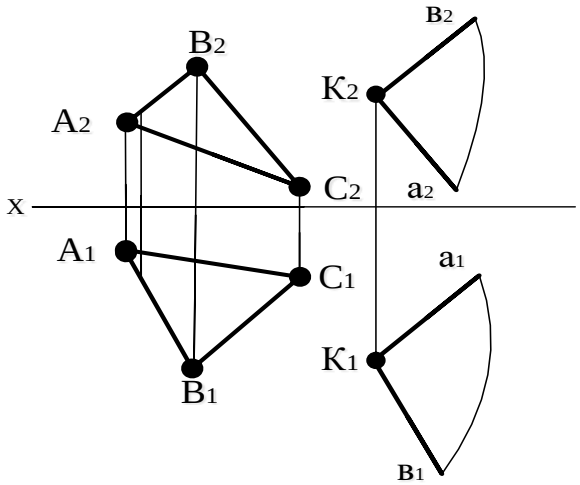
Рис. 3.26 – Паралельність площин

Розв'язування:

Побудову паралельних площин на кресленні зручно виконувати за допомогою головних ліній – горизонталей та фронталей. У площині Г побудуємо фронталь та горизонталь. Паралельна їй площина Т повинна проходити через точку з проекціями A_1, A_2. Проекції площини Т побудовані за допомогою фронтальних проекцій f_2 фронталі та h_2 горизонталі й горизонтальних проекцій h_1' горизонталі та f_1' фронталі. При цьому $f_2'//f_2$; $h_2'//h_2$ та $f_1'//f_1$; $h_1'//h_1$.

Приклад 27

Через точку К провести площину, паралельну заданій (рис. 3.27).



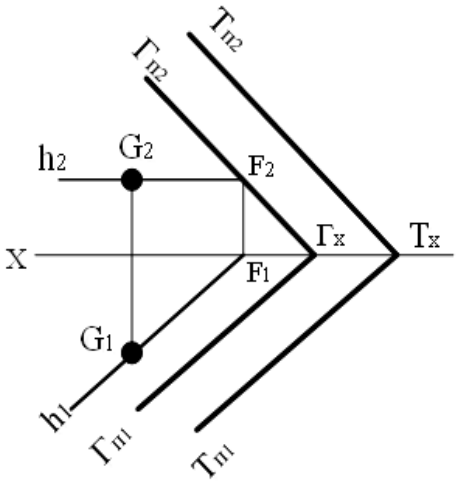
Розв'язування:

Через точку К проведемо прямі a і b, відповідно паралельні відрізкам AB//BC. У зв'язку з тим, що прямі a і b перетинаються у точці К, відповідно вони задають шукану площину.

Рис. 3.27 – Паралельність площин

Приклад 28

Через точку G провести площину Г, задану слідами, паралельну площині Т (рис. 3.28).



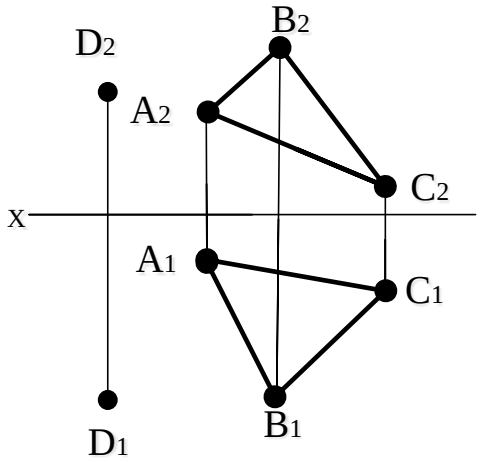
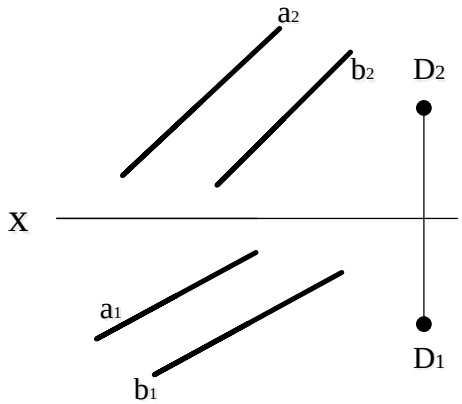
Розв'язування:

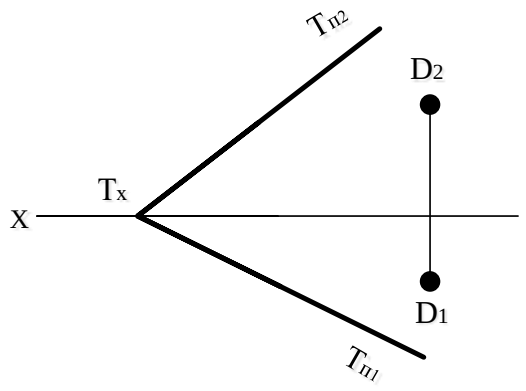
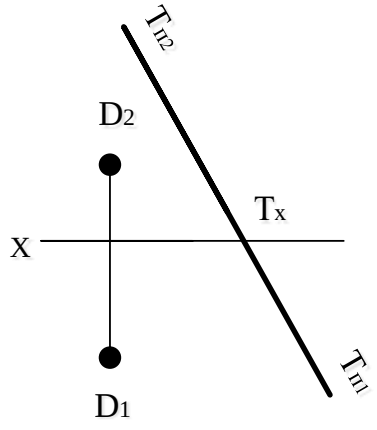
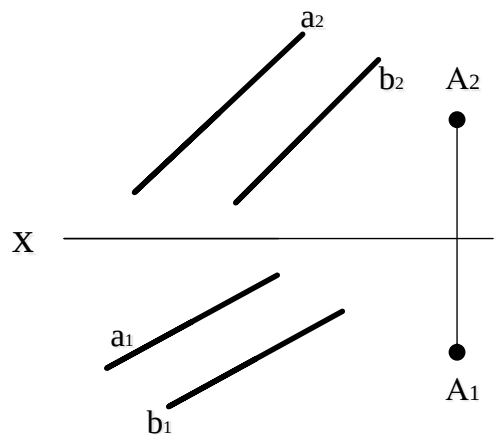
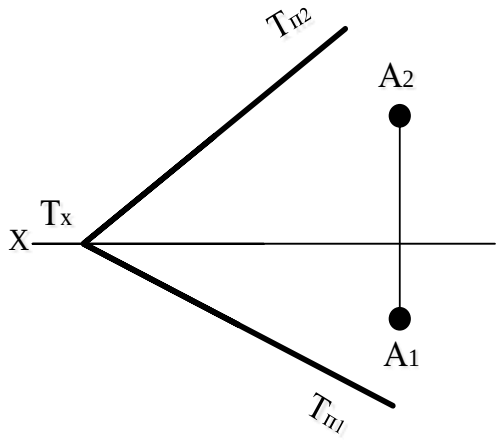
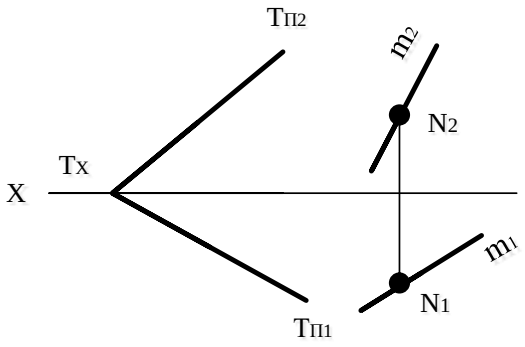
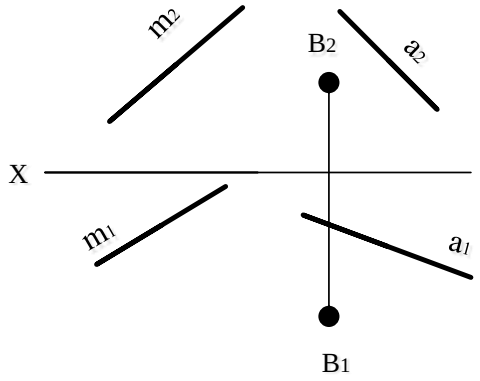
Спочатку через точку G проведемо пряму, завідомо паралельну площині Т. Це горизонталь з проекціями G_2F_2 та G_1F_1, причому G_1F_1//$Тп_1$. У зв'язку з тим, що точка F є фронтальним слідом горизонталі, то через цю точку пройде слід $Г_{П2}$//$Тп_2$, а через $Г_X$ – слід $Г_{П1}$//$Тп_1$.

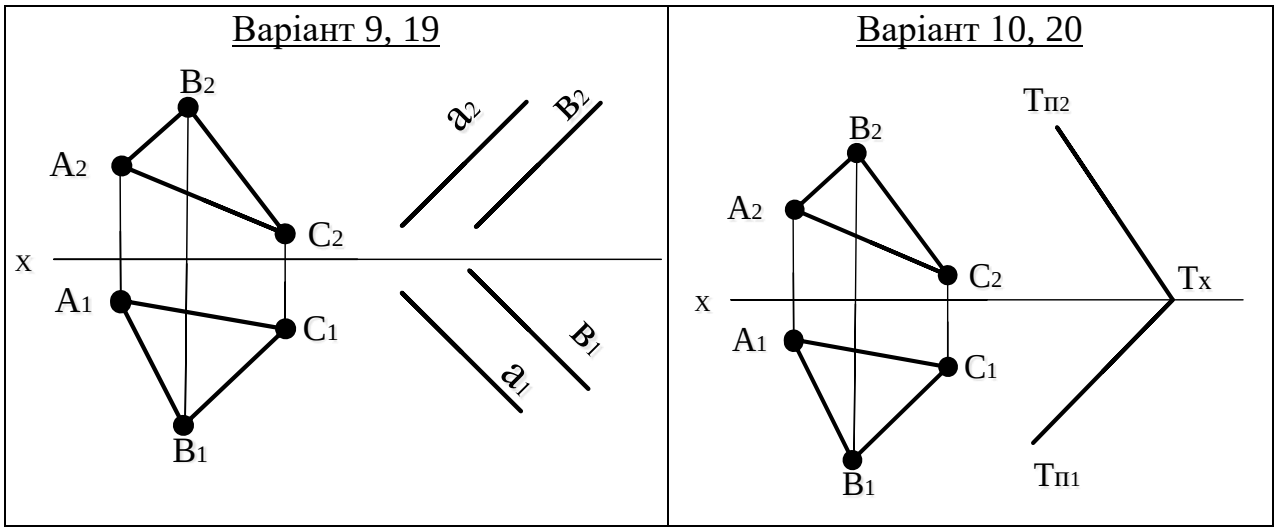
Рис. 3.28 – Паралельність площин

Площини Т та Г взаємно паралельні, оскільки їх однойменні пересічні сліди паралельні.

Задачі для самостійного розв'язування

Через точку D провести пряму, паралельну заданій площині	
Варіант 1, 11	Варіант 2, 12
	

Варіант 3, 13  	Варіант 4, 14 
Через точку А побудувати площину, паралельну заданій	
Варіант 5, 15  	Варіант 6, 16 
Визначити, чи є паралельними пряма «m» та площина	
Варіант 7, 17  	Варіант 8, 18 
Визначити, чи будуть площини паралельними	



3.5 Перпендикулярність прямої та площини. Перпендикулярність двох площин

Якщо пряма перпендикулярна до площини в просторі, то на комплексному кресленні горизонтальна проекція прямої перпендикулярна горизонтальній проекції горизонталі, а фронтальна проекція – перпендикулярна фронтальній проекції фронталі, що належать до цієї площини.

Приклад 29

Через точку В провести пряму, перпендикулярну площині ΔАВС (рис. 3.29).

Розв'язування:

Виходячи з умови перпендикулярності прямої до площини, проводимо в площині фронталь та горизонталь. Фронтальна проекція n_2 прямої побудована перпендикулярно до фронтальної проекції $D_2 2_2$

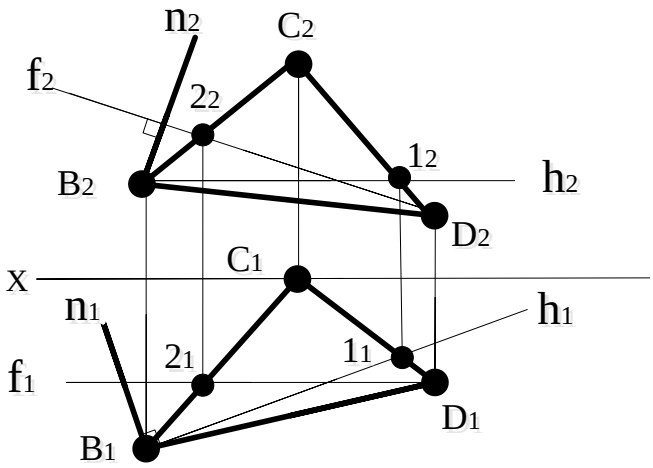


Рис. 3.29 – Пряма перпендикулярна площині

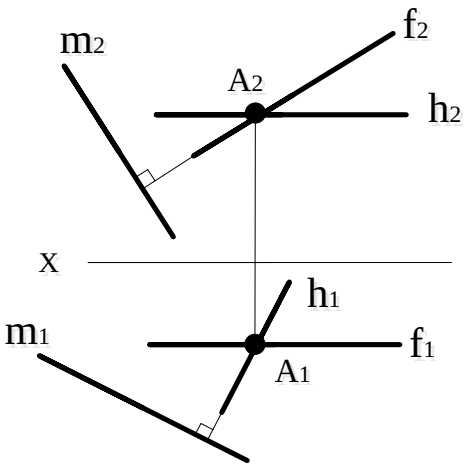
фронталі, а горизонтальна проекція n_1 – перпендикулярно горизонтальній проекції $B_1 1_1$ горизонталі трикутника.

Приклад 30

Через точку А провести площину, перпендикулярну даній прямій (рис. 3.30).

Розв'язування:

Шукана площина визначена її фронталлю f та горизонталлю h. Ці прямі перпендикулярні до прямої m або $f_2 \perp m_2$, $h_1 \perp m_1$. Отже, визначена площина перпендикулярна до прямої m.



З цього випливає, що площини взаємно перпендикулярні, якщо пряма, що належить одній площині, перпендикулярна до іншої площини.

Рис. 3.30 – Пряма, перпендикулярна до площини

Приклад 31

Через пряму MN провести площину, перпендикулярну заданій Т (ΔABC) (рис. 3.31).

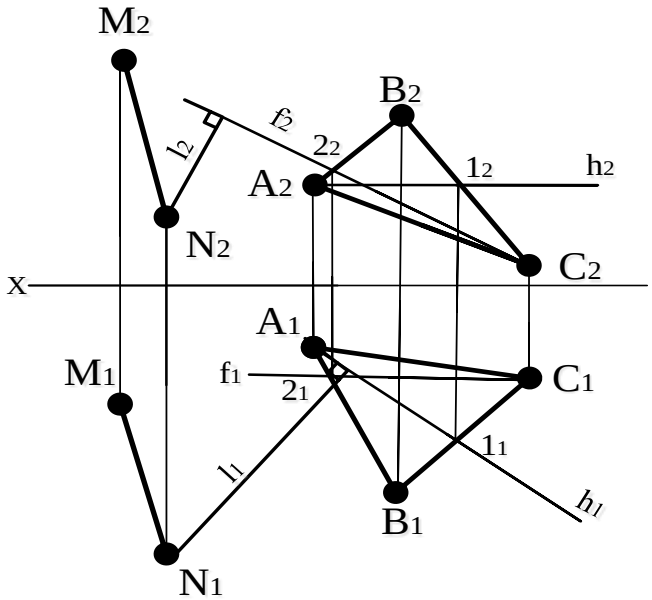


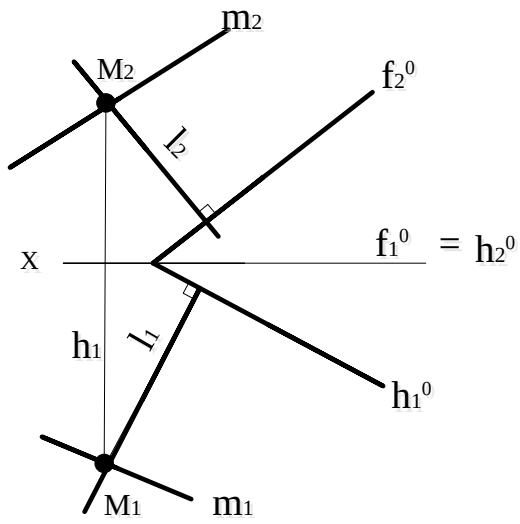
Рис. 3.31 – Перпендикулярність площин

Розв'язування:

Шукана площина повинна проходити через пряму MN, тому вона визначається прямою MN та перпендикуляром до площини трикутника. Для проведення цього перпендикуляра в площині ABC проведені фронталь f та горизонталь h. Через точку N проводимо пряму $l \perp ABC$ ($l_2 \perp f_2$, $l_1 \perp h_1$). Утворена двома прямими $MN \cap l$ площина є перпендикулярною до заданої площини ABC.

Приклад 32

Через точку M провести площину Θ, яка перпендикулярна площині Σ (рис. 3.32).

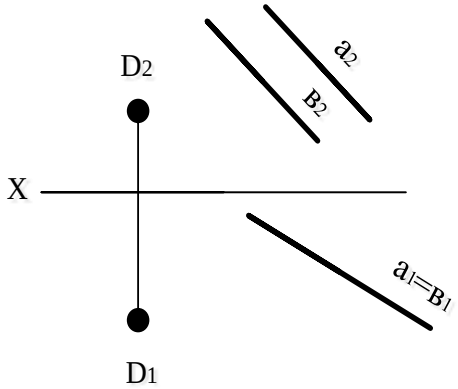
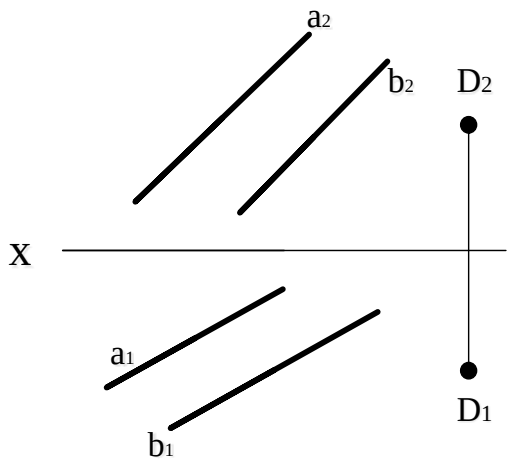


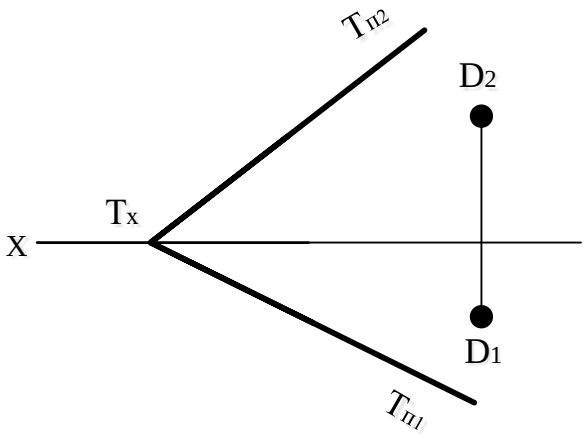
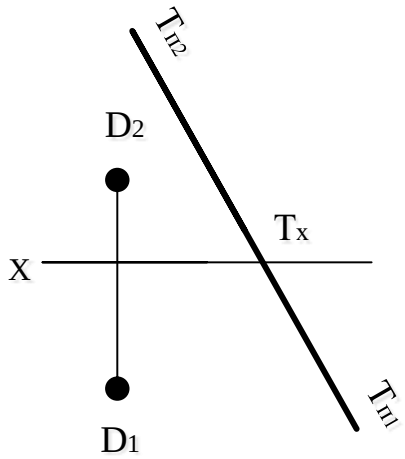
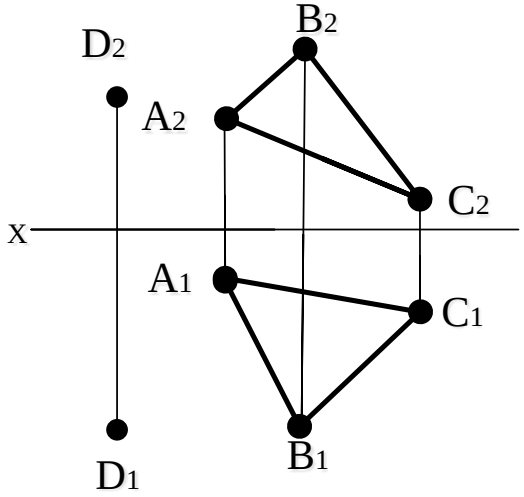
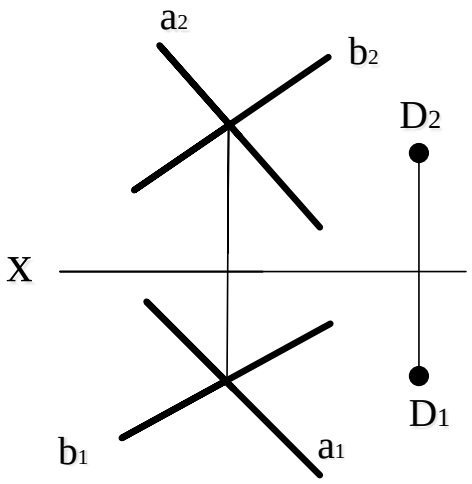
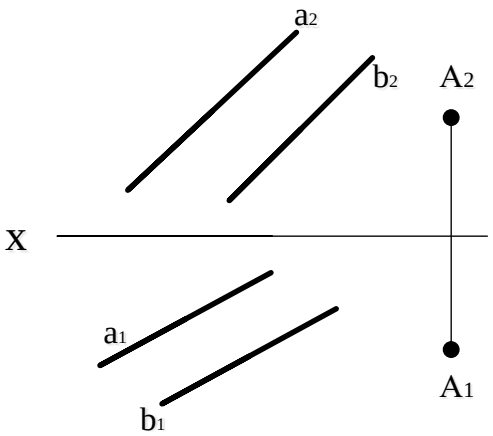
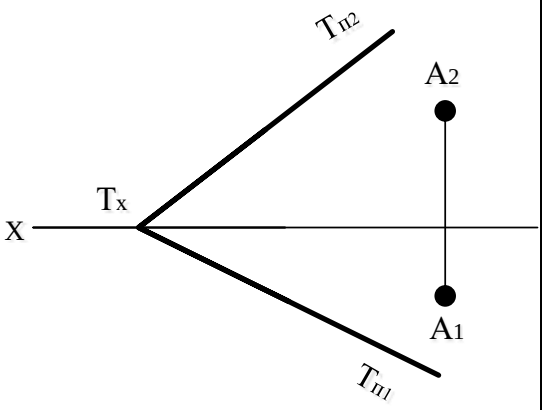
Розв'язування:

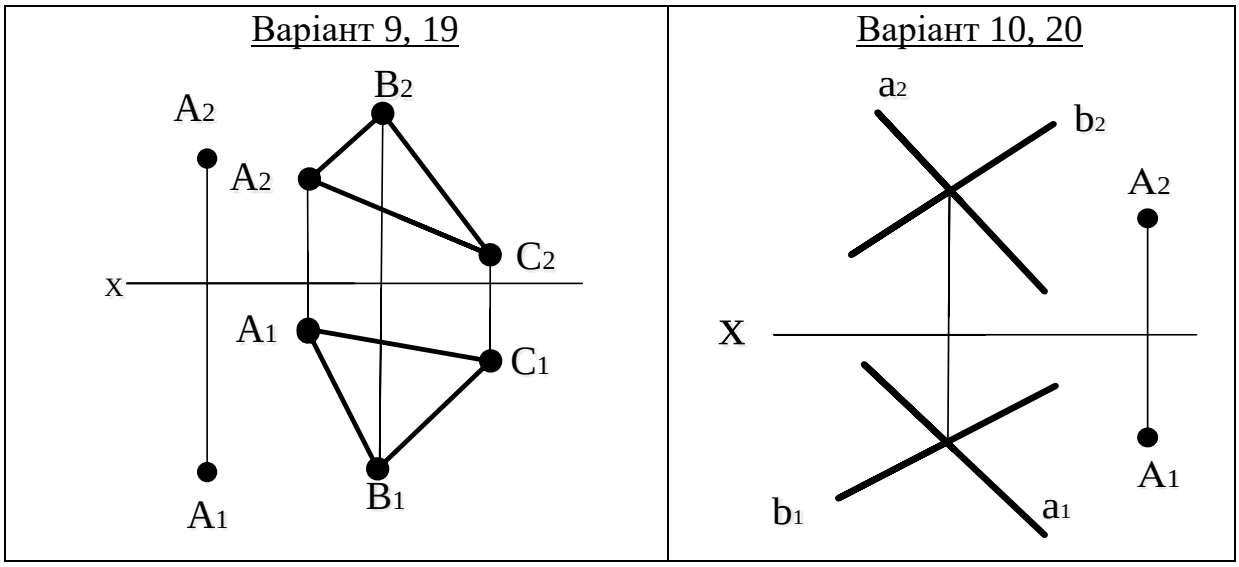
Шукану площину Θ задамо прямими $\Theta(l \cap m)$, що перетинаються. Враховуючи умови перпендикулярності двох площин, маємо: $l_1 \perp h_1^0$; $l_2 \perp f_2^0$. Пряму m (m_1; m_2) проводимо довільно через точку M.

Рис. 3.32 – Перпендикулярність площин

Задачі для самостійного розв'язування

Через точку D провести пряму, перпендикулярну заданій площині	
Варіант 1, 11	Варіант 2, 12
	

<table>
<tr><td>Варіант 3, 13
 
</td><td>Варіант 4, 14
 
</td></tr>
<tr><td>Варіант 5, 15
 
</td><td>Варіант 6, 16
 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Через точку А побудувати площину, перпендикулярну заданій</td></tr>
<tr><td>Варіант 7, 17
 
</td><td>Варіант 8, 18
 
</td></tr>
</table>

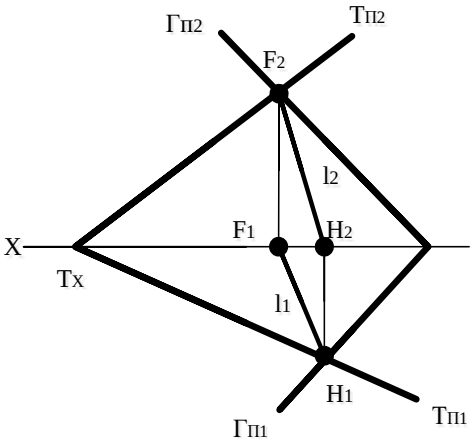


3.6 Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії. Пряма лінія в просторі визначена, якщо відомі одна точка цієї прямої та її напрям або ж дві точки цієї прямої. Отже, щоб знайти лінію перетину двох площин, необхідно знайти дві точки, що одночасно належать обом площинам.

Приклад 33

Знайти лінію перетину площин Т та Г (рис. 3.33).



Розв'язування:

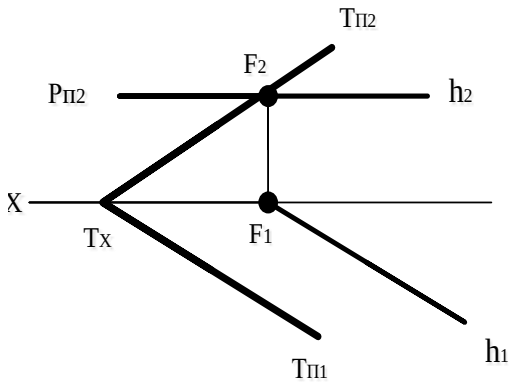
У поодиноких випадках точками прямої можуть служити сліди цієї прямої. Сліди лінії перетину двох площин знаходяться на перетині однойменних слідів цієї площини, а саме: горизонтальний слід прямої перетину знаходиться на перетині горизонтальних слідів площин; фронтальний слід прямої перетину знаходиться на перетині фронтальних слідів площин.

Рис. 3.33 – Лінія перетину площин

У задачі в цьому випадку розв'язування спрощується. Отже, точки перетину F і H однойменних слідів площин Т і Г визначають положення лінії перетину l.

Приклад 34

Знайти лінію перетину площин Т і Р (рис. 3.34).



Розв'язування:

Площини Т і Р перетинаються по прямій – горизонталі, яка проходить через (F_1; F_2), що знаходиться на перетині вертикальних слідів площин.

Рис. 3.34 – Лінія перетину площин

Проводимо проекції шуканої лінії перетину: фронтальна проекція паралельна осі проекцій і зливається зі збірним слідом $Рп_2$, а горизонтальну проекцію проводять через F_1 паралельно горизонтальному сліду площини Т.

Приклад 35

Знайти лінію перетину площин Т і Г (рис. 3.35).

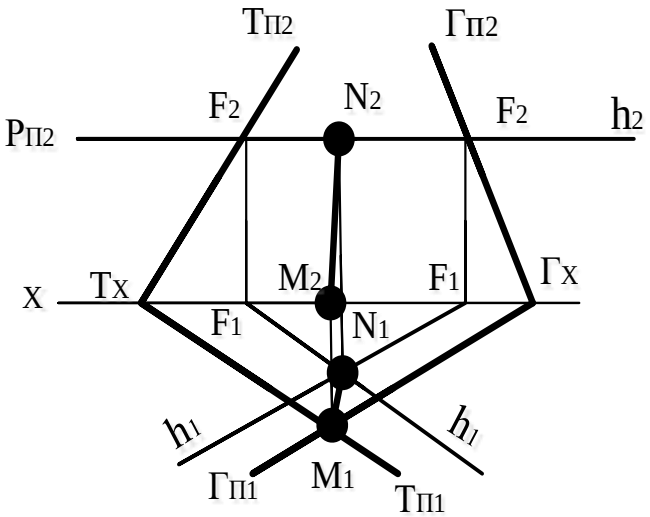


Рис. 3.35 – Лінія перетину площин

Розв'язування:

Одна з точок лінії перетину площин відома з графічної умови задачі (на перетині горизонтальних слідів площин). Для знаходження другої точки лінії перетину вводимо допоміжну горизонтальну січну площину Р ($Рп_2$ // $П_1$). Ця площина перетинає визначені площини Т і Г по горизонталі h_1 і h_1'. На їх перетині отримуємо горизонтальну проекцію N_1 точки, що є

загальною для даних площин. Отже, дані площини перетинаються по прямій MN.

Приклад 36

Знайти лінію перетину площин Т і Г (рис. 3.36).

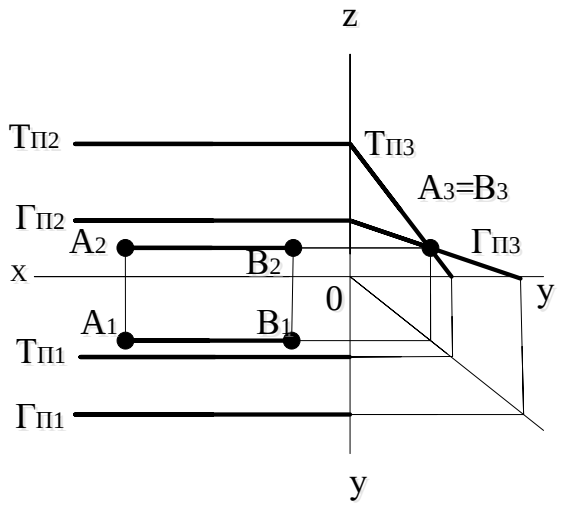


Рис. 3.36 – Лінія перетину площин

Розв'язування:

Площини Т і Г є профільно-проекціюючими. Тому перетинаються по прямій АМ, паралельній осі проекцій. Знаходимо її профільну проекцію $A_3 \equiv B_3$ на перетині профільних слідів площин, а потім за профільною проекцією прямої визначаємо її горизонтальну A_1B_1 та фронтальну A_2B_2 проекції, які є паралельними осі проекцій.

Приклад 37

Знайти лінію перетину площин Т та Θ (ΔАВС) (рис. 3.37).

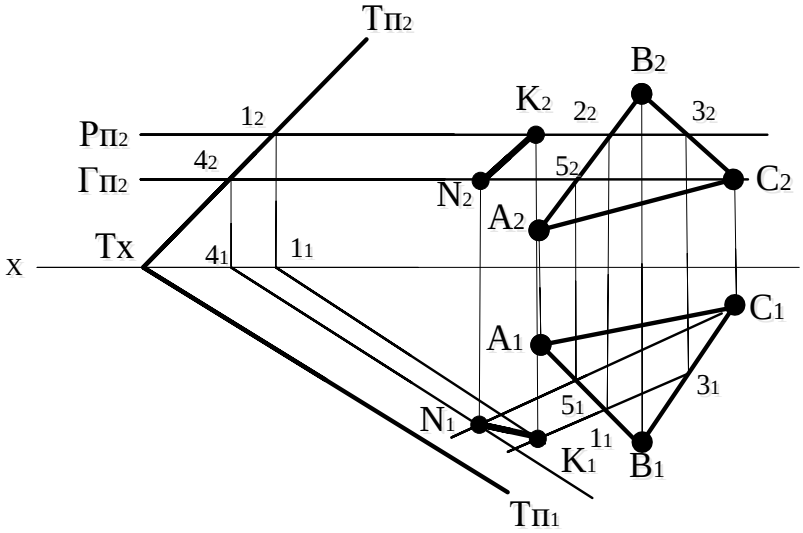
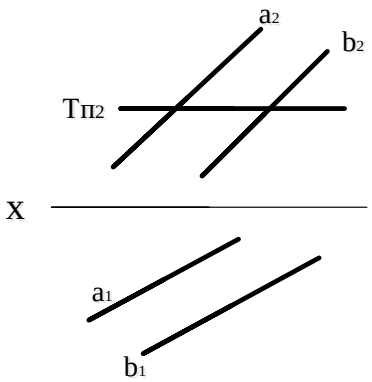
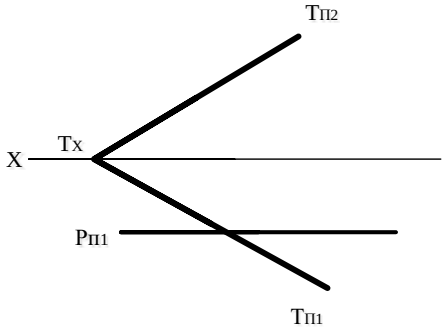
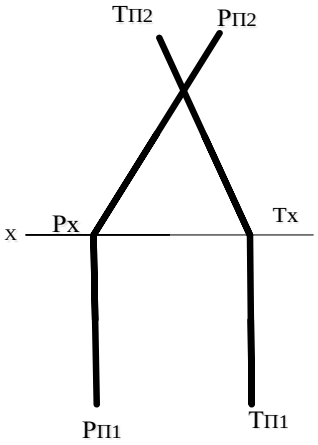
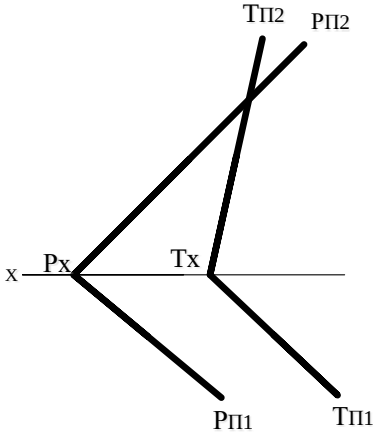
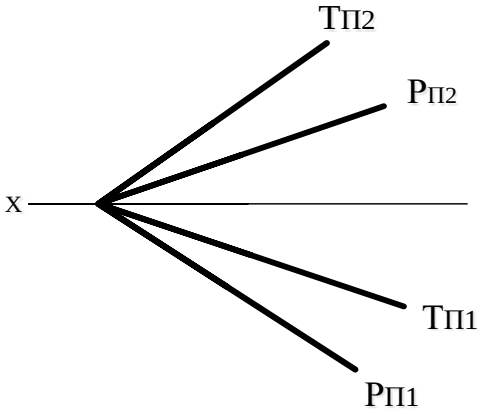
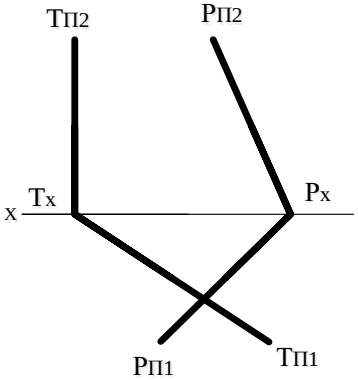


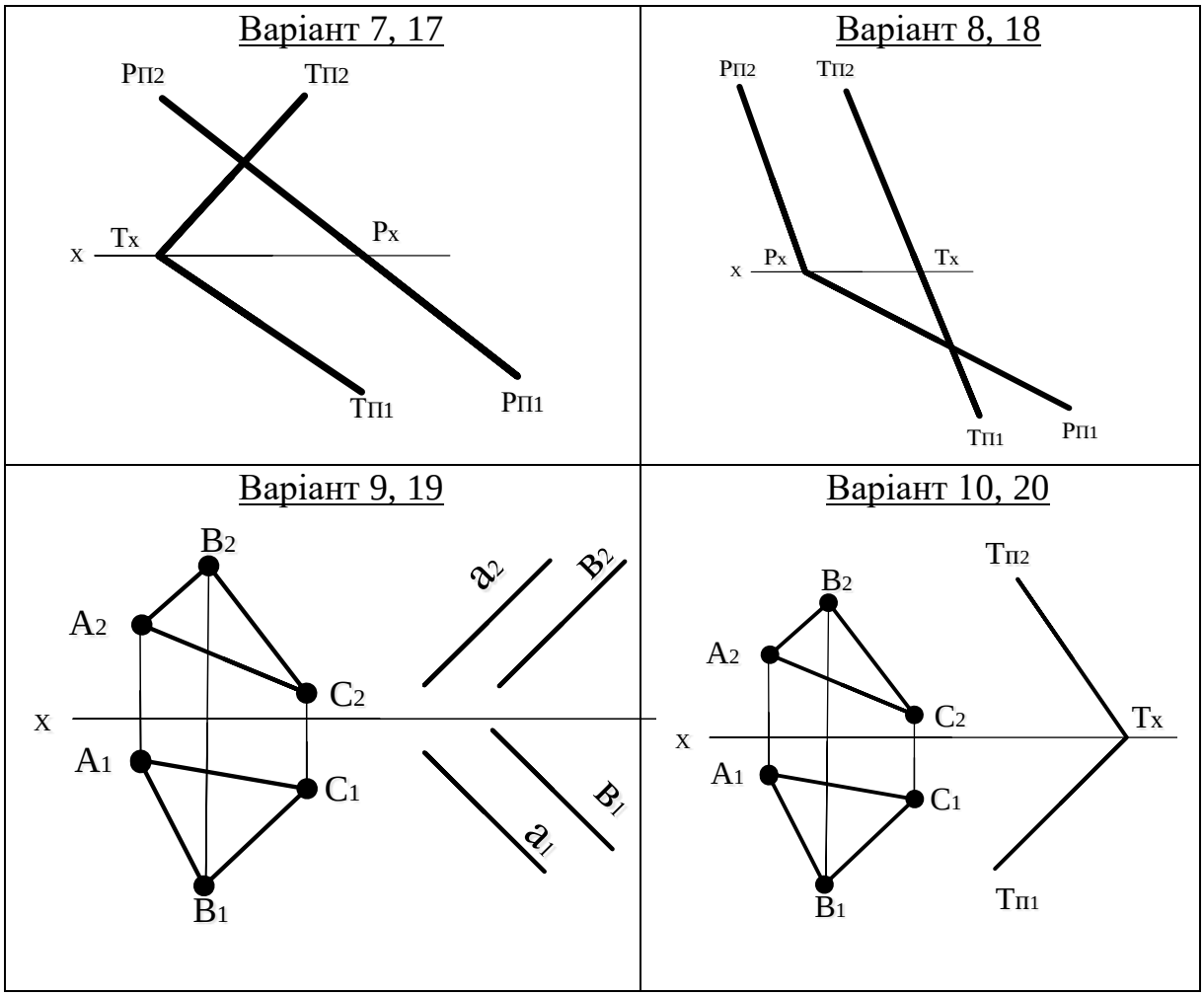
Рис. 3.37 – Лінія перетину площин

Розв'язування:

Уведемо горизонтальну площину-посередник Р. Її фронтальний слід Рп2//х. Знайдемо її лінії перетину з площинами Т і Θ та визначимо точку К, яка належить лінії перетину площин. Аналогічно за допомогою другої горизонтальної площини-посередника Г знайдемо другу точку N, яка належить лінії перетину площин. З'єднавши отримані одноіменні проекції точок К і N прямої, отримаємо лінію перетину площин Т і Θ.

Задачі для самостійного розв'язування

Побудувати лінію перетину заданих площин	
Варіант 1, 11  	Варіант 2, 12 
Варіант 3, 13  	Варіант 4, 14 
Варіант 5, 15  	Варіант 6, 16 



3.7 Перетин прямої з площиною

Для того, щоб знайти точку перетину прямої з площиною, необхідно:

1. Задану пряму заключити в проекціюючу площину.
2. Знайти лінію перетину площин – заданої та допоміжної.
3. На перетині прямих (заданої та отриманої) позначаємо шукану точку.

Приклад 38

Знайти точку перетину прямої АВ з площиною Р (рис. 3.38).

Розв'язування:

Включаємо пряму АВ у горизонтально-проекціюючу площину, яка перетинає задану площину по прямій l. На перетині фронтальної проекції l_2 і прямої A_2B_2 отримуємо фронтальну проекцію K_2 точки, знаходимо її горизонтальну проекцію K_1 на горизонтальній проекції A_1B_1 прямої і позначаємо видимість цієї прямої.

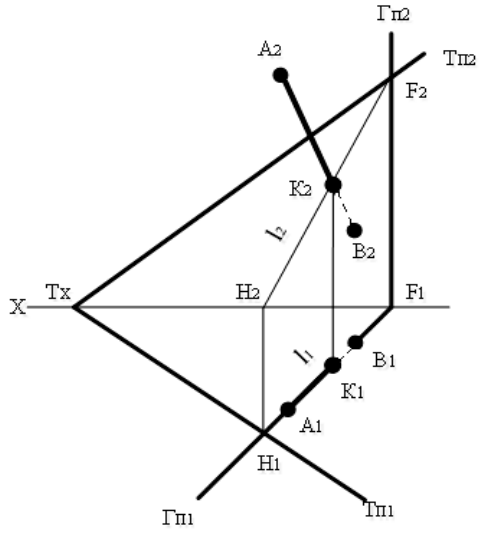


Рис. 3.38 – Точка перетину прямої з площиною

Занотуємо алгоритм побудови:
1. AB$\subset$Г$\perp$П1
2. Г$\cap$T=(FH)
3. (FH)$\cap$(AB)=K

Приклад 39

Знайти точку перетину прямої j з площиною P (рис. 3.39).

Розв'язування:

Заключаємо пряму j у фронтально-проекціюючу площину, яка перетинає задану площину по прямій l. На перетині горизонтальних проекцій цих прямих (l_1 і j) отримуємо горизонтальну проекцію K_1. Фронтальну проекцію K_2 знаходимо на збиральному сліді площини Г.

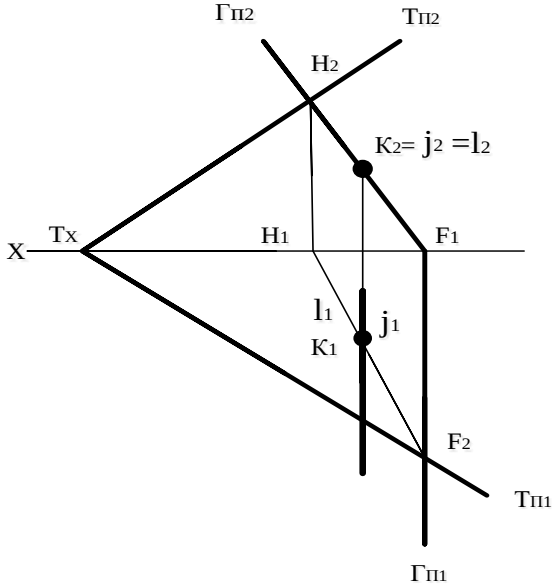


Рис. 3.39 – Точка перетину прямої з площиною

Приклад 40

Визначити точку перетину прямої l з площиною Θ (ΔABC). Визначити видимість прямої (рис. 3.40).

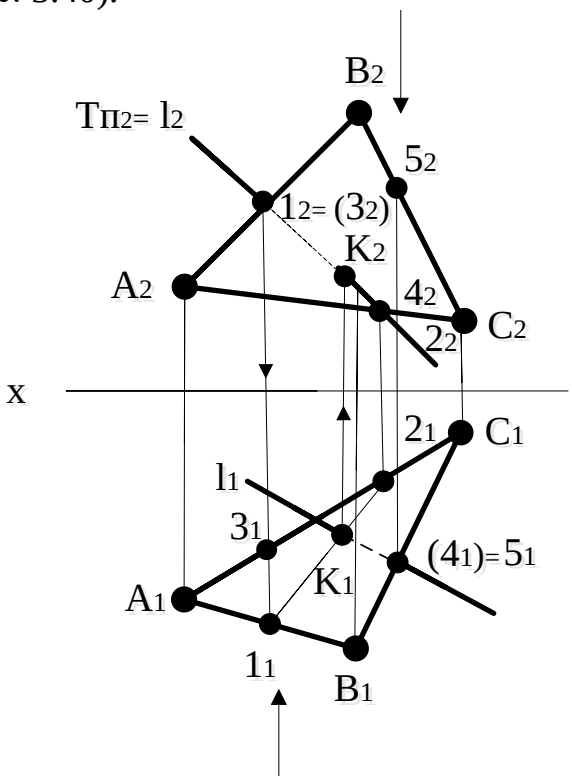


Рис. 3.40 – Точка перетину прямої з площиною

Розв'язування:

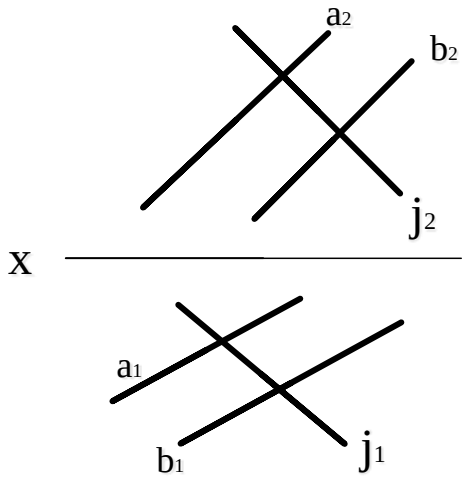
Через пряму l проведемо фронтально-проекціюючу площину Т. Знайдемо лінію перетину (1, 2) заданої площини Θ з проекціюючою площиною Т. Знайдемо горизонтальну проекцію точки перетину $(1_1 2_1) \cap l_1 = K_1$. Використовуючи збиральну властивість площини Т, знайдемо фронтальну проекцію K_2 точки К.

Визначимо видимість частин прямої. Для цього на горизонтальній площині проекцій візьмемо дві горизонтально конкуруючі точки 4_1 і 5_1. Нехай при цьому точка 4 належить прямій l, а 5 – відрізку ВС. Знайдемо їх фронтальні проекції 4_2 і 5_2. Оскільки 5_2 знаходиться вище, ніж 4_2, то на горизонтальній площині проекцій буде видимою горизонтальна проекція 5_1 точки 5 і проекція B_1C_1. Отже, пряма l на цій ділянці до точки K_1 буде невидимою. Тоді друга її частина, після точки K_1, буде видимою. Аналогічно визначаємо видимість на фронтальній площині проекцій, для цього використовуємо фронтально конкуруючі точки 1_2 і 3_2.

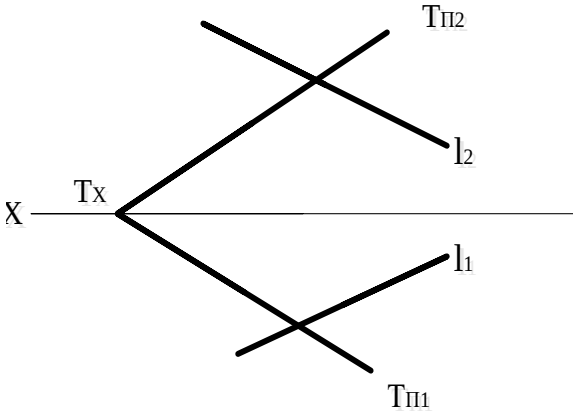
Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати точку перетину прямої з площиною

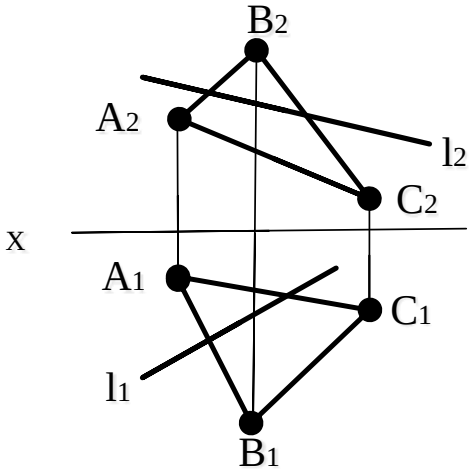
Варіант 1, 9



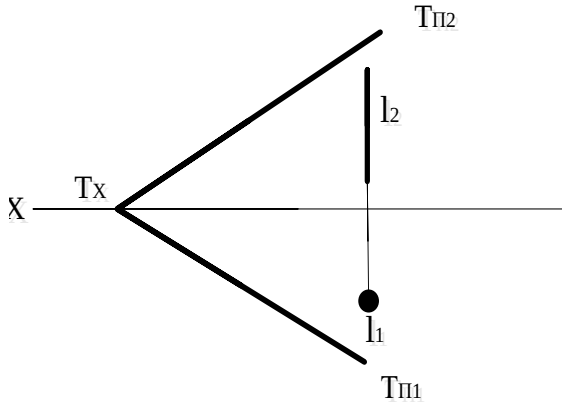
Варіант 2, 10



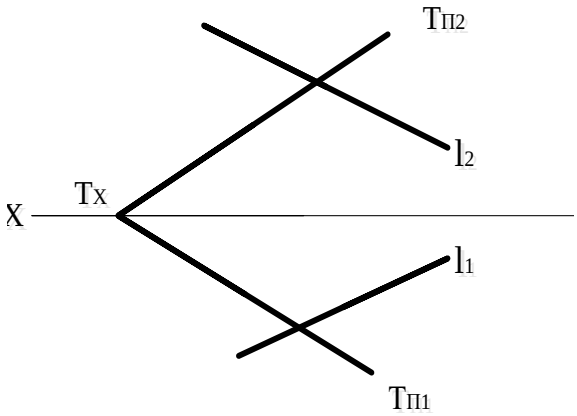
Варіант 3, 11



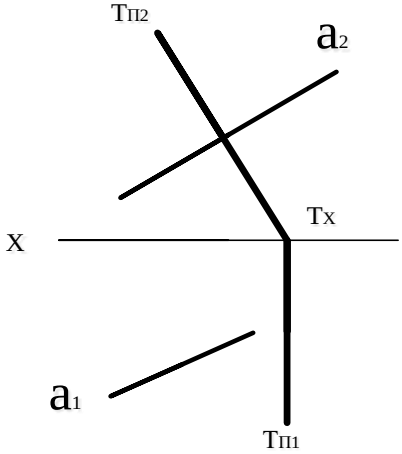
Варіант 4, 12

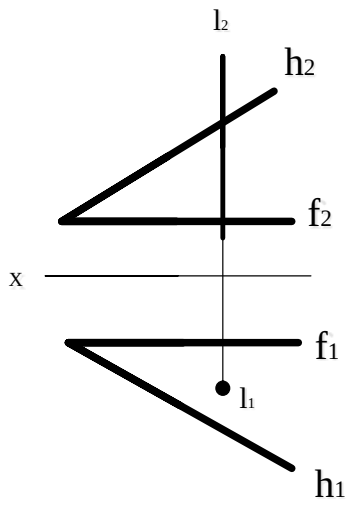
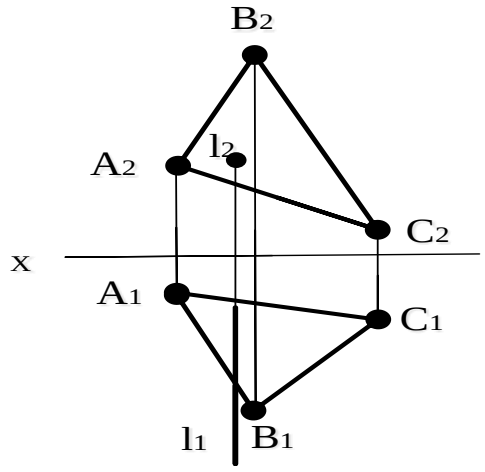


Варіант 5, 13



Варіант 6, 14



Варіант 7, 15	Варіант 8, 16
	

Контрольні запитання

1. Як задається площина на комплексному кресленні?
2. Що таке слід площини?
3. Де розташовується фронтальна проекція горизонтального сліду площини?
4. Які площини називаються площинами рівня? Які властивості цих площин?
5. Які площини називаються проекціюючими? Які властивості цих площин?
6. Назвіть умови належності прямої площині?
7. Які прямі називаються горизонталями площини? Фронталями?
8. Що таке лінія найбільшого нахилу площини?
9. Яке взаємне положення можуть займати пряма і площина? Дві площини?
10. Яка умова паралельності прямої і площини? Двох площин?
11. Яка умова перпендикулярності прямої і площини? Двох площин?
12. Як будується точка перетину прямої лінії з площиною?

4. СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

Розв’язування багатьох задач суттєво спрощується, якщо зображення предмета на площині вироджується або його проекції займають окреме положення відносно площин проекцій. Існують способи, які дозволяють так перетворити креслення, щоб предмет зайняв окреме положення відносно площин проекцій. Такі способи отримали назву «Способи перетворення креслення».

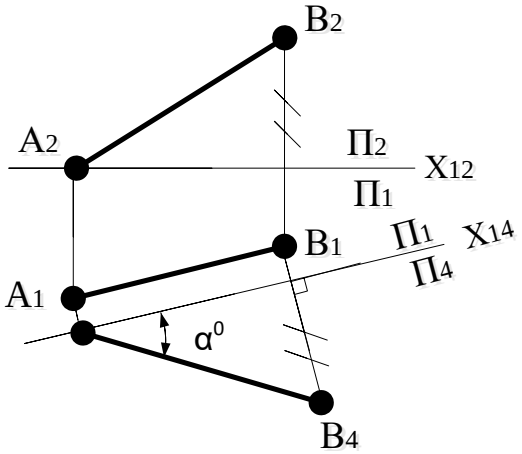
4.1 Спосіб заміни площин проекцій

Суть способу заміни площин проекцій полягає в тому, що замість однієї із площин проекцій, наприклад $П_2$, вводиться вертикальна площина, розміщена відносно незмінного об’єкта за наперед заданими умовами. Число замін площин проекцій від того або іншого розміщення об’єктів проекціювання буває різним: одна, дві і більше. Але при всіх замінах

площин проекцій об’єкт проекціювання зберігається в незмінному положенні. Вибираючи положення нової площини проекцій, слід керуватися тим, щоб по відношенню до нової площини проекцій об’єкт проекціювання займав особливе (окреме) положення, яке забезпечує одержання проекцій, найбільш зручних для розв’язання поставленої задачі. Якщо заміна однієї площини проекцій не забезпечує потрібного вигляду допоміжної проекції, то виконують подальшу заміну.

Приклад 41

Перетворити пряму загального положення в пряму рівня (рис. 4.1).



Розв’язування:

Для розв’язування задачі необхідно виконати одну заміну площин проекцій. Замінити, наприклад, площину проекцій $П_2$ новою вертикальною площиною проекцій $П_4$, паралельною прямій AB і, значить, перпендикулярною до незмінної ($П_1$) площини проекцій.

Рис. 4.1 – Перетворення прямої AB у пряму рівня

Розглянемо етапи побудови, які необхідні для перетворення прямої AB загального положення в пряму рівня:

1. Проведемо нову вісь проекцій x_{14} паралельно A_1B_1 на довільній відстані від неї.

2. Побудуємо проекції точок A і B на площині $П_4$. Відрізок A_4B_4 є проекцією прямої AB на площині $П_4$. Пряма AB у новій системі площин проекцій $П_1/П_4$ є фронталлю. Відрізок [AB] прямої проеціюється на площину $П_4$ в натуральну величину, а саме $| A_4B_4 | = | AB |$, а кут α^0 – величина кута нахилу прямої AB до площини $П_1$.

Приклад 42

Визначити натуральну величину Δ ABC (рис. 4.2).

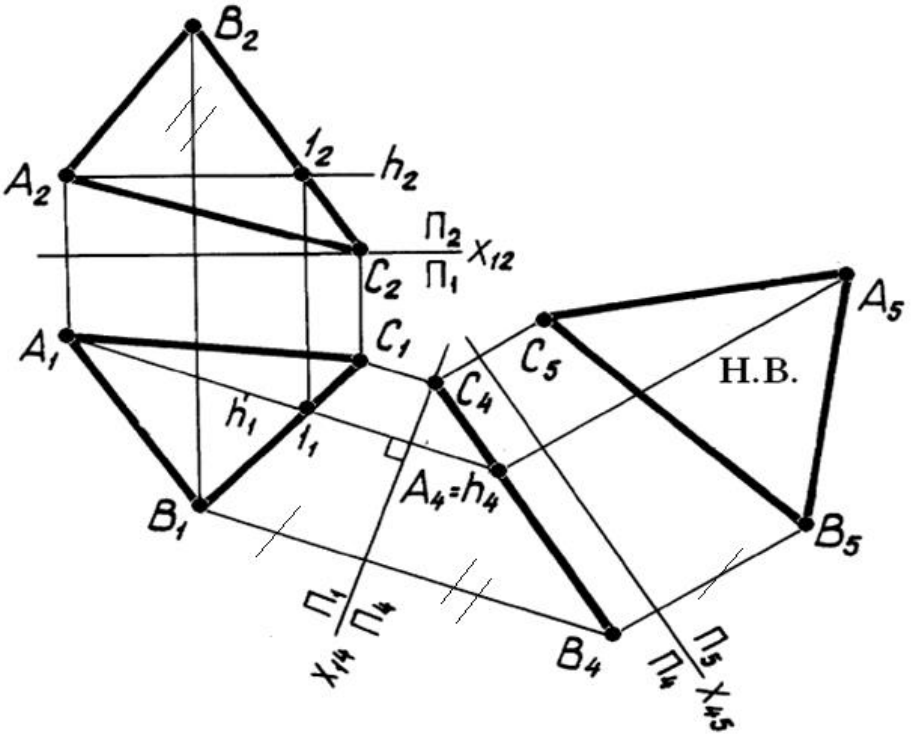


Рис. 4.2 – Визначення натуральної величини ΔABC

Розв'язування:

У процесі розв'язування задачі на знаходження дійсної величини ΔABC необхідно виконати подвійну заміну площин проекцій, бо ΔABC займає загальне положення.

Розглянемо етапи побудови:

1. Проводимо горизонталь h площини ΔABC.

2. Вводимо $П_4 \perp h$; $П_4 \perp П_1$, $П_4 \cap П_1 = X_{14}$; $X_{14} \perp h_1$.

У системі $П_1/П_4$ горизонталь стане проекцюючою прямою, а площина ΔABC – проекціюючою площиною. Оскільки площина $П_1$ залишається незмінною, то висотні координати вершин трикутника в новій системі залишаться незмінними.

3. Вводимо $П_5$ // Δ ABC у системі площин $П_1/П_4$; $П_5 \perp П_4$, $П_5 \cap П_4 = X_{45}$; X_{45} // $A_4B_4C_4$. У системі $П_4/П_5$ Δ $A_5B_5C_5$ – натуральна величина Δ ABC.

Приклад 43

Визначити відстань між паралельними прямими l і m (рис. 4.3).

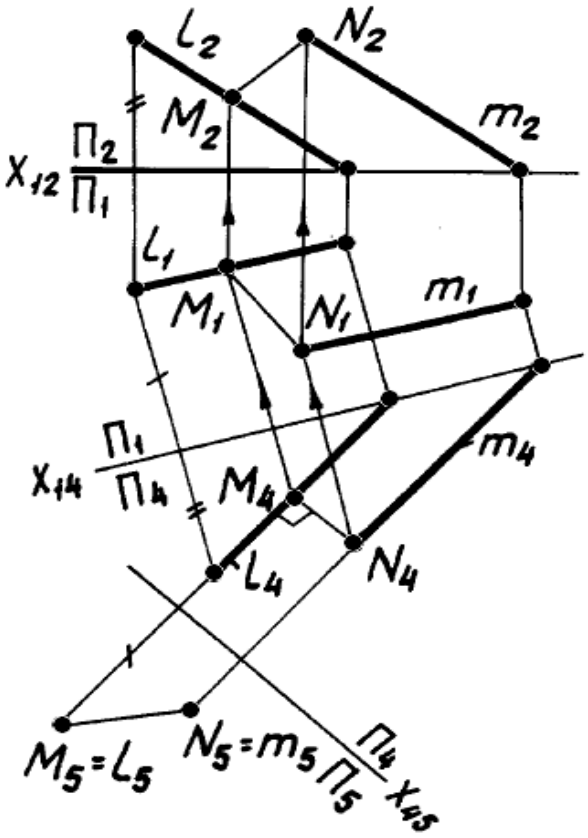


Рис. 4.3 – Визначення відстані між паралельними прямими

Розв'язування:

Відстань між двома паралельними прямими l і m визначається довжиною відрізка, перпендикулярного до них. Для знаходження відстані необхідно перевести прямі l і m із загального положення в окреме. Для цього необхідно виконати дві послідовні заміни площин проекцій: спочатку прямі перетворити в лінії рівня, а потім лінії рівня перетворити в проекціюючі прямі.

Розглянемо етапи побудови, які необхідні для знаходження відстані між паралельними прямими l і m:

1. Проведемо нову вісь проекцій x_{14} паралельно l_1 і m_1 на довільній відстані від (m_1).

2. Побудуємо проекції точок l і m на площині Π_4. Прямі l_4 і m_4 є проекцією прямих l і m на площину Π_4. Пряма l у новій системі площин проекцій Π_1/Π_4 є фронталлю, отже, і пряма m також фронталь.

4. Проведемо нову вісь проекцій x_{45} перпендикулярно l_4 і m_4, змінивши площину Π_1 на нову Π_5 на довільній відстані від $l_4//m_4$.

5. Оскільки відстань точок прямих l і m до площини Π_4 однакова, то проекції їх на площині Π_5 спроекціюються в точки l_5 і m_5, отже прямі l і m

(l_5 і m_5) у новій системі площин проекцій зайняли проекціююче положення. Відстань між проекціями M_5 і N_5 точок M і N у системі $П_4/П_5$ є шуканою відстанню між паралельними прямими l і m.

6. На кресленні показано знаходження проекцій відстані між паралельними прямими l і m. Для цього необхідно зробити зворотні перетворення й побудувати проекції M_4N_4, M_1N_1, M_2N_2 відрізка MN.

4.2 Метод паралельного переміщення

Плоско-паралельним переміщенням фігури у просторі називається таке переміщення, при якому всі точки фігури переміщуються в площинах, паралельних між собою і паралельних до однієї із площин проекцій.

Приклад 44

Перетворити пряму загального положення в проекціюючу пряму (рис. 4.4).

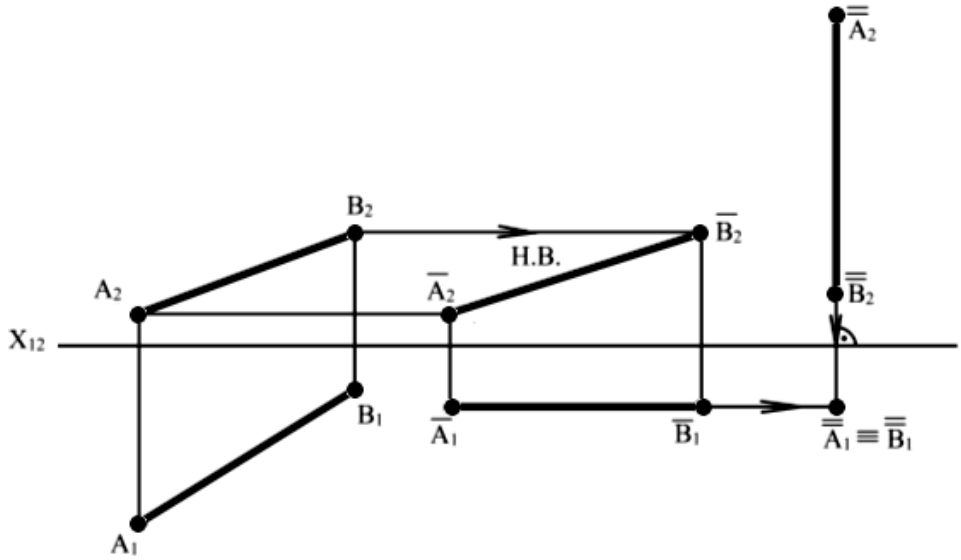


Рис. 4.4 – Перетворення прямої AB у проекціюючу пряму

Розв'язування:

Для виконання даного завдання необхідно виконати два перетворення: спочатку пряму перевести в лінію рівня, а потім лінію рівня перетворити у проекціюючу пряму.

Розглянемо етапи побудови, які необхідні для перетворення прямої AB загального положення в горизонтально-проекціюючу пряму:

1. Перетворюємо комплексне креслення так, щоб відрізок AB став паралельним $П_2$ $|\overline{A}_1\ \overline{B}_1| = |A_1B_1|$, $\overline{A}_1\ \overline{B}_1 \parallel X_{12}$.

2. Переводимо відрізок AB таким чином, щоб він став перпендикулярним площині $П_1$ $|\overline{A}_2\ \overline{B}_2| = |\overline{A}_2\ \overline{B}_2|$, $A_2B_2 \perp X_{12}$.

Слід зауважити, що для визначення натуральної величину ΔABC необхідно виконати два перетворення: перетворити площину загального

положення в проекціюючу; перевести проекціюючу площину в площину рівня.

Розглянемо етапи побудови, необхідні для визначення натуральної величини ΔABC:

1. У площині трикутника проводимо лінію рівня – h. Розміщуємо натуральну величину лінії рівня перпендикулярно до осі проекцій X_{12}. При цьому лінія рівня стане проекціюючою прямою і на другу площину проекцій спроекціюється в точку. Горизонтальна проекція трикутника в новому положенні змінить тільки свою орієнтацію. Площина при цьому стане фронтально проекціюючою.

2. Проекціюючу площину, яка являє собою пряму лінію, розташовуємо паралельно осі X_{12}. Інша проекція буде являти собою натуральну величину ΔABC.

4.3 Спосіб обертання навколо проекціюючої прямої

У процесі обертанні навколо горизонтально-проекціюючої осі фронтальні проекції точок фігури переміщуються по прямих, паралельних осі x (перпендикулярних до ліній зв'язку), а горизонтальні – по дугах кіл.

При обертанні навколо фронтально-проекціюючої прямої горизонтальні проекції точок переміщуються по прямих, перпендикулярних до ліній зв'язку, а фронтальні – по дугах кіл.

Приклад 45

Повернути точку А навколо горизонтально-проекціюючої прямої *i* до її перетину з площиною Σ (рис. 4.5).

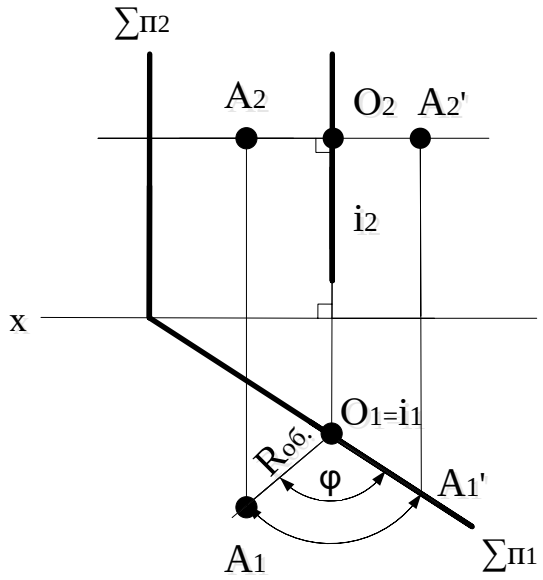


Рис. 4.5 – Обертання точки А навколо горизонтально-проекціюючої прямої

Розв'язування:

Розглянемо етапи побудови, необхідні для обертання точки А навколо горизонтально-проекціюючої прямої:

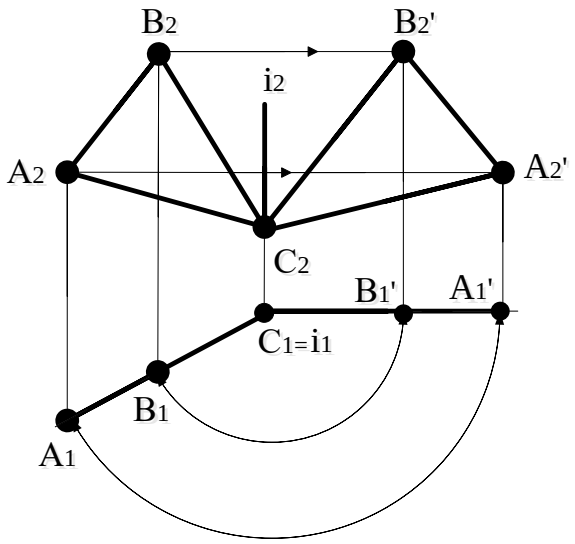
1. У площині проведемо вісь обертання «і» – пряму, навколо якої буде обертатися точка А. Вісь обертання «і» перпендикулярна до площини проекцій $П_1$.

2. Отримаємо центр обертання – точку О.

3. Радіус обертання $R_{об.}$ = $[A_1O_1]$ – відстань точки від центра обертання. Радіусом обертання повернемо точку А навколо горизонтально-проекціюючої прямої до її перетину з площиною Σ.

Приклад 46

Визначити натуральну величину трикутника АВС, який лежить у горизонтально-проекціюючій площині (рис. 4.6).



Розв'язування:

Обертаємо трикутник навколо осі «і», перпендикулярної до площини проекцій $П_1$, до положення, паралельного площині проекцій $П_2$. Щоб спростити побудову, вісь «і» проводимо через одну з вершин трикутника, наприклад, через вершину С.

Рис. 4.6 – Визначення натуральної величини ΔАВС

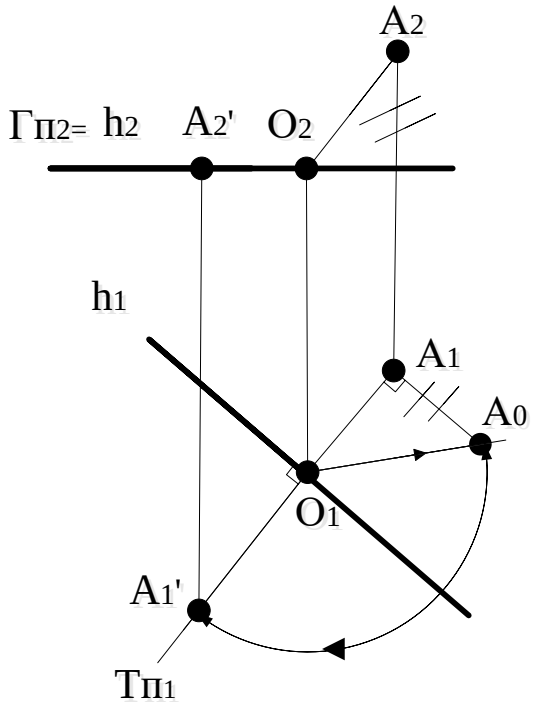
Після оберту горизонтальна проекція трикутника займе положення $C_1B_1'A_1'$, яке буде паралельним осі х. Фронтальні проекції траєкторії переміщення вершин трикутника паралельні осі х. Трикутник $C_2B_2'A_2'$ – натуральна величина трикутника АВС.

4.4 Обертання навколо лінії рівня (спосіб суміщення)

Обертання навколо горизонталі або фронталі застосовують для визначення дійсної величини плоскої фігури, яка переводиться в положення, паралельне відповідній площині проекцій. У такому положенні плоска фігура проекціюється на відповідну площину проекцій у натуральну величину.

Приклад 47

Обертанням навколо горизонталі точку А сумістити з горизонтальною площиною рівня Г (рис. 4.7).



Розв'язування:

При обертанні навколо h точка А описує дугу кола радіуса /АО/ у площині обертання Σ, яка буде перпендикулярною до осі обертання: Σ ⊥ h. Способом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину радіуса обертання точки А навколо h. У новому положенні точка А знаходиться з горизонталлю h в одній площині, яка паралельна $П_1$.

Рис. 4.7. Суміщення точки А з площиною Г

Друга проекція A_2' в цьому випадку буде збігатися з проекцією h_2.

Приклад 48

Визначити натуральну величину ΔАВС обертанням навколо горизонталі (рис. 4.8).

Розв'язування:

Розглянемо етапи побудови, необхідні для знаходження натуральної величини ΔАВС:

1. Через точку С проводимо горизонталь площини – h. Ці точки С і 1 при обертанні будуть нерухомими, оскільки вони знаходяться на осі обертання h. Обертатися будуть лише точки А і В. Вони переміщуються по колах у площинах обертання, перпендикулярних до осі обертання h.

2. Знаходимо центр обертання вершини «В» – точку О. $Гп_1 \cap h_1$ у точці O_1.

3. Для визначення положення точки після обертання знаходимо натуральну величину радіуса обертання точки В навколо горизонталі h і цим радіусом переводимо горизонтальну проекцію точки В у нове положення В'. Аналогічно знаходимо радіус обертання точки А і її нове положення A_1. Дійсна величина ΔАВС буде $A_1'B_1'C_1'$.

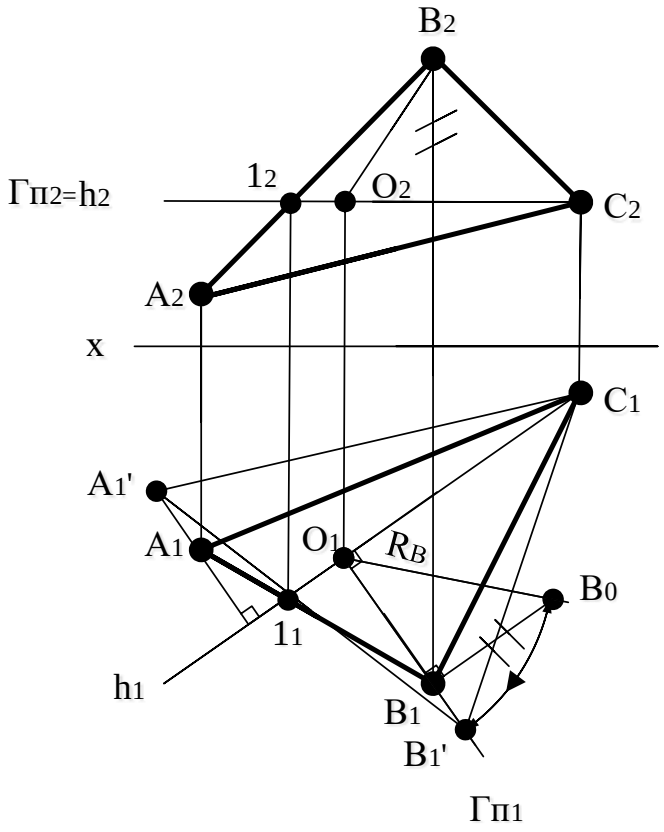
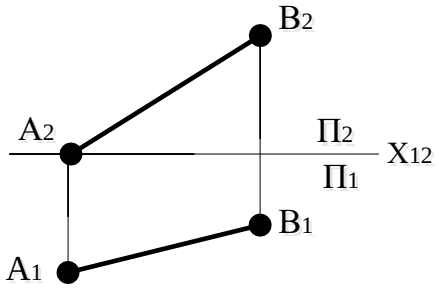
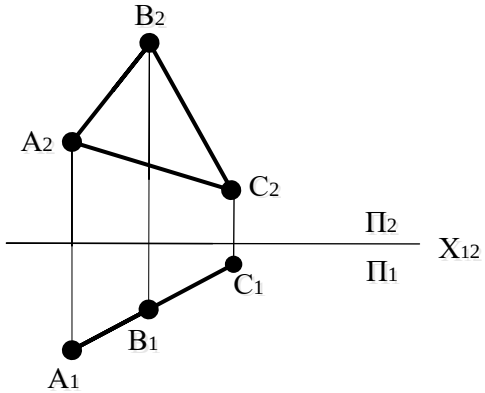


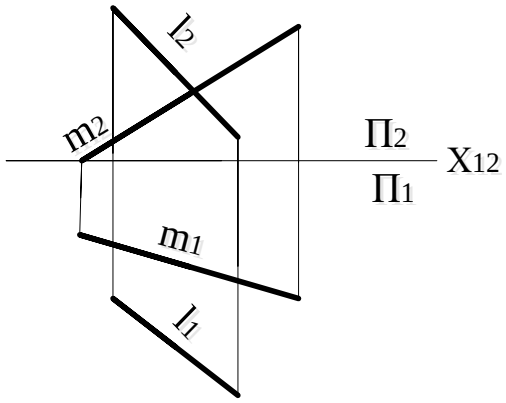
Рис. 4.8 – Визначення натуральної величини ΔABC

Задачі для самостійного розв’язування

Заміною площин проекцій розв’язати такі завдання	
Варіант 1, 9 Перевести пряму AB у положення, паралельне горизонтальній площині проекцій  	Варіант 2, 10 Знайти натуральну величину трикутника ABC 

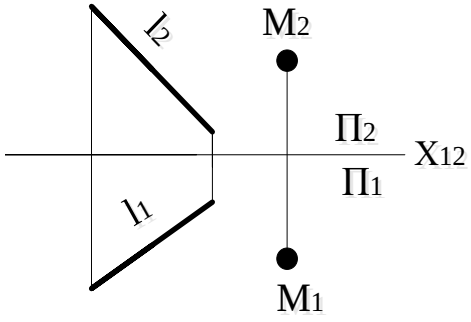
Варіант 3, 11

Визначити відстань між мимобіжними прямими l та m



Варіант 4, 12

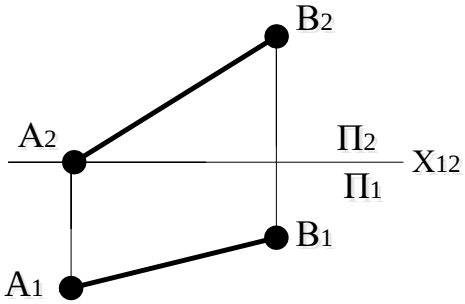
Визначити відстань від точки М до прямої загального положення



Методом паралельного переміщення розв'язати такі завдання

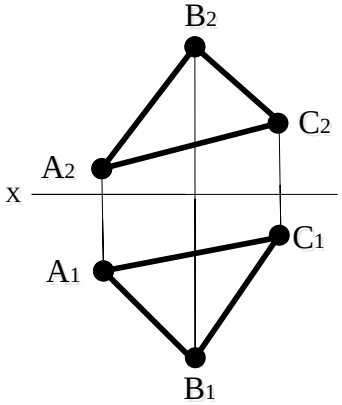
Варіант 5, 13

Перевести пряму АВ у положення, паралельне фронтальній площині проекцій



Варіант 6, 14

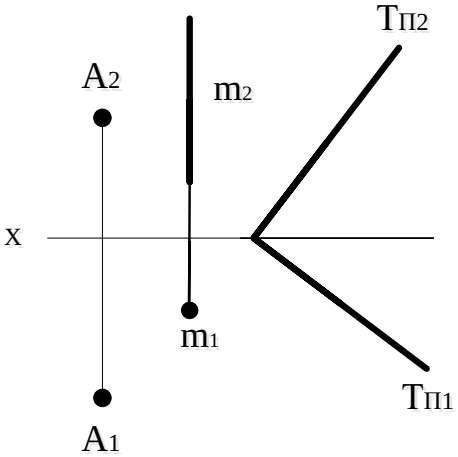
Площину ΔАВС перевести в горизонтально-проекціююче положення



Способом обертання навколо проекціюючої прямої розв'язати такі завдання

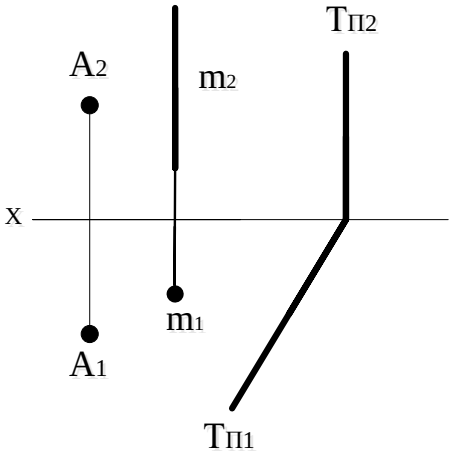
Варіант 7, 15

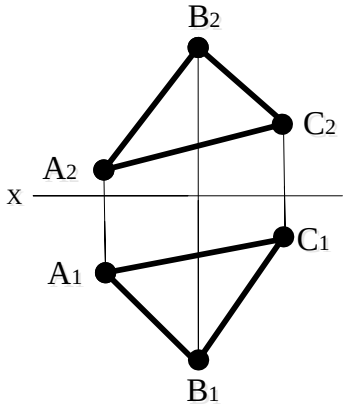
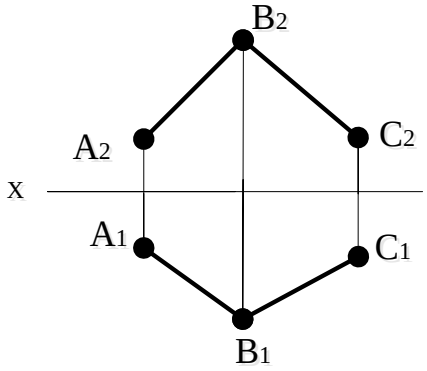
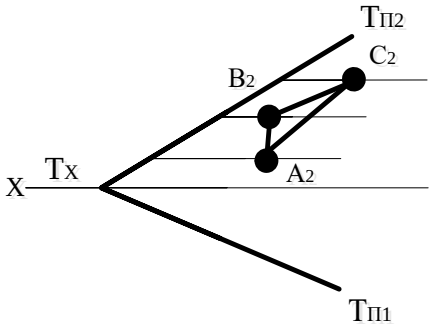
Повернути навколо осі «m» точку А до її введення у площину Т



Варіант 8, 16

Повернути навколо осі «m» точку А до її введення у площину Т



<table>
<tr><td colspan="2">Способом обертання навколо головних ліній розв’язати завдання</td></tr>
<tr><td>Варіант 1, 6
Визначити натуральну величину ΔABC
 
</td><td>Варіант 2, 7
Визначити кут між прямими, що перетинаються
 
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Варіант 3, 8
Суміщенням визначити дійсну величину ΔABC, який знаходиться у площині Σ</td></tr>
<tr><td colspan="2"> 
</td></tr>
</table>

Контрольні запитання

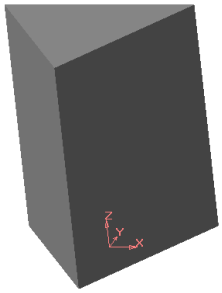
1. У чому поягає суть способу заміни площин проекцій?
2. Яке положення в системі $\frac{П_2}{П_1}$ займе площина $П_4$, яка вводиться для утворення системи $\frac{П_4}{П_1}$?
3. Скільки додаткових площин проекцій треба ввести в систему $\frac{П_2}{П_1}$, щоб визначити натуральну величину фігури, площина якої перпендикулярна до площини $П_1$ або до площини $П_2$?
4. У чому поягає суть методу плоско-паралельного переміщення?
5. Які основні елементи способу обертання?
6. У чому полягає суть способу обертання навколо осей, перпендикулярних до площин проекцій?
7. Як визначити способом обертання навколо проекціюючих осей натуральні величини відрізка прямої і трикутника?
8. Як знайти способом суміщення натуральну величину трикутника, який знаходиться у площині Σ?

5. ПОВЕРХНІ

Щоб накреслити складну технічну деталь, треба навчитися креслити прості геометричні фігури, з елементів яких складаються деталі.

5.1 Точка на поверхні

5.1.1 Точка на поверхні призми



Загальні положення. *Призма – це багатогранник, бокова поверхня якого обмежена рівними й паралельними між собою прямокутниками, а основою служать багатокутники, рис. 5.1.*

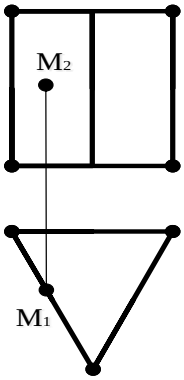
Рис. 5.1 – Тривимірна модель призми

Лінії перетину граней призми називаються ребрами. Розрізняють бокові ребра призми та ребра основи. Точки перетину ребер або точки, у яких збігаються грані, називають вершинами багатогранника. Призма називається прямою, якщо її бокові ребра перпендикулярні до основи, і похиленою, якщо ця умова не виконується. Бокові грані прямої призми – прямокутники, похиленої – паралелограми. Призми поділяються на правильні та неправильні. Правильною є призма, в основі якої лежить правильний багатокутник. За формою основ розрізняють призми трикутні, чотирикутні, шестикутні та інші. Якщо основою призми є прямокутник або паралелограм, то він називається паралелепіпедом.

Точка належить поверхні призми, якщо вона знаходиться на прямій, яка належить грані (основі) призми.

Приклад 49

Побудувати проекцію точки М, якої не вистачає, і котра належить поверхні призми (рис. 5.2).



Розв'язування:

На рис. 5.2 дана фронтальна проекція M_2 точки, яка лежить на лівій боковій грані призми. Ця грань перпендикулярна до площини $П_1$. Отже, горизонтальна проекція точки (M_1) знаходиться на горизонтальній проекції відповідної грані, яка вироджується в пряму лінію.

Рис. 5.2 – Точка на поверхні призми

Приклад 50

Знайти горизонтальну проекцію точки А, яка лежить на поверхні похилої призми, якщо дана її фронтальна проекція (рис. 5.3).

Розв'язування:

Проведемо через фронтальну проекцію точки А фронтальну проекцію $A_2 1_2$ допоміжної прямої, паралельної ребрам призми. Знаходимо горизонтальну проекцію 1_1 і проводимо через неї горизонтальну проекцію допоміжної прямої, на яку спроекціюємо горизонтальну проекцію точки А.

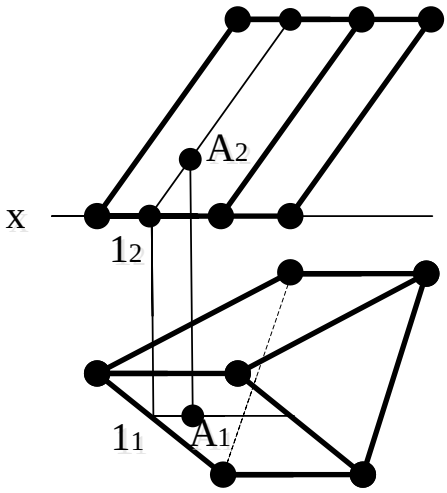
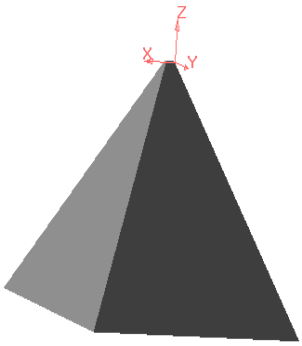


Рис. 5.3 – Точка на поверхні похиленої призми

5.1.2 Точка на поверхні піраміди



Загальні положення. *Пірамідою є багатогранник, одна грань якого (основа) – багатокутник, а бокові грані – трикутники з загальною точкою – вершиною піраміди, рис. 5.4*

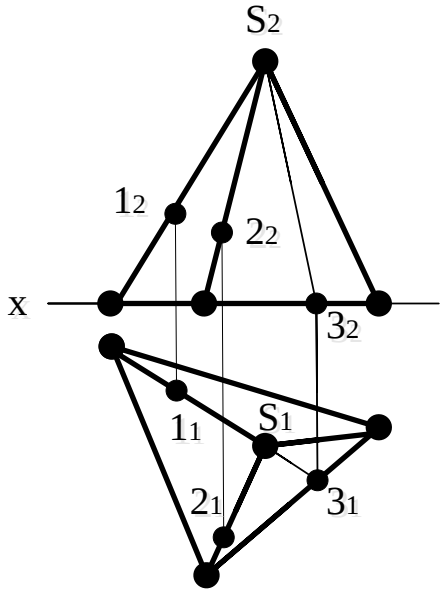
Рис. 5.4 – Тривимірна модель піраміди

Лінії перетину граней називають ребрами. Ребра піраміди розподіляють на бокові та ребра основи. За формою основи піраміди бувають трикутні, чотирикутні, п'ятикутні та інші. Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний багатокутник і вісь проходить через центр основи. Бокові грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники. Якщо піраміду розсікти площиною, яка паралельна її основі,

то отримаємо усічену піраміду. Сторони верхньої й нижньої основи усіченої піраміди подібні та паралельні між собою.

Приклад 51

Знайти відсутню проекцію точок, які належать поверхні прямої тригранної піраміди (рис. 5.5).

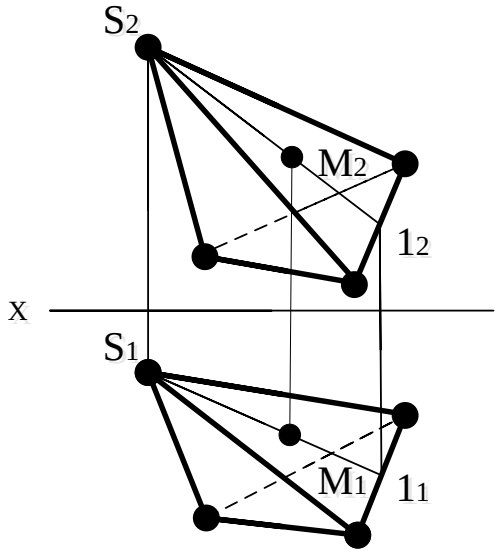


Розв'язування:
На рис. 5.4 задана горизонтальна проекція точки 1_1, яка знаходиться на ребрі піраміди. Виходячи з умови, що точка належить прямій, якщо її проекції належать однойменним проекціям цієї прямої, проведемо вертикальну проекцію лінії зв'язку й визначимо фронтальну проекцію 1_2. Аналогічно знаходять відсутні проекції точок 2_1 і 3_1.

Рис. 5.5 – Точка на поверхні піраміди

Приклад 52

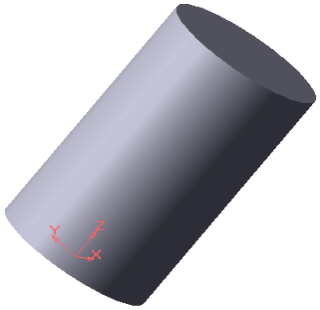
Знайти фронтальну проекцію точки М, яка знаходиться на поверхні похилої піраміди, якщо задана її горизонтальна проекція (рис. 5.6).



Розв'язування:
Проведемо через горизонтальну проекцію точки М горизонтальну проекцію $S_1 1_1$ допоміжної прямої. Знаходимо горизонтальну проекцію 1_2 і проводимо через неї $S_2 1_2$ фронтальну проекцію прямої $S_1 1_1$, на яку спроекціюємо фронтальну проекцію точки М.

Рис. 5.6 – Точка на поверхні похиленої піраміди

5.1.3 Точка на поверхні циліндра



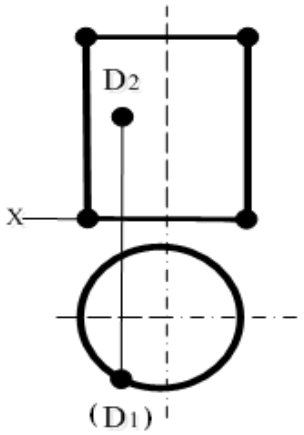
Загальні положення. *Циліндром є геометричне тіло, обмежене циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами (основами), рис. 5.7.*

Рис. 5.7 – Тривимірна модель циліндра

Твірні, які обмежують прямокутник на фронтальній площині, називаються контурними твірними. Відстань між площинами основ циліндрів називається висотою. Циліндри поділяються на прямі й похилі. Прямим називається циліндр, у якого твірні перпендикулярні до основи.

Приклад 53

Побудувати відсутню проекцію точки D, яка належить циліндричній поверхні (рис. 5.8).



Розв'язування:

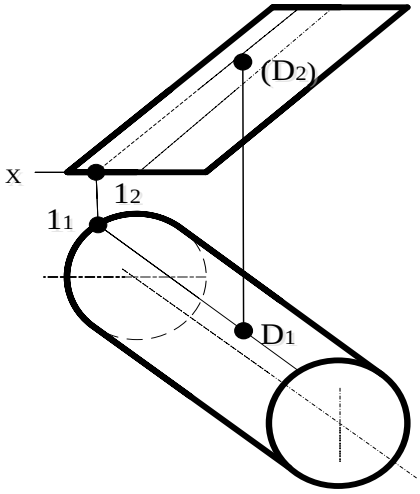
Задана фронтальна проекція точки D_2, яка належить циліндричній поверхні. Горизонтальна проекція цієї точки збігається з контуром кола, а саме з горизонтальною проекцією циліндричної поверхні.

Рис. 5.8 – Точка на поверхні циліндра

На площині $П_1$ видимою буде лише площина верхньої основи циліндра. На фронтальній площині проекцій зображено передню частину циліндра, тому фронтальна проекція D_2 буде видимою.

Приклад 54

Знайти горизонтальну проекцію точки D, яка лежить на поверхні похилого циліндра, якщо задано її фронтальну проекцію (рис. 5.9).

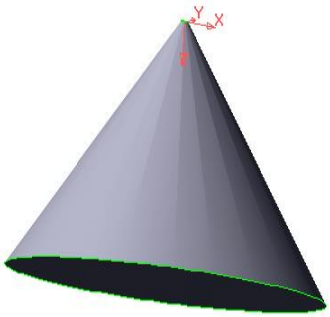


Розв'язування:

Проведемо через фронтальну проекцію точки D фронтальну проекцію D212 допоміжної твірної. Знаходимо горизонтальну проекцію 11 і проводимо через неї горизонтальну проекцію твірної, на яку спроекціюємо горизонтальну проекцію точки D.

Рис. 5.9 – Точка на поверхні похилого циліндра

5.1.4 Точка на поверхні конуса



Загальні положення. *Конус являє собою геометричне тіло, яке обмежене бічною конічною поверхнею і площиною основи, яка перетинає всі його твірні, рис. 5.10.*

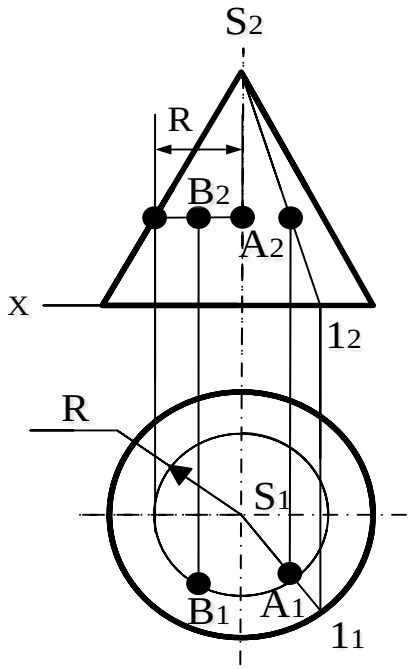
Рис. 5.10 – Тривимірна модель конуса

Перпендикуляр, який опущено з вершини конуса на площину його основи, називається висотою. Конуси поділяють на прямі й похилі. Прямим круговим зветься конус, у котрого основою є коло, а висота проходить через центр основи.

На площині П1 видимою буде вся бічна поверхня конуса. На фронтальній площині проекцій видимою буде передня частина конічної поверхні, яка обмежена контурними твірними конуса.

Приклад 55

Побудувати відсутні горизонтальні проекції точок A і B, які належать конічній поверхні (рис. 5.11).



Розв'язування:

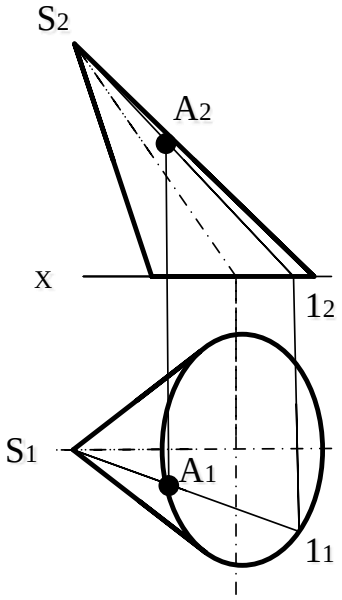
Перший спосіб. Для того, щоб визначити горизонтальну проекцію A_1 точки, через S_2 і A_2, проводимо фронтальну проекцію $S_2 1_2$ твірної конуса. Визначаємо її горизонтальну проекцію $S_1 1_1$ і на перетині цієї проекції з лінією зв'язку, яку проведено з A_2, отримаємо шукану проекцію A_1.

Рис. 5.11 – Точка на поверхні конуса

Другий спосіб. Для того, щоб визначити горизонтальну проекцію точки B_1, проведемо на поверхні конуса допоміжне коло. Її фронтальна проекція є прямою лінією, яка паралельна осі проекцій, а її горизонтальна проекція – коло. Спроекціюємо відсутню проекцію точки B на коло й отримаємо горизонтальну проекцію B_1 точки B, якої бракувало.

Приклад 56

Знайти горизонтальну проекцію точки A, яка лежить на поверхні похилого конуса, якщо дана її фронтальна проекція (рис. 5.12).



Розв'язування:

Розв'язування даного завдання є аналогічним знахожденню відсутніх проекцій на поверхні похилої піраміди, яке було розглянуте раніше.

Рис. 5.12 – Точка на поверхні похилого конуса

5.1.5 Точка на поверхні сфери

Загальні положення.

На сфері виділяють такі характерні лінії:

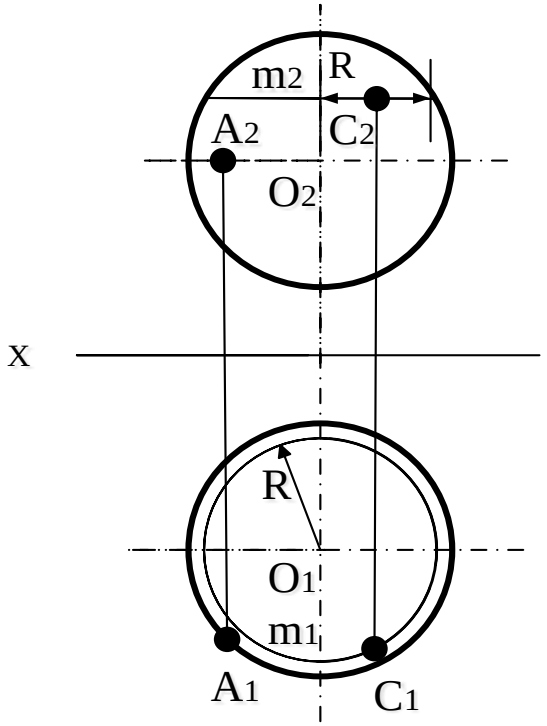
1. Паралелі – кола, утворені в перетині сфери площинами, перпендикулярними до її вертикальної осі. Найбільша паралель, яка проходить через центр кулі, називається екватором.

2. Меридіани – кола, утворені в перетині кулі площинами, які проходять через вертикальну вісь обертання. Головними є фронтальний і профільний меридіани.

На горизонтальній площині екватор поділяє кулю на верхню (видиму) й нижню (невидиму) частини. На площині $П_2$ фронтальний меридіан є кордоном між передньою видимою й задньою невидимою частинами сфери.

Приклад 57

Знайти відсутні горизонтальні проекції точок, які належать поверхні сфери (рис. 5.13).



Розв'язування:

Щоб знайти горизонтальну проекцію C_1, проведемо через точку C допоміжне коло – паралель кулі з радіусом r. Через C_2 проводимо лінію зв'язку до перетину з горизонтальною проекцією кола в точці C_1. Оскільки фронтальна проекція точки A лежить на екваторі, тому горизонтальна проекція A_1 знаходиться на сфері.

Рис. 5.13 – Точка на поверхні сфери

5.1.6 Точка на поверхні тора

Загальні положення. *Тором називається поверхня, яка утворена обертанням вертикального кола навкруги вертикальної осі, яка лежить у площині кола, але не проходить через його центр.*

На поверхні тора, як і на сфері, виділяють паралелі й меридіани.

На площині $П_1$ видимою буде та частина тора, яка лежить вище від екватора. Фронтальний меридіан утворює контур поверхні на площині $П_2$ і є кордоном, який відділяє видиму частину поверхні від невидимої на цій площині.

Приклад 58

Знайти горизонтальну проекцію точки А і фронтальну проекцію точки В, які належать поверхні тора (рис. 5.14).

Розв'язування:

Тор є поверхнею обертання, тому для визначення горизонтальної проекції точки А за її заданою фронтальною проекцією через точку досить провести паралель і в проекційному зв'язку визначити A_1, як у випадку зі сферою. Фронтальна проекція точки В лежить на видимій частині екватора, тому горизонтальна проекція B_1 знаходиться на передній частині контура головного меридіана тора.

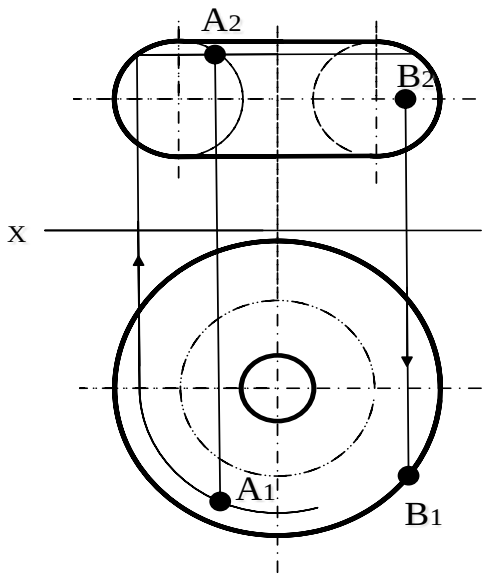
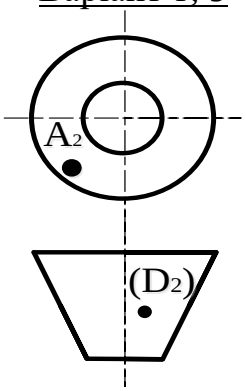
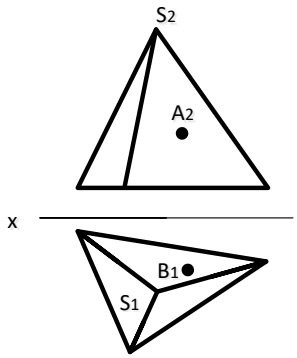
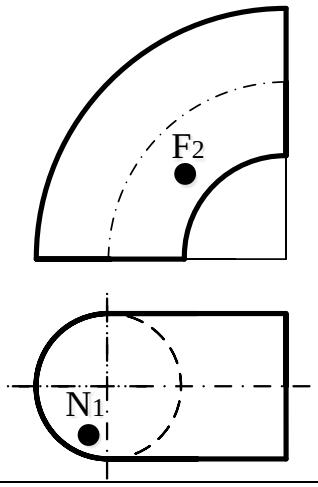
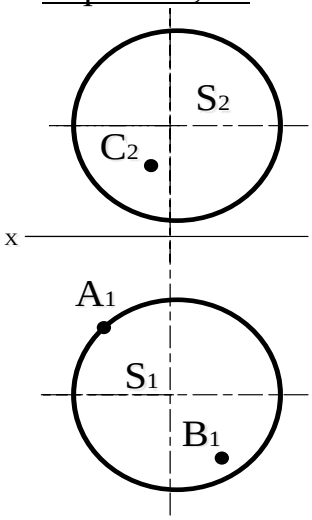
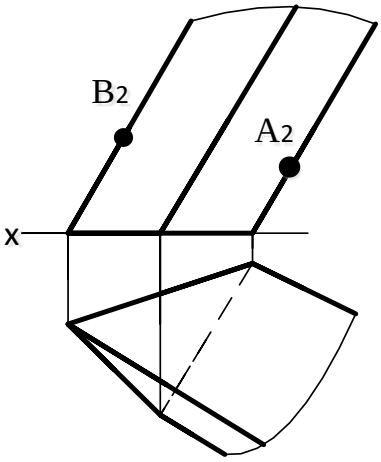
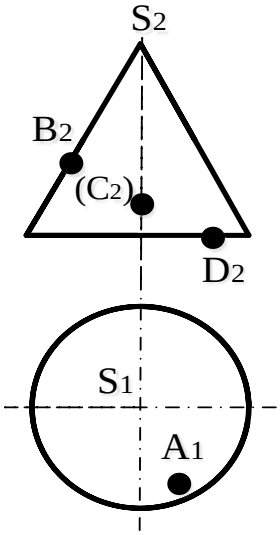
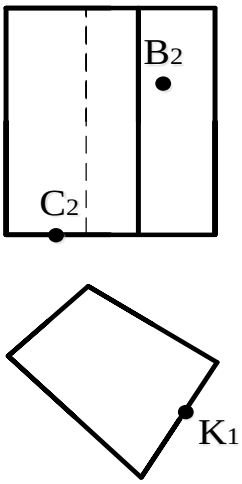
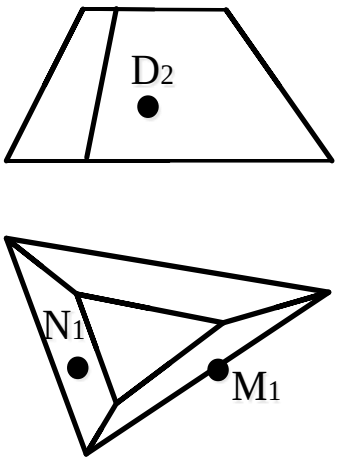


Рис. 5.14 – Точка на поверхні тора

Задачі для самостійного розв'язування

Побудувати відсутні проекції точок на поверхнях:

Варіант 1, 9	Варіант 2, 10
	

<table>
<tr>
<td>Варіант 3, 11
 
</td>
<td>Варіант 4, 12
 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Варіант 5, 13
 
</td>
<td>Варіант 6, 14
 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Варіант 7, 15
 
</td>
<td>Варіант 8, 16
 
</td>
</tr>
</table>

5.2 Перетин поверхні площиною

Для того, щоб побудувати лінію перетину будь-якої поверхні площиною, потрібно знайти низку точок, які належать як поверхні, так і площині, і потім ці точки з'єднати.

При перерізі поверхонь обертання площиною маємо криві лінії, вид яких залежить від кута нахилу площини до площин проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$. В усіх випадках в першу чергу визначають положення характерних точок фігури перетину, тобто точок, які належать контурним твірним поверхонь. Після цього визначають декілька проміжних точок, які потім з'єднуються з характерними точками плавною кривою.

При перерізі кругового циліндра площиною залежно від положення січної площини можна отримати:

– **коло**, якщо січна площина перпендикулярна до осі обертання циліндра;

– **еліпс**, якщо січна площина нахилена до осі циліндра під кутом $\alpha \neq 90^0$;

– **прямокутник,** коли січна площина паралельна осі циліндра.

При перетині кругового конуса площиною залежно від її положення можна отримати так звані конічні перерізи:

– **коло**, якщо січна площина перпендикулярна до осі конуса;

– **еліпс**, коли січна площина нахилена до осі конуса й перетинає всі твірні конуса;

– **гіперболу**, якщо січна площина паралельна двом твірним конуса;

– **параболу**, коли січна площина паралельна одній твірній конуса;

– **трикутник**, якщо січна площина проходить через вершину конуса або його вісь обертання.

При перерізі сфери площиною незалежно від її положення можна отримати тільки коло.

Приклад 59

Знайти лінію перетину шестигранної піраміди з фронтально проекціюючою площиною Т. Побудувати натуральну величину перерізу (рис. 5.15).

Розв'язування:

Січна площина перетинає всі ребра піраміди, у цьому випадку перерізом піраміди буде багатокутник з числом вершин, яке буде дорівнювати кількості ребер. Так, у результаті перерізу шестигранної піраміди фронтально проекціюючою площиною Т ми отримаємо шестикутник. Натуральну величину перерізу побудуємо способом заміни площин проекцій (який розглядався раніше).

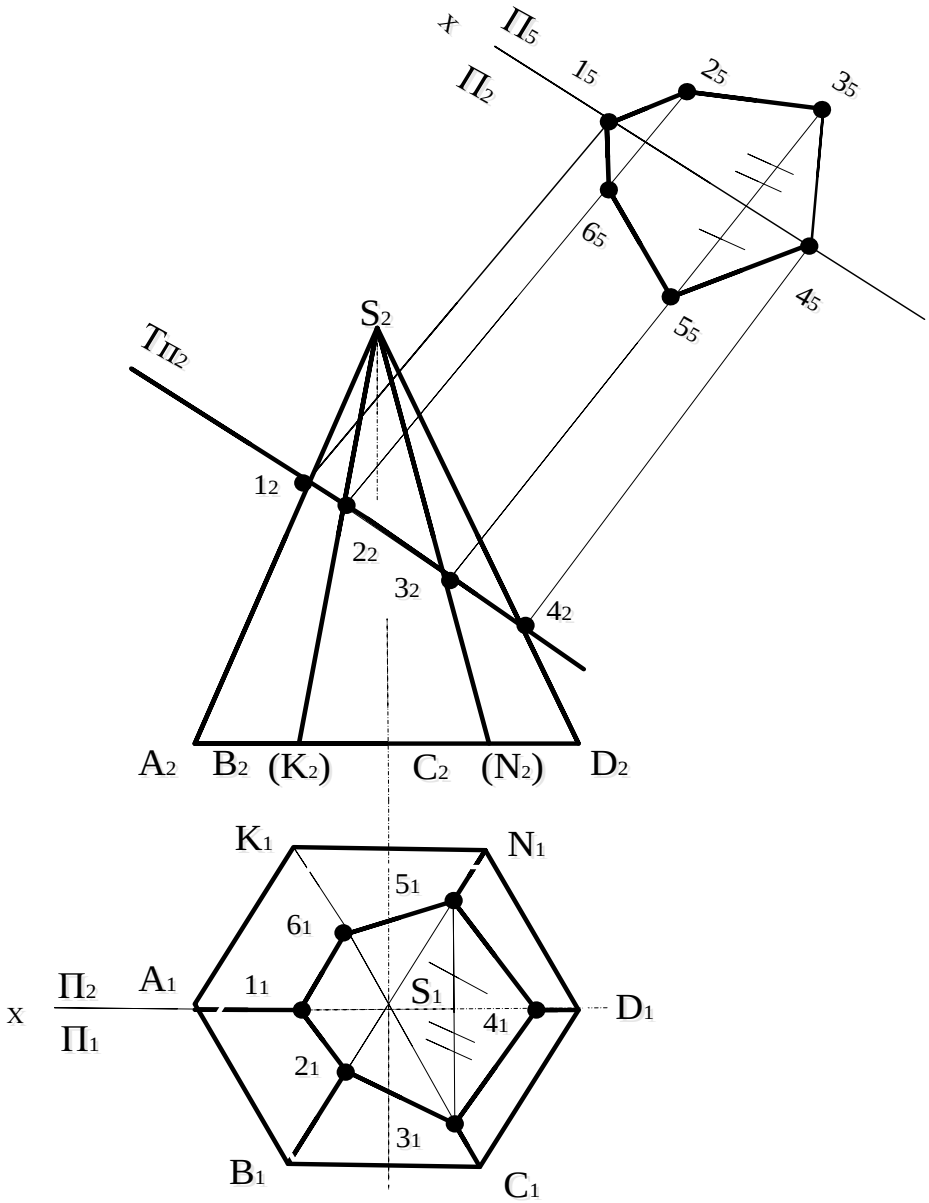


Рис. 5.15 – Лінія перетину шестигранної піраміди з площиною Т

Приклад 60

Знайти лінію перетину поверхні призми площиною Т загального положення (рис. 5.16).

Розв'язування:

Для того, щоб побудувати лінію перетину, треба знайти точки перетину ребер призми з заданою площиною. Горизонтальні проекції лінії перетину збігається з горизонтальною проекцією призми. Фронтальну проекцію визначаємо як відсутню проекцію точки, яка належить фронталі площини «Т». Знаходимо точку (1_1, 1_2) перетину ребра «В» (B_1, B_2) з площиною. Горизонтальна проекція (1_1) цієї точки збігається з горизонтальною проекцією ребра, тоді можна знайти фронтальну проекцію (1_2) точки, використовуючи умову, що точка (1_1,1_2) лежить на площині Т. Аналогічно знаходимо точки (2_1, 2_2), (3_1, 3_2) і (4_1, 4_2) перетину решти ребер

з площиною Т. З'єднавши послідовно знайдені точки, отримаємо проекції шуканої лінії перетину: горизонтальну ($1_1 2_1 3_1 4_1$) і фронтальну ($1_2 2_2 3_2 4_2$).

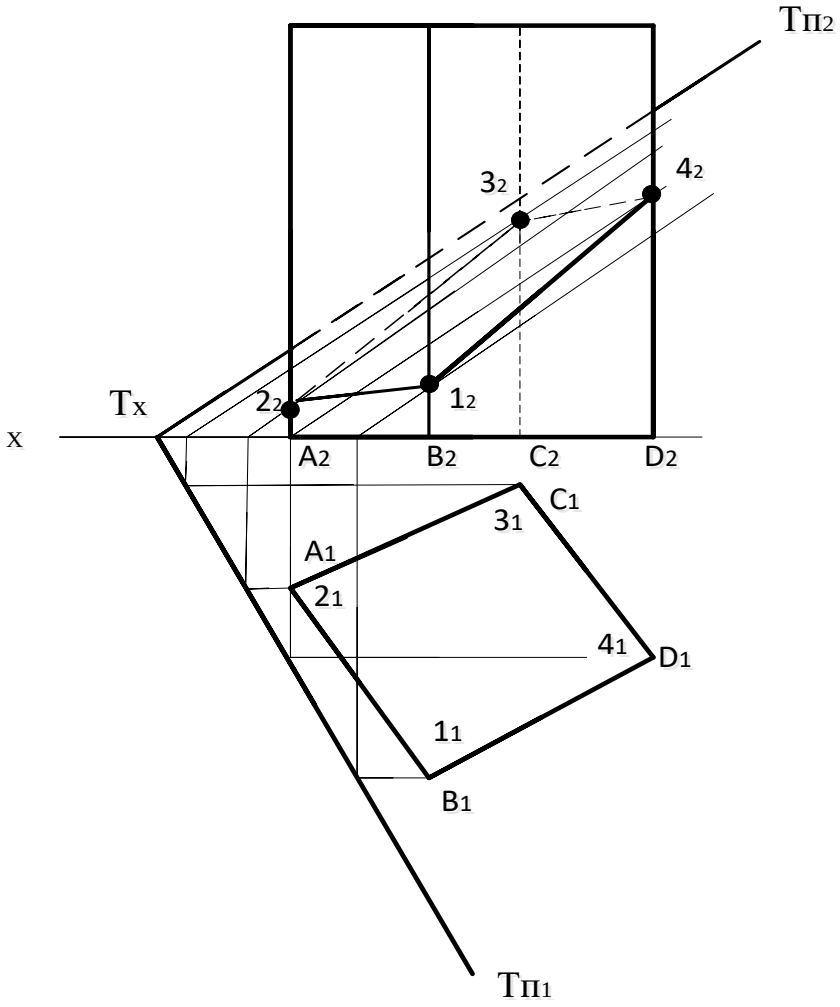


Рис. 5.16 – Лінія перетину поверхні призми площиною Т

Приклад 61

Знайти лінію перетину поверхні циліндра площиною Р загального положення (рис. 5.17).

Розв'язування:

Горизонтальна проекція лінії перетину збігається з горизонтальною проекцією циліндра. Для визначення фронтальної проекції екстремальних точок лінії перетину проводимо через вісь циліндра горизонтально-проекціюючу площину Т, перпендикулярну до площини Р. Площина Т перетинає поверхню циліндра по твірним, а площину Р – по лінії найбільшого схилу (H_1F_1, H_2F_2), на їх перетині отримуємо нижчу точку (1_1, 1_2) і найвищу точку (2_1, 2_2) лінії перетину. Далі проводимо через вісь циліндра площину Г, паралельну фронтальній площині проекцій. Ця площина перетинає поверхню циліндра по контурним твірним, а площину Р – по фронталі. На їх перетині отримуємо точки (3_1, 3_2) і (4_1, 4_2) лінії перетину, які розділяють видиму й невидиму частину лінії перетину.

Горизонтальні проекції точок 5_1 і 6_1 знаходимо аналогічно. Знаходимо точки перетину ще декількох твірних циліндра з площиною. З'єднавши послідовно фронтальні проекції всіх знайдених точок, отримаємо фронтальну проекцію лінії перетину – еліпс.

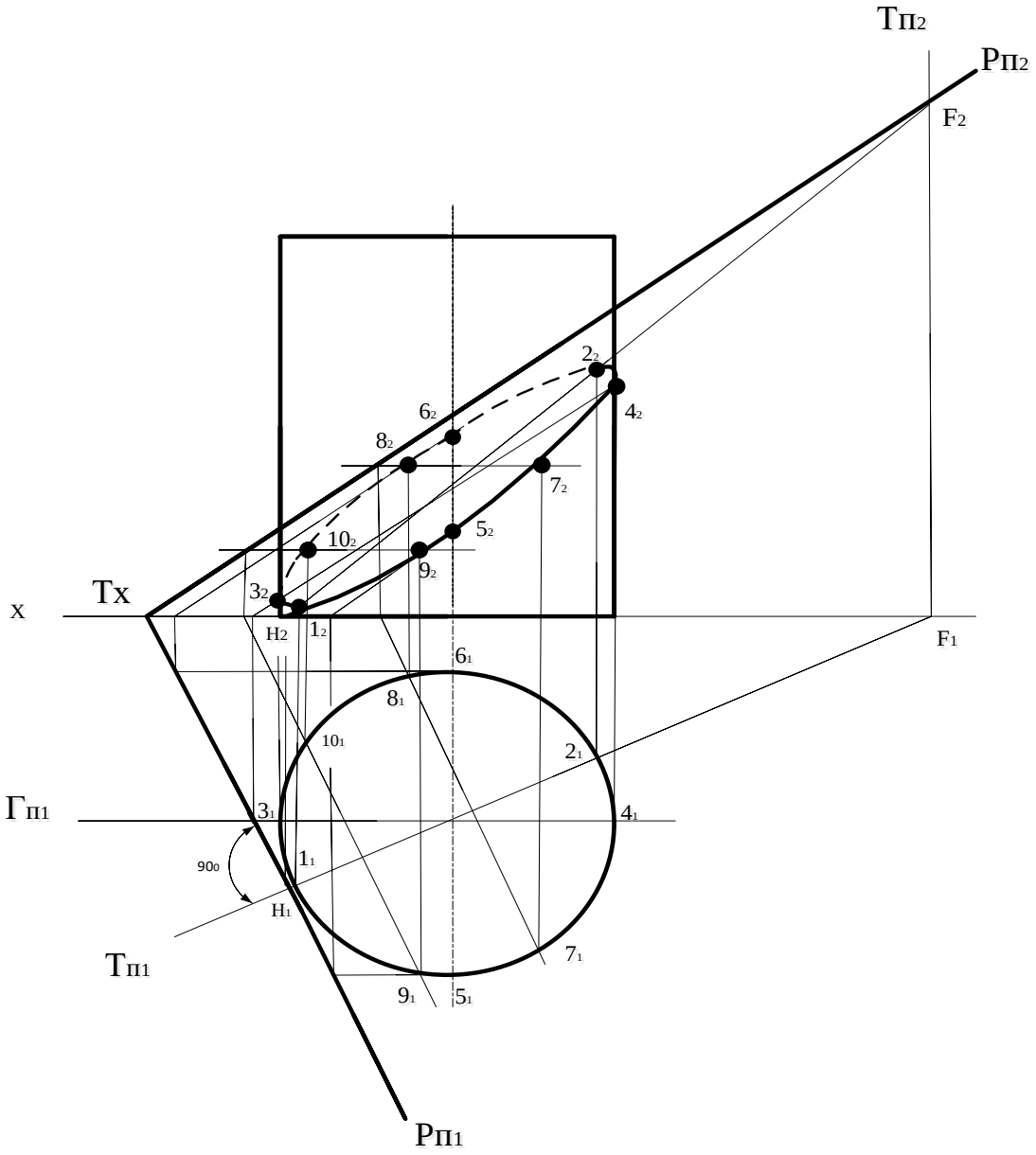
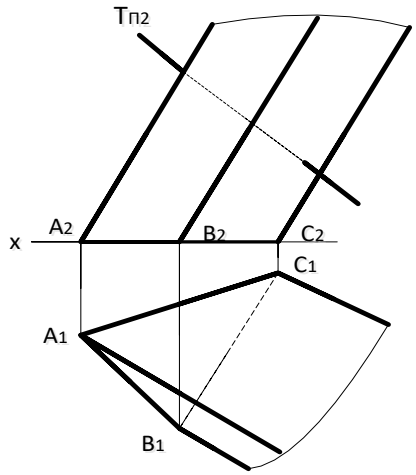
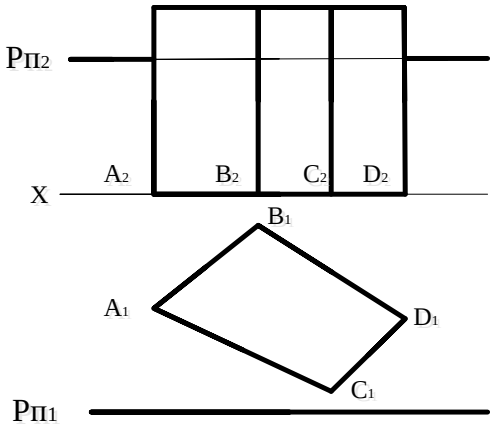
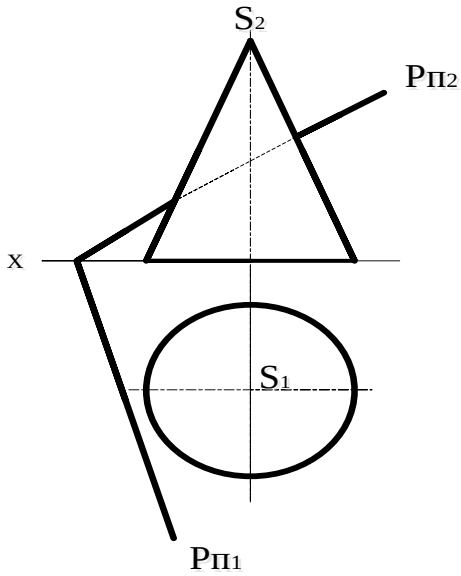
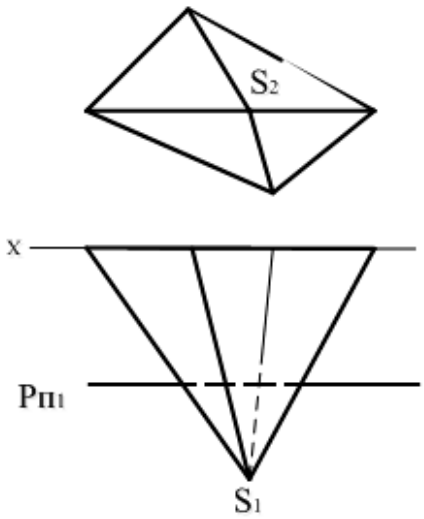
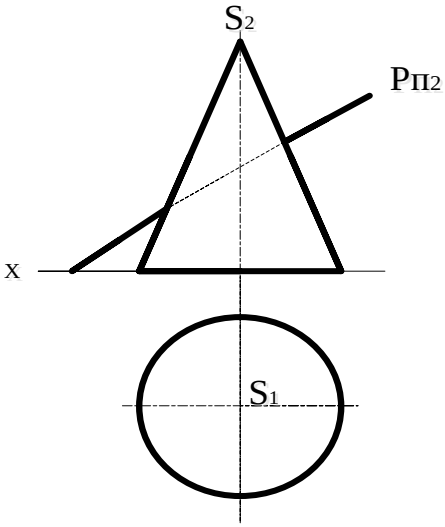
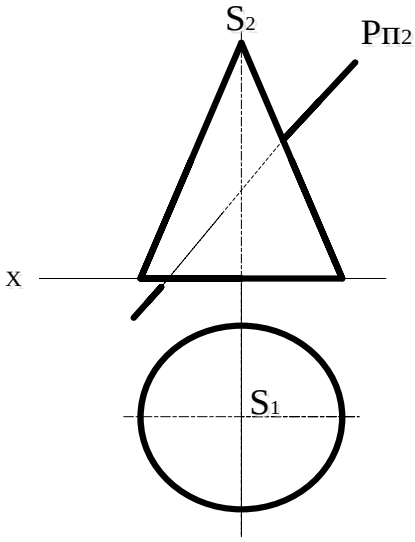


Рис. 5.17 – Лінія перетину поверхні циліндра площиною Р

Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати лінію перетину поверхні площиною

Варіант 1, 7  	Варіант 2, 8 
Варіант 3, 9  	Варіант 4, 10 
Варіант 5, 11  	Варіант 6, 12 

5.3 Перетин прямої з поверхнею

Для того, щоб знайти точки перетину прямої з поверхнею будь-якого тіла (призма, піраміда, циліндр, конус тощо), роблять так само, як і при знаходженні точки перетину прямої з площиною:

1. Задану пряму включають у допоміжну проекціюючу площину.
2. Знаходять лінію перетину заданої поверхні з допоміжною площиною.
3. На перетині заданої прямої з лінією перетину отримують шукані точки.

Приклад 62

Визначити точки перетину прямої «а» з поверхнею піраміди SABC, визначити видимість прямої відносно піраміди (рис. 5.18).

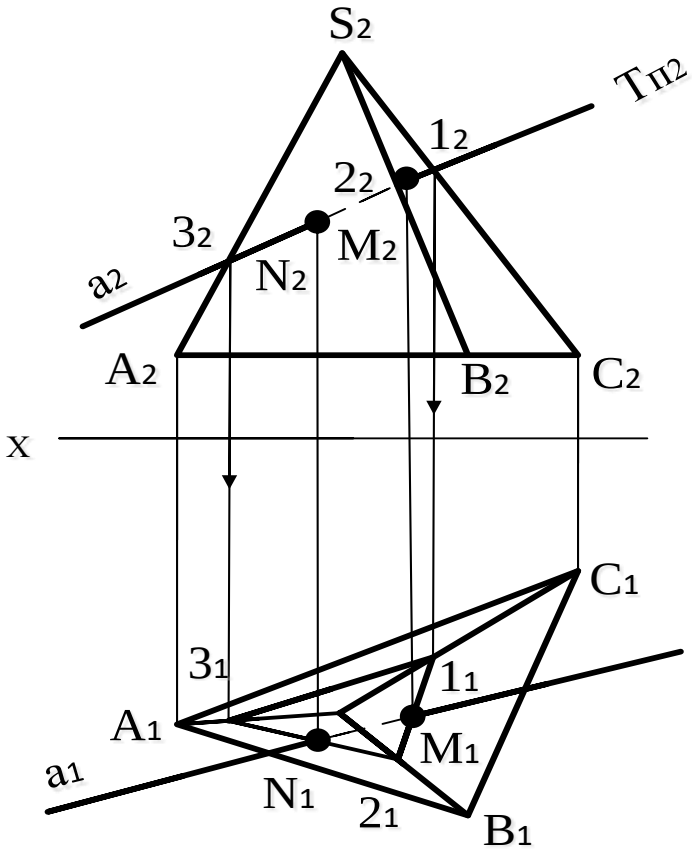


Рис. 5.18 – Визначення точок перетину прямої «а» з поверхнею піраміди

Розв'язування:

1. Через пряму «а» проводимо фронтально-проекціюючу площину («a_2» зливається з $T_{П2}$).
2. Знаходимо лінію перетину піраміди з цією площиною.

Фронтальна проекція лінії перетину (1_2, 2_2, 3_2) зливається з фронтальним слідом $T_{П2}$ площини. Для знаходження горизонтальної проекції лінії перетину скористаємося фронтальними проекціями точок і лініями вертикального зв'язку. Точки перетину горизонтальної проекції трикутника (1_1, 2_1, 3_1) з горизонтальною проекцією лінії «а» визначають горизонтальні проекції точок перетину прямої з пірамідою (N_1, M_1).

Розглянутий спосіб побудови точок перетину прямої з геометричним тілом використовується у випадках перетину прямої із багатогранниками, оскільки фігура перерізу (багатокутник) знаходиться без труднощів і з достатньою точністю.

Приклад 63

Встановити точки перетину прямої лінії з поверхнею конуса обертання та визначити видимість прямої по відношенню до конуса (рис. 5.19).

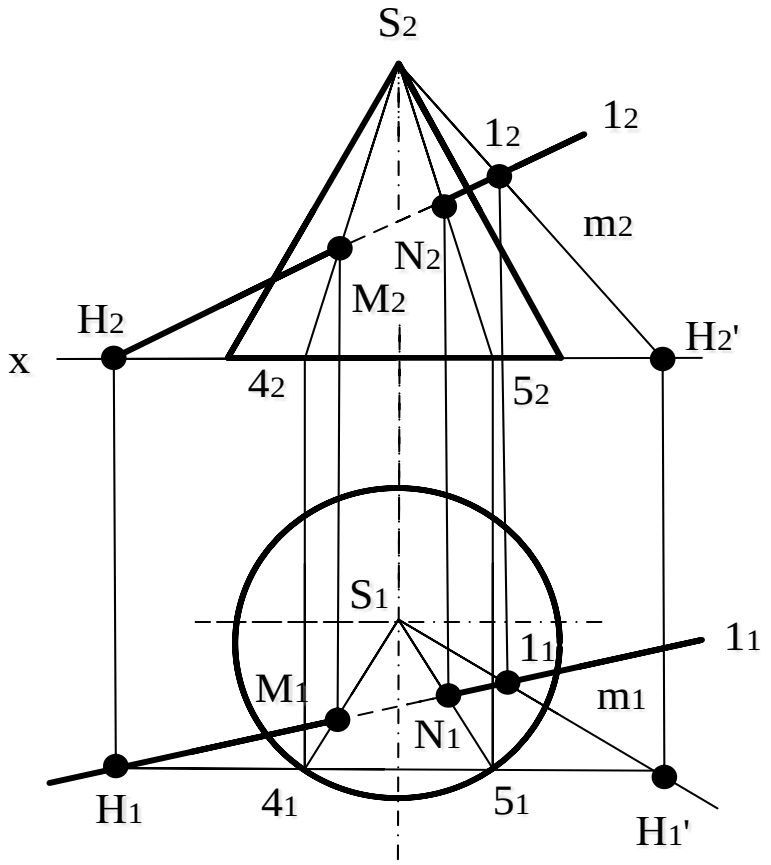


Рис. 5.20 – Визначення точок перетину прямої «l» з поверхнею конуса

Розв'язування:

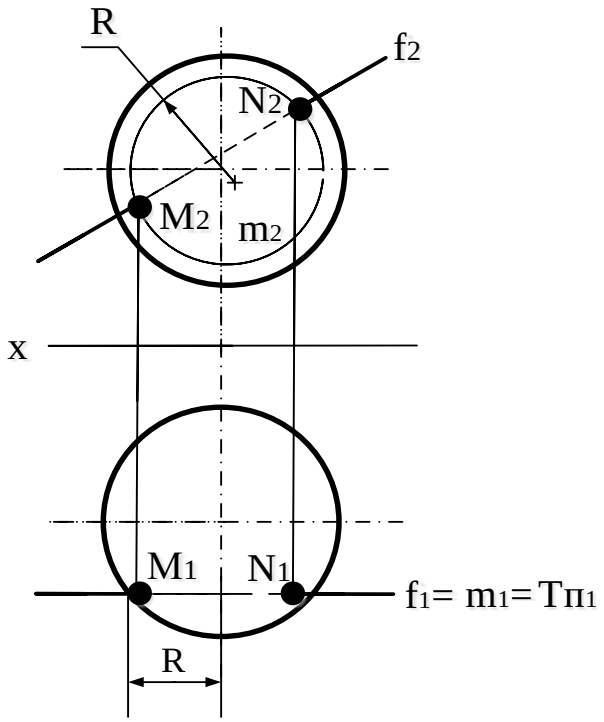
Як допоміжну січну площину вибираємо таку площину, яка б включала пряму l і перетинала конус по твірним. Така площина Σ визначається прямою l і вершиною конуса. Визначивши горизонтальний слід цієї площини $Σп_1$, встановлюємо точки 4_1 і 5_1 перетину $Σп_1$ з основою конуса. Оскільки площина Σ проходить через вершину S конуса, то в

перерізі конуса допоміжною січною площиною буде трикутник S_{45}. Отриманий трикутник і пряма l лежать в одній площині, тому шукані точки їх перетину К та М і є точками перетину прямої з конусом. За допомогою ліній проекційного зв'язку знаходимо фронтальні проекції точок K_2 та M_2 і позначаємо видимість прямої «l».

Якщо геометричне тіло – сфера, то через пряму також проводять проекціюючу площину, і за допомогою горизонталей сфери визначається лінія перерізу.

Приклад 64

Визначити точки перетину прямої лінії зі сферою і встановити видимість прямої по відношенню до сфери (рис. 5.20).



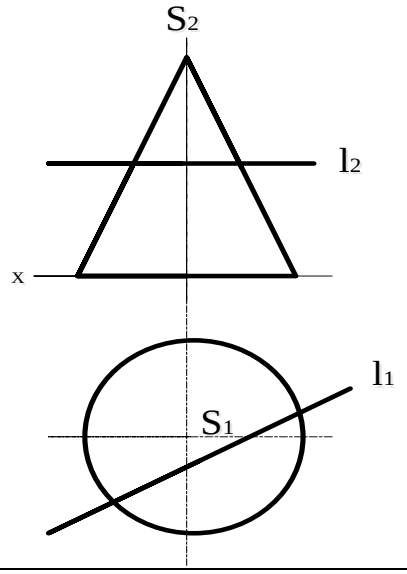
Розв'язування:

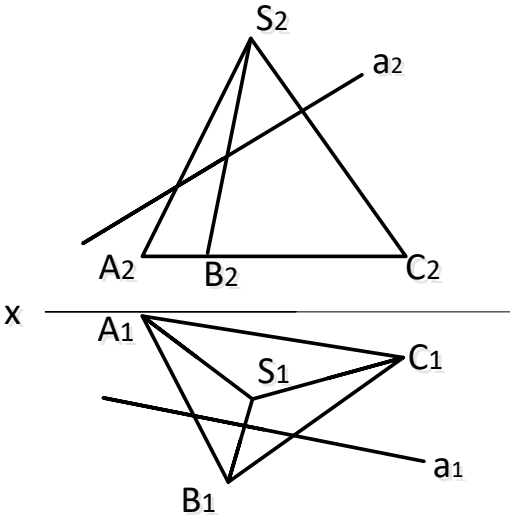
Для визначення точок перетину сфери з фронталлю f як допоміжну площину доцільно використати фронтальну площину (Т). Оскільки коло *m* перерізу сфери цією площиною спроекціюється на $П_2$ без викривлення, то неважко знайти шукані точки перетину прямої зі сферою – М і N.

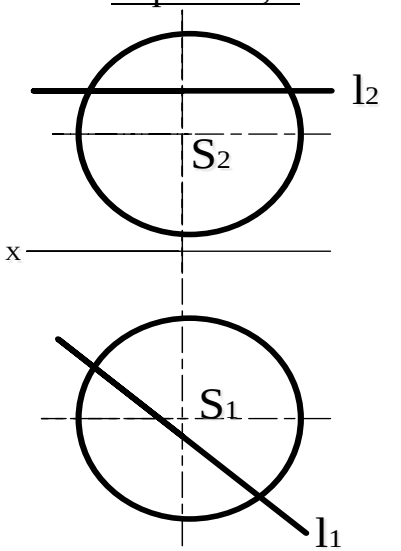
Рис. 5.20 – Визначення точок перетину прямої «f» зі сферою

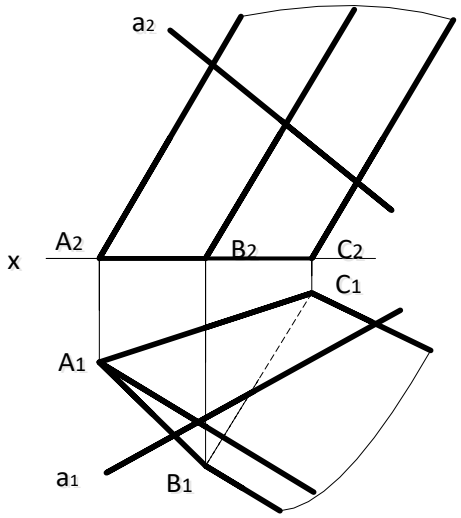
Задачі для самостійного розв’язування

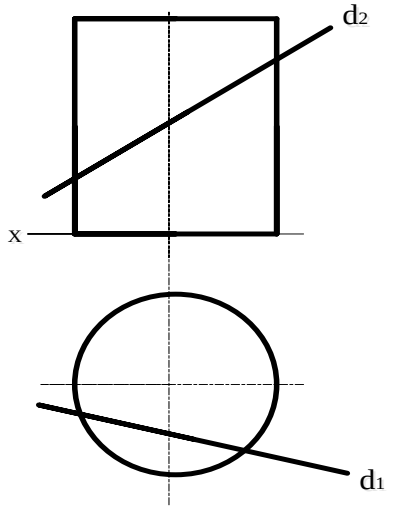
Визначити точки перетину прямої з поверхнею:

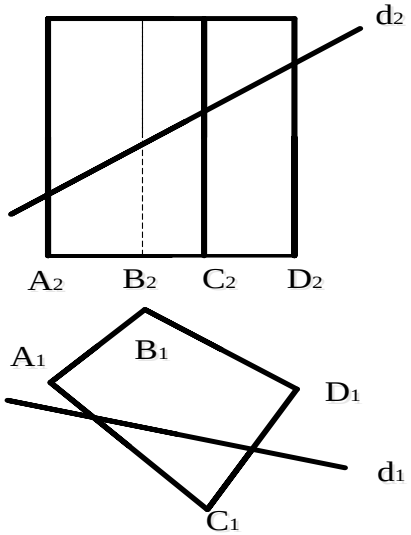
<table>
<tr>
<td>
Варіант 1, 7


</td>
<td>
Варіант 2, 8


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Варіант 3, 9


</td>
<td>
Варіант 4, 10


</td>
</tr>
<tr>
<td>
Варіант 5, 11


</td>
<td>
Варіант 6, 12


</td>
</tr>
</table>

5.4 Взаємний перетин поверхонь

При перетині поверхонь утворюється лінія, безліч точок якої належать обом поверхням, і в загальному випадку вона є просторовою кривою. Лінію перетину поверхонь, як і лінію перетину поверхні площиною, будують за визначеними точками. При цьому особливу увагу слід приділити опорним точкам. До опорних слід віднести всі характерні точки твірних поверхонь: екстремальні точки (найбільш високі, низькі, ліві, праві та ін.), точки, розташовані на осях симетрії тощо. Кількість допоміжних точок диктується заданою точністю побудови лінії перетину.

5.4.1 Спосіб допоміжних січних площин

Для визначення точок, які належать лінії перетину поверхонь, використовують *спосіб допоміжних січних площин*, суть якого полягає в тому, що:

1. Задані поверхні перетинають третьою, допоміжною січною площиною.
2. Визначають лінію перетину нової площини з кожною із заданих поверхонь окремо.
3. Знаходять точки перетину отриманих ліній, які і належать шуканій лінії перетину поверхонь.

Приклад 65

Побудувати лінію перетину циліндричної та конічної поверхонь (рис. 5.21, рис. 5.22).

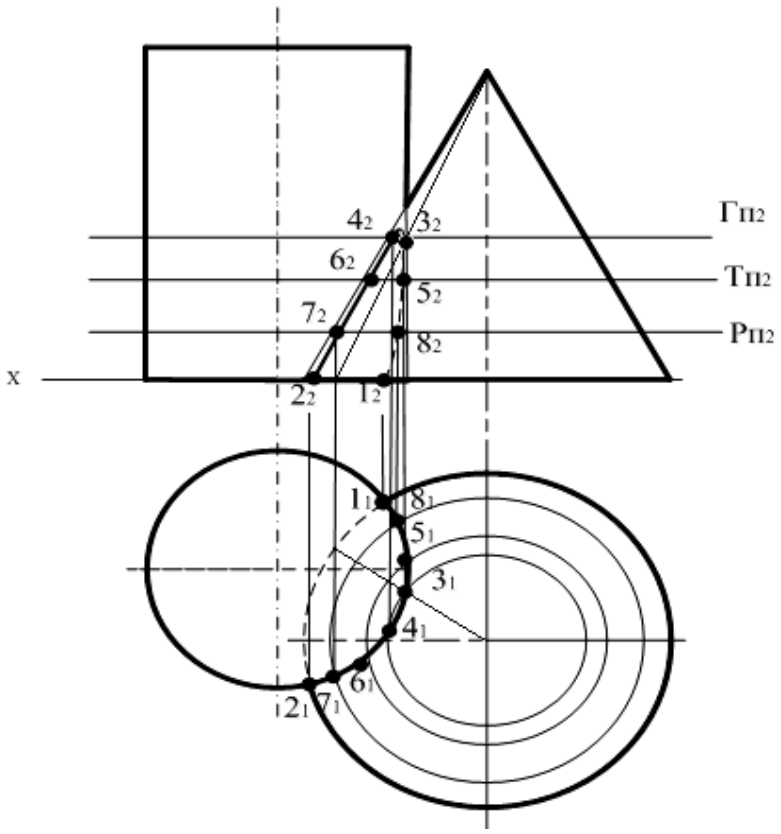
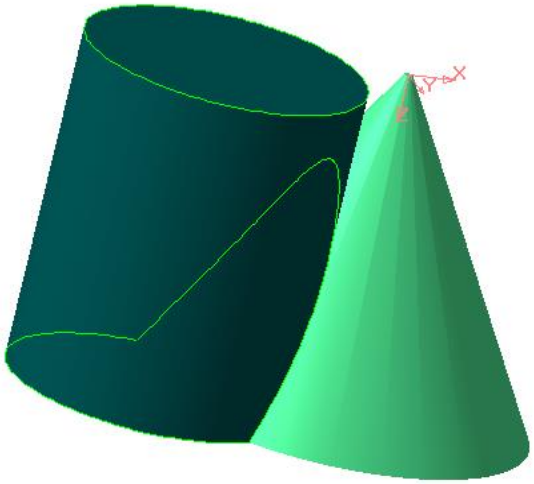


Рис. 5.21. – Перетин поверхонь

Розв'язування:

Спочатку встановлюємо проекції опорних (найнижчих) точок лінії перетину (1, 2) і найвищої (3). Між ними вводимо горизонтальні допоміжні площини (Г, Т, Р), які перетинають поверхні циліндра і конуса по колах.



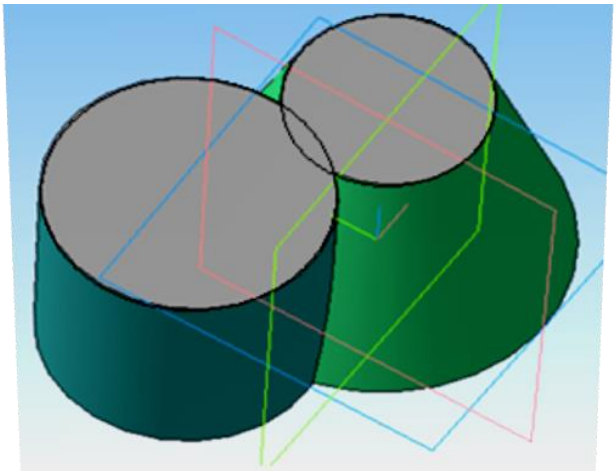


Рис. 5.22. – Зображення просторової моделі поверхонь

На їх взаємному перетині отримуємо проекції $4_1 \ldots 8_1$. Фронтальні проекції цих точок визначаються у проекційному зв'язку на відповідних слідах січних площин. З'єднавши всі знайдені точки кривої лінії, з визначенням видимості, отримуємо шукану лінію перетину.

5.4.2 Спосіб концентричних сфер

Для того, щоб одна й та сама сфера перетнула дві поверхні обертання по колу, необхідно, щоб її центр знаходився в точці перетину осей заданих поверхонь. Це і дало підстави, щоб називати цей спосіб побудови лінії перетину способом концентричних сфер, проведених з одного центру.

Цим методом доцільно користуватися в таких випадках:

1. Пересічні поверхні мають бути поверхнями обертання.

2. Їх осі мусять перетинатися (точка перетину приймається за центр сфери) і бути паралельними одній із площин проекцій.

Отже, щоб побудувати лінію перетину поверхонь методом концентричних сфер, необхідно:

1. Визначити сферу *мінімального радіуса*, яка буде перетинати одну з поверхонь і торкатися іншої поверхні (а саме, буде вписаною в цю поверхню). Це визначає положення точок лінії перетину заданих поверхонь. Для визначення мінімального радіуса січних сфер необхідно з їх центру опустити перпендикуляри до поверхонь обох сфер і взяти більший із них.

2. Щоб визначити сферу *максимального радіуса*, необхідно прийняти відстань від їх центру до найбільш віддаленої точки перетину контурних

твірних заданих поверхонь. Сфера максимального радіуса також дає кінцеве положення лінії перетину, але вписувати її нема необхідності, оскільки її впровадження призводить до визначення лише однієї, і до того ж відомої, прийнятої як опорної, найбільш віддаленої від центру сфер точки перетину обрисів заданих поверхонь.

3. Визначити сфери *проміжного радіуса*, які вибираються таким чином, щоб отримати найбільш точну лінію перетину двох поверхонь.

Приклад 66

Побудувати проекції лінії перетину двох конічних поверхонь (рис. 5.23).

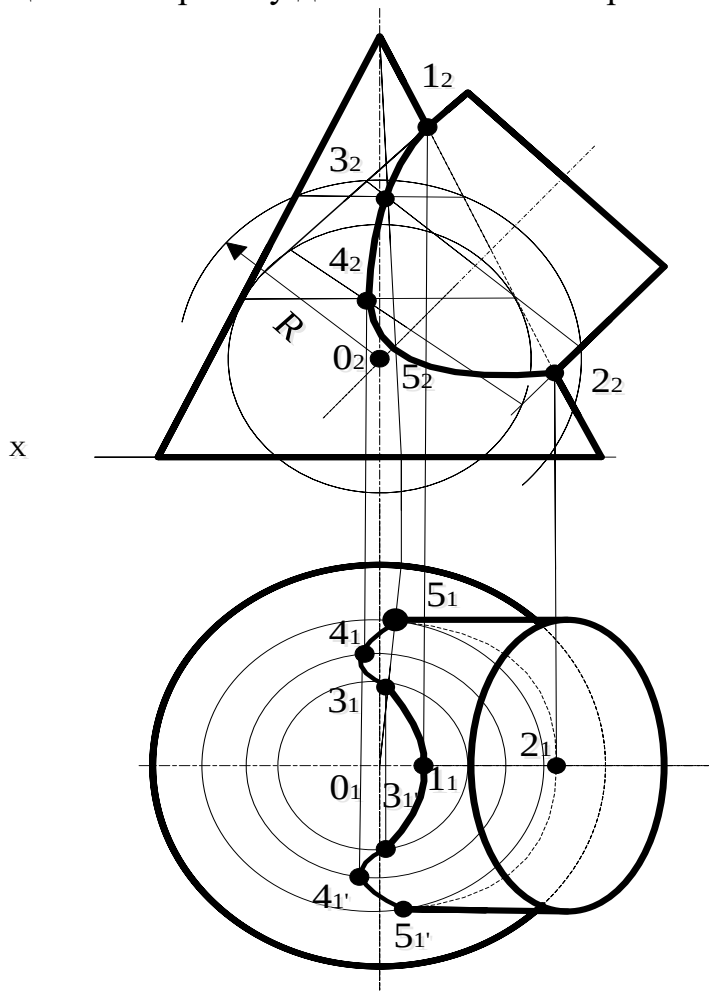


Рис. 5.23 – Лінія перетину двох поверхонь

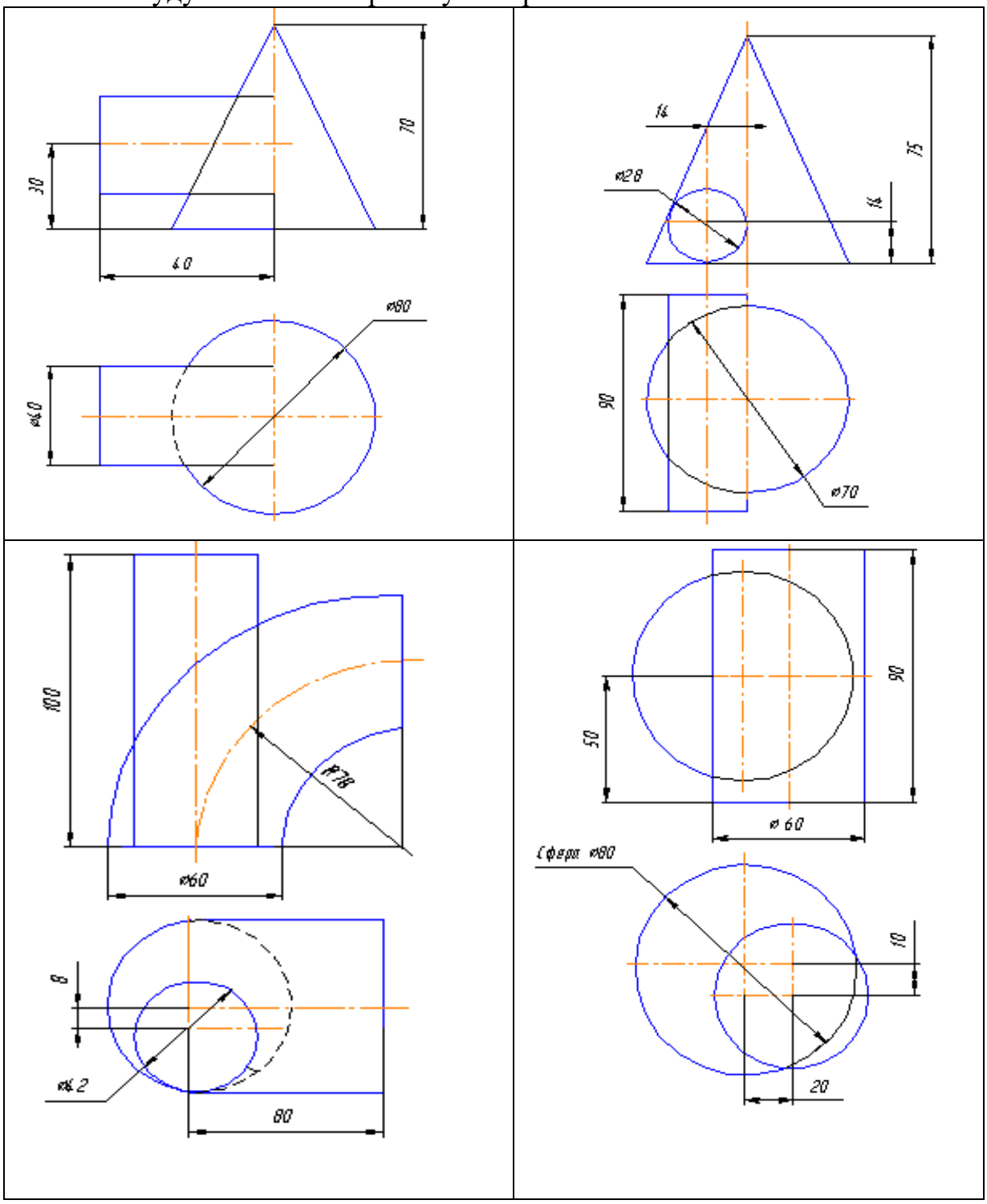
Розв'язування:

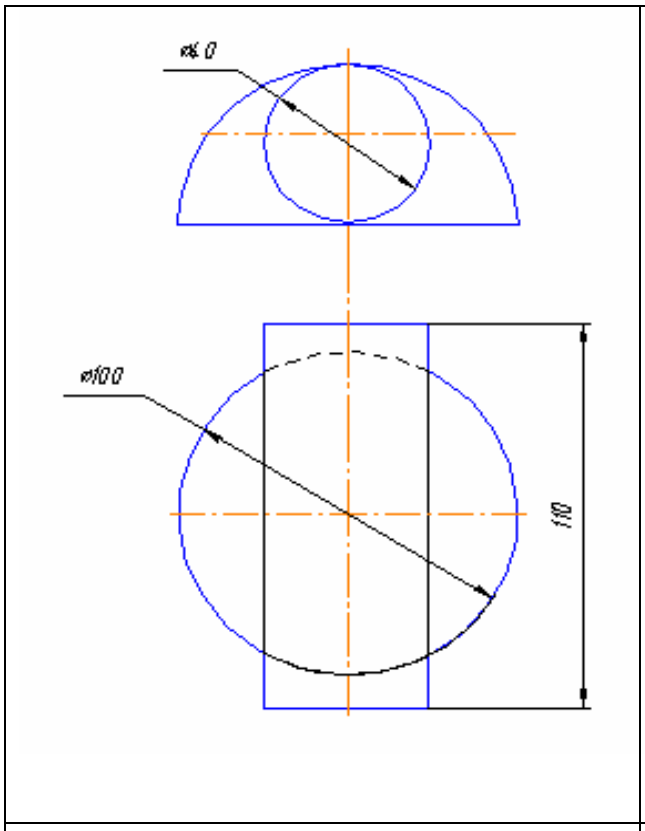
Приймаємо точку (0_1, 0_2) перетину осей циліндра й конуса за центр допоміжних сфер. Описуємо з точки 0_2 сферу довільного радіуса R, яка перетинає кожну з даних поверхонь по колу. Фронтальні проекції кіл – прямі лінії, а горизонтальні проекції – еліпси. На перетині цих прямих ліній отримуємо фронтальні проекції 3_2 і 4_2 точок і, користуючись допоміжними твірними конуса (або колами), знаходимо горизонтальні проекції 3_1 і 4_1 цих точок. Аналогічно, змінюючи лише радіус сфер, отримуємо ще низку точок. З'єднавши ці точки кривою лінією, знаходимо шукану лінію перетину.

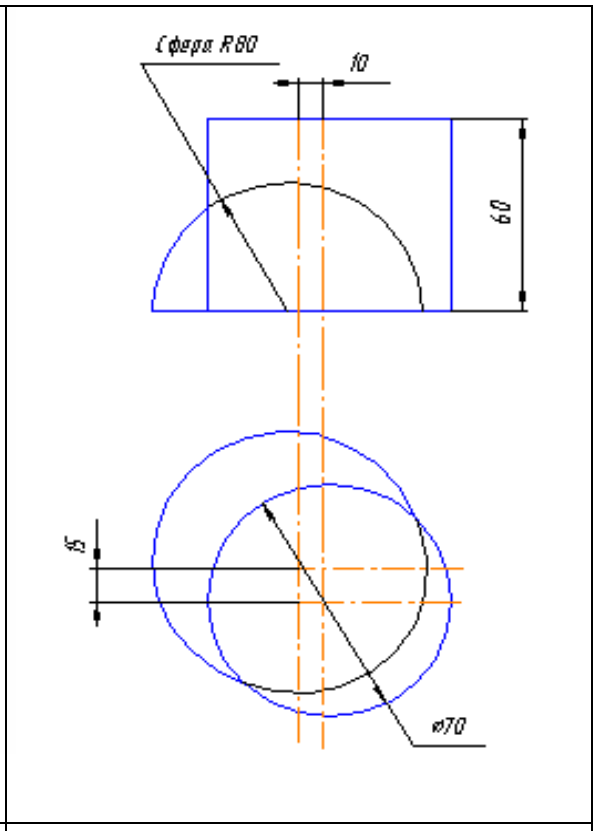
Точки 1 і 2 відомі з умови задачі, оскільки їх фронтальні проекції знаходяться на контурних твірних конуса.

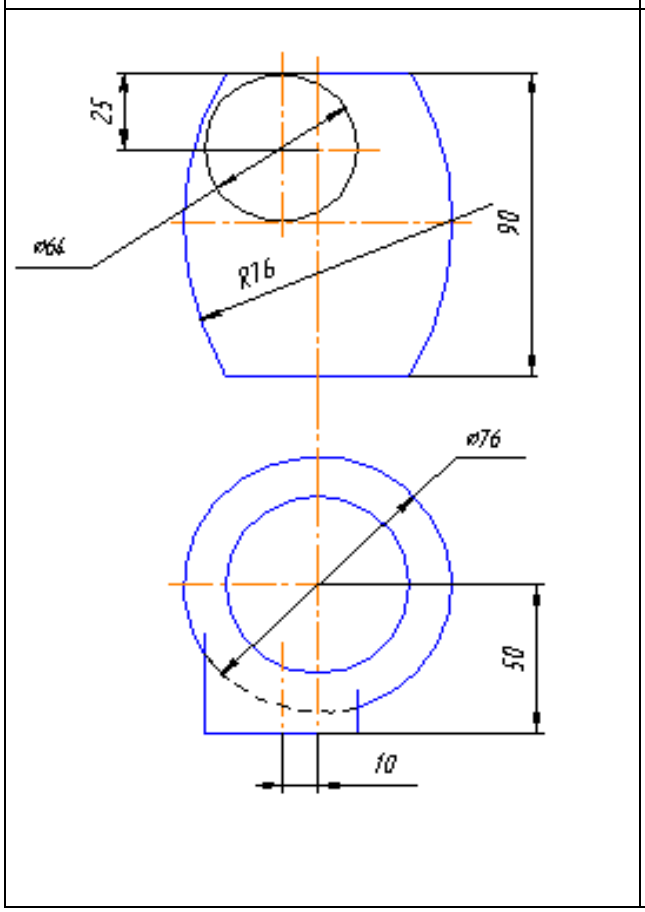
Задачі для самостійного розв’язування

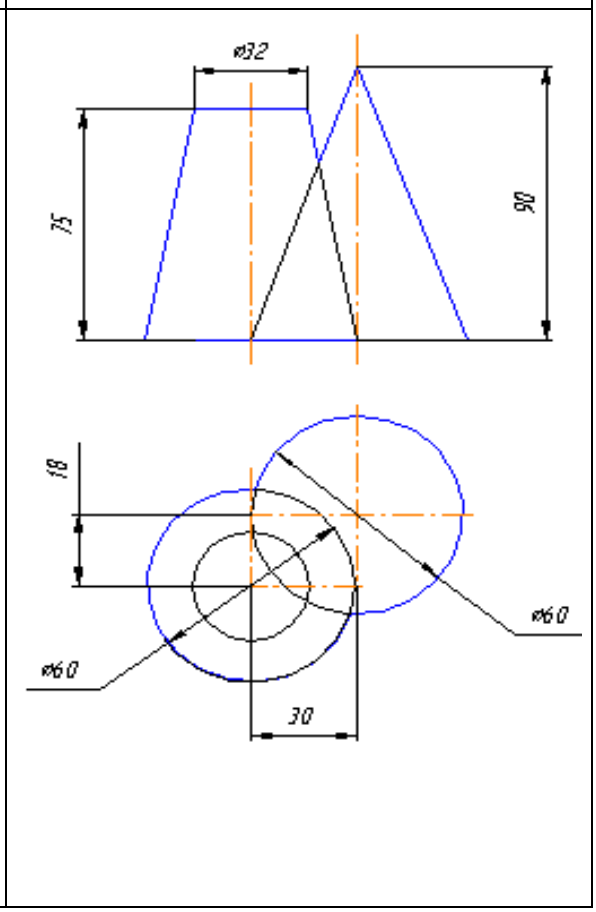
Побудувати лінію перетину поверхонь

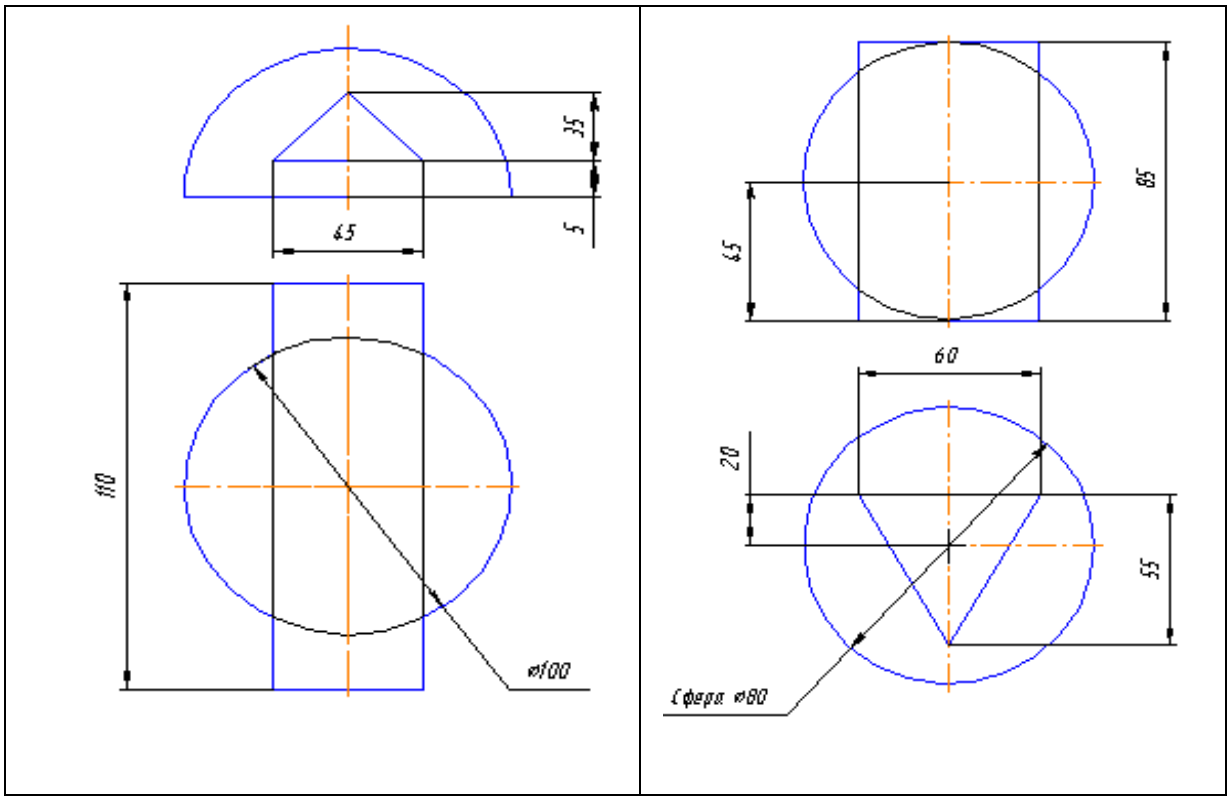



ø60
ø100
110


Сфера R80
10
60
15
ø70


25
ø64
R16
90
ø76
50
10


ø32
75
90
18
ø60
ø60
30



Контрольні запитання

1. Які лінії отримують при перетині циліндра обертання площинами?
2. За якими лініями перетинається циліндрична поверхня площиною, паралельною твірній цієї поверхні?
3. Які криві утворюються при перетині конуса обертання площинами?
4. Яку криву отримують при перетині сфери будь-якою площиною?
5. У чому полягає загальний метод побудови точок перетину прямої лінії з поверхнею?
6. Укажіть способи, які використовуються для побудови проекцій лінії перетину поверхонь?
7. У яких випадках для визначення лінії перетину двох поверхонь можна використовувати площини загального положення як посередники?
8. У яких випадках для визначення лінії перетину двох поверхонь можна використовувати спосіб концентричних сфер?

6. РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

Розгорткою поверхні *називають плоску фігуру, що утворюється при суміщенні поверхні з площиною без розривів і складок. До цієї групи належать тільки лінійчаті поверхні. І навпаки, поверхні, які не можна сумістити з площиною, відносяться до нерозгортних поверхонь.*

Залежно від виду поверхонь їхні розгортки можуть бути: точними, наближеними й умовними.

Точна розгортка може бути побудована лише для багатогранників та відсіків розгортних поверхонь (циліндра, конуса, торса) – поверхню

багатогранника завжди можна сумістити з площиною, тому що вона складається з плоских відсіків.

Побудова точної розгортки похилого конуса або циліндра пов'язана з обчисленням довжини кривої лінії, що само по собі є не простою задачею. Тому розгортку будують наближено, замінюючи поверхню конуса багатогранною пірамідою, а поверхню циліндра – поверхнею багатогранної призми.

При побудові розгортки нерозгортних поверхонь (сфера, тор) їх апроксимують відсіками розгортних поверхонь і будують розгортки цих відсіків. Сукупність розгорток відсіків розгортних поверхонь, якими замінюється нерозгортна поверхня, називається умовною (наближеною) розгорткою нерозгортної поверхні.

6.1 Розгортка призми

Розгортка бокової поверхні тригранної призми – це прямокутник, довжина якого дорівнює периметру трикутника основи, а висота дорівнює висоті призми.

Приклад 67

Побудувати розгортку призми (рис. 6.1).

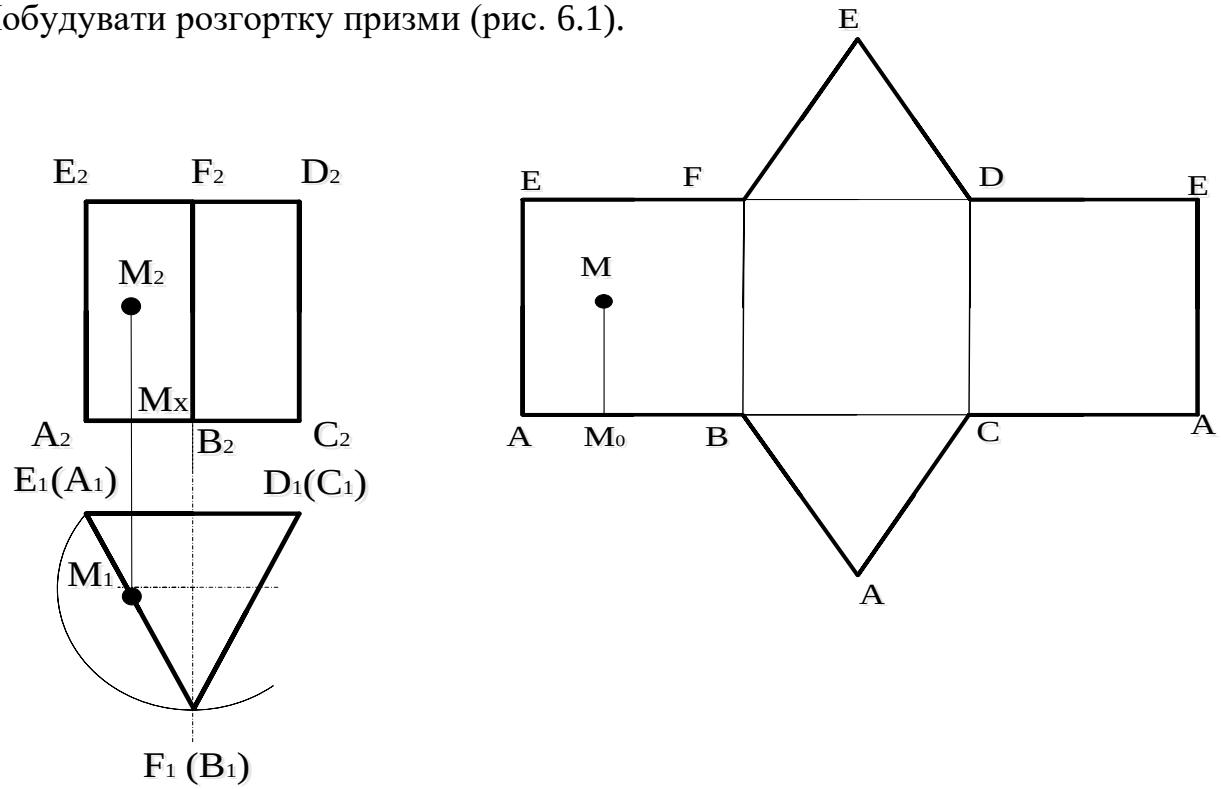


Рис. 6.1 – Розгортка тригранної призми

Розв'язування:

Для отримання повної розгортки додають верхню й нижню основи призми. Перенесемо на розгортку точку М. Для цього на ребрі АВ відкладаємо відрізок $AM_0=A_1M_1$ і через точку M_0 проводимо пряму, яка паралельна напряму бокових ребер призми. На цій прямій відкладають відрізок M_0M, який дорівнює відрізку M_xM_2.

6.2 Розгортка піраміди

Приклад 68

Побудувати розгортку піраміди (рис. 6.2).

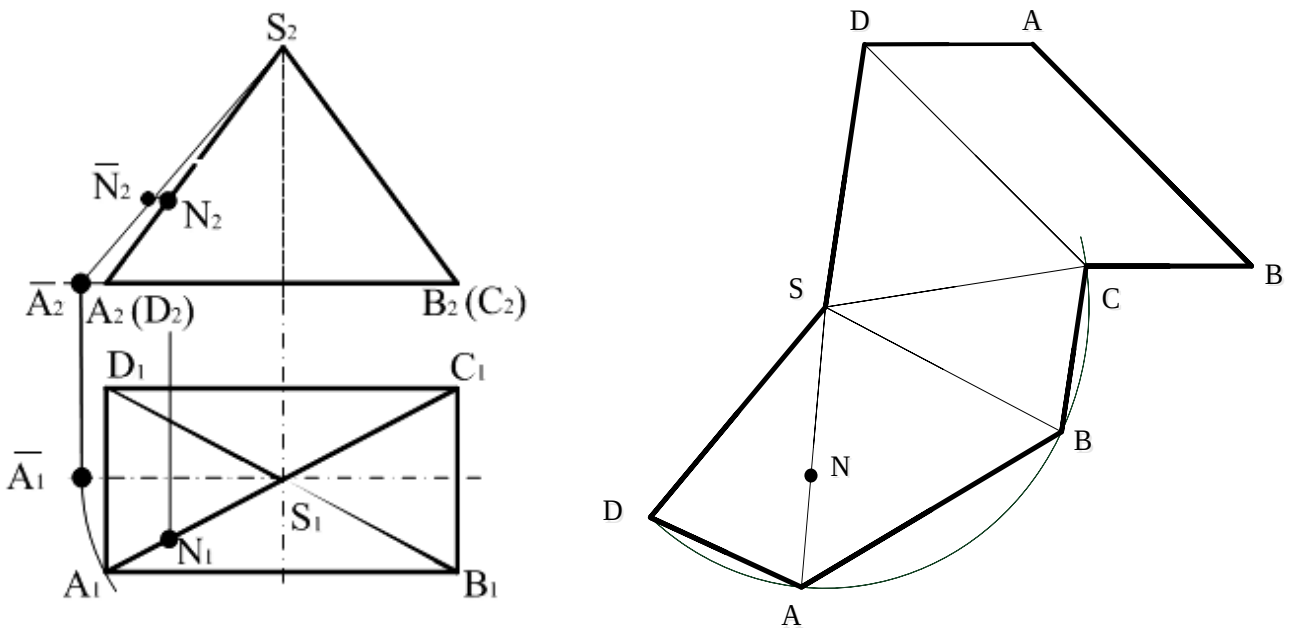


Рис. 6.2 – Розгортка піраміди

Розв'язування:

Для побудови розгортки піраміди треба визначити натуральну величину всіх її ребер. Ребра основи проекціюються в дійсну величину на площині $П_1$. Натуральну величину одного з ребер, наприклад SA, визначають за допомогою обертання навколо осі, яка проходить через вершину піраміди S перпендикулярно до її основи. Горизонтальна проекція ребра після обертання займе положення $S_1\ \overline{A}_1$, яке буде паралельним осі Ох. На фронтальній площині проекцій A_2 переміщається в положення $\overline{A}_2$. Пряма $S_2\ \overline{A}_2$ – натуральна величина бічного ребра піраміди.

Із довільної точки S радіусом, який дорівнює натуральній величині бічного ребра, а саме $SD=S_2\ \overline{A}_2$, проводимо дугу кола, на якій засікаємо чотири хорди, які дорівнюють сторонам основи піраміди: $AD=A_1D_1$,

$AB=A_1B_1$ и т.д. З'єднаємо точки S, D, A, B, C, D, S та отримаємо розгортку бічної поверхні. Добудуємо прямокутник основи піраміди.

Нанесемо на розгортку точку N. При обертанні ребра SA до положення, паралельного фронтальній площині проекцій, точка N, яка лежить на цьому ребрі, переміщується в положення $\overline{N}$. Виміримо величину відрізку $S_2\ \overline{N}_2$ і відкладемо її на розгортці ($SN= S_2\ \overline{N}_2$).

6.3 Розгортка циліндра

Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник, довжина якого дорівнює довжині кола основи циліндра, а висота дорівнює висоті циліндра.

Приклад 69

Побудувати розгортку поверхні кругового циліндра (рис. 6.3).

Розв'язування:

Визначаємо довжину кола основи $\ell=\pi D$ і будуємо прямокутник бічної поверхні. Для отримання повної розгортки додамо верхню й нижню основи циліндра. Щоб відкласти на розгортці точку G на основі прямокутника, відкладаємо відрізок $0G_0$, який дорівнює довжині випрямленої дуги $0G_1$, яка дорівнює $1/4\ell$ і, встановивши в точці G_0 перпендикуляр, відкладаємо на ньому відрізок G_0G, який дорівнює $G_2З_2$. Решта точок знаходяться аналогічно.

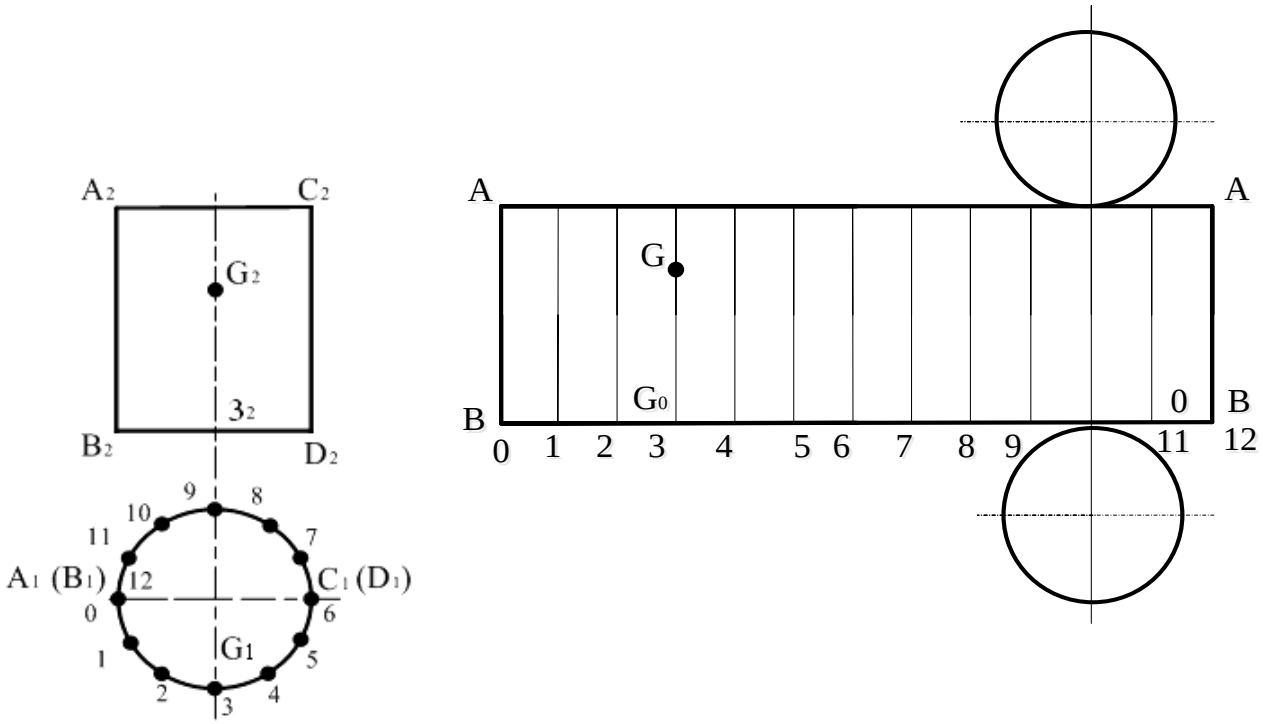


Рис. 6.3 – Розгортка циліндра

Приклад 70

Побудувати розгортку поверхні прямого зрізаного циліндра (рис. 6.4).

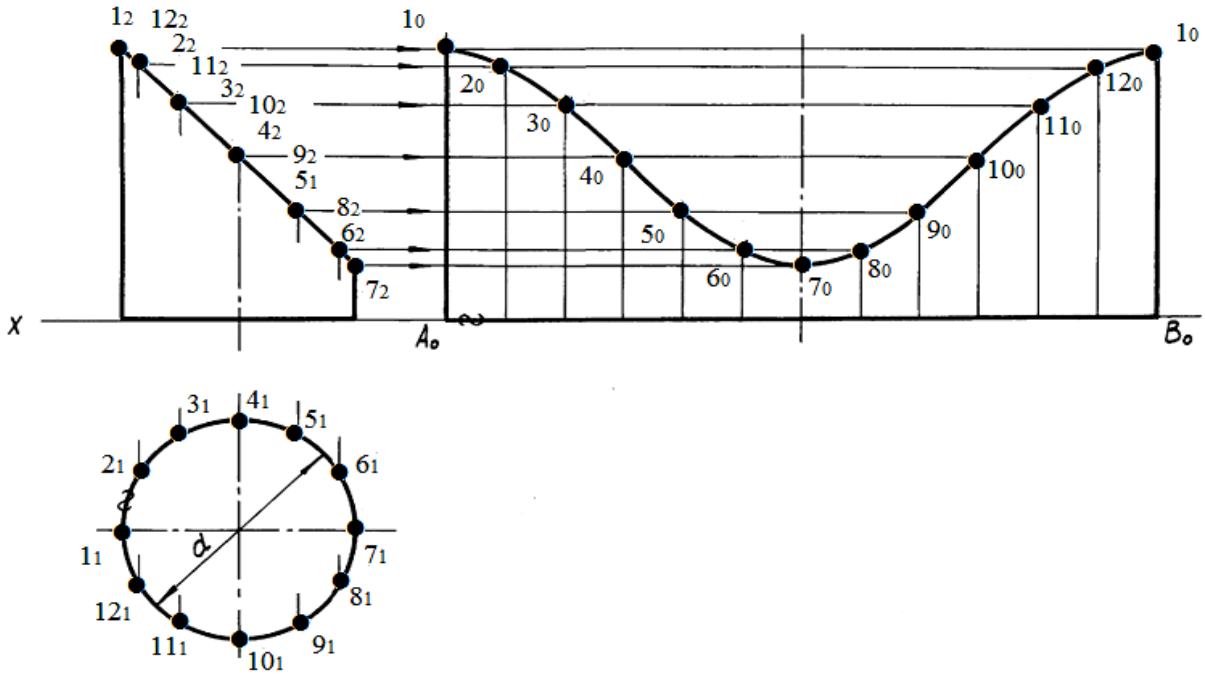


Рис. 6.4 – Розгортка зрізаного циліндра

Розв'язування:

Ділимо основу циліндра на 12 рівних частин, відкладаємо від точки A_0 праворуч ту ж кількість відрізків, які дорівнюють довжині $\pi D:12$ ($A_0B_0=\pi d$). Із отриманих точок проводимо вертикальні лінії, які відповідають твірним циліндричної поверхні. Відкладемо на цих лініях довжини твірних і, з'єднавши точки плавною лінією, отримаємо розгортку бічної поверхні циліндра.

Для того, щоб отримати повну розгортку, необхідно додати до розгортки поверхні циліндра: нижню основу – коло, верхню основу – фігуру перерізу, яка є частиною еліпса, визначивши його натуральну величину.

6.4 Розгортка конуса

Приклад 71

Побудувати розгортку поверхні кругового конуса (рис. 6.5).

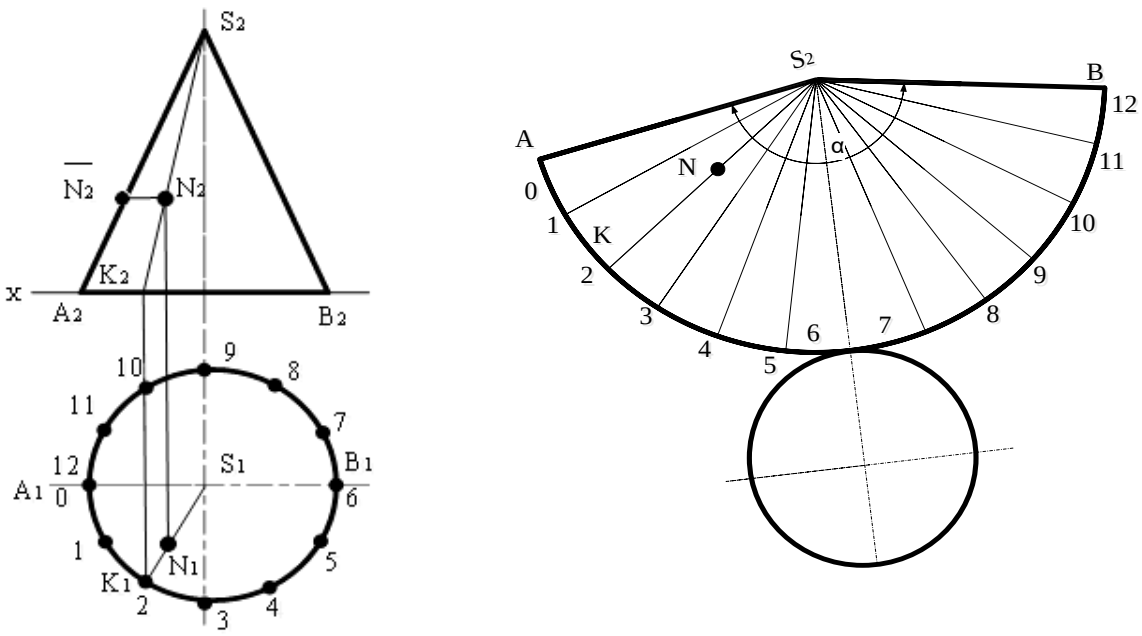


Рис. 6.5 – Розгортка конуса

Розв'язування:

Якщо розрізати поверхню конуса вздовж його твірної і розгорнути цю поверхню на площину, то отримаємо розгортку бічної поверхні у вигляді кругового сектора. Його радіус дорівнюватиме довжині твірної ℓ, а довжина дуги сектора – довжині кола основи. Кут α біля вершини S може бути обчисленим для прямого кругового конуса за формулою $\alpha^0 = 360^0 \times R/\ell$.

Прибудувавши основу – круг, отримаємо повну розгортку конуса. Для того, щоб не виконувати обчислень, пов'язаних з визначенням довжини дуги сектора або кута α, зазвичай вписують в основу конуса правильний 12-кутник і потім, описавши із довільної точки S дугу радіуса ℓ, засікають послідовно від будь-якої її точки 12 дуг, хорди яких дорівнюють стороні 12-кутника. При цьому отримаємо приблизну, а не точну розгортку.

Для того, щоб перенести на розгортку точку N, необхідно знайти на розгортці положення твірної SK, наближено приймаючи дугу A_1K_1 рівною хорді A_1K_1, відкладаючи цю величину на розгортці від точки A. Отриману точку K з'єднуємо з вершиною S. На твірній SK відкладаємо натуральну величину відстані від вершини до точки N ($S_2\ \overline{N}_2$).

Приклад 72

Побудувати розгортку бічної поверхні похилого конуса (рис. 6.6).

Розв'язування:

Ділимо основу конуса на 12 рівних частин і проводимо через отримані точки поділу твірні. Для побудови розгортки похилого конуса необхідно спочатку визначити натуральні величини всіх твірних. Шляхом обертання навколо осі, яка проходить через вершину S конуса і є перпендикулярною до площини проекції $П_1$, визначають натуральні довжини всіх твірних. Як видно з рисунка, усі твірні повернуті до положення, паралельного площині проекцій $П_2$. Отриману розгортку фігури $S_0 1_0 2_0 3_0 4_0 \ldots\ldots 1_0$ приймаємо за наближену розгортку конічної поверхні. Чим більшою є кількість граней у вписаної піраміди, тим меншою буде різниця між дійсною й наближеною розгортками конічної поверхні. Для нанесення на розгортку точки N необхідно від точки S_0 відкласти на відповідних твірних відрізок, який дорівнює натуральній величині відстані від вершини конуса до точки, а саме відрізки $S_2К_2 = S_0К_0$.

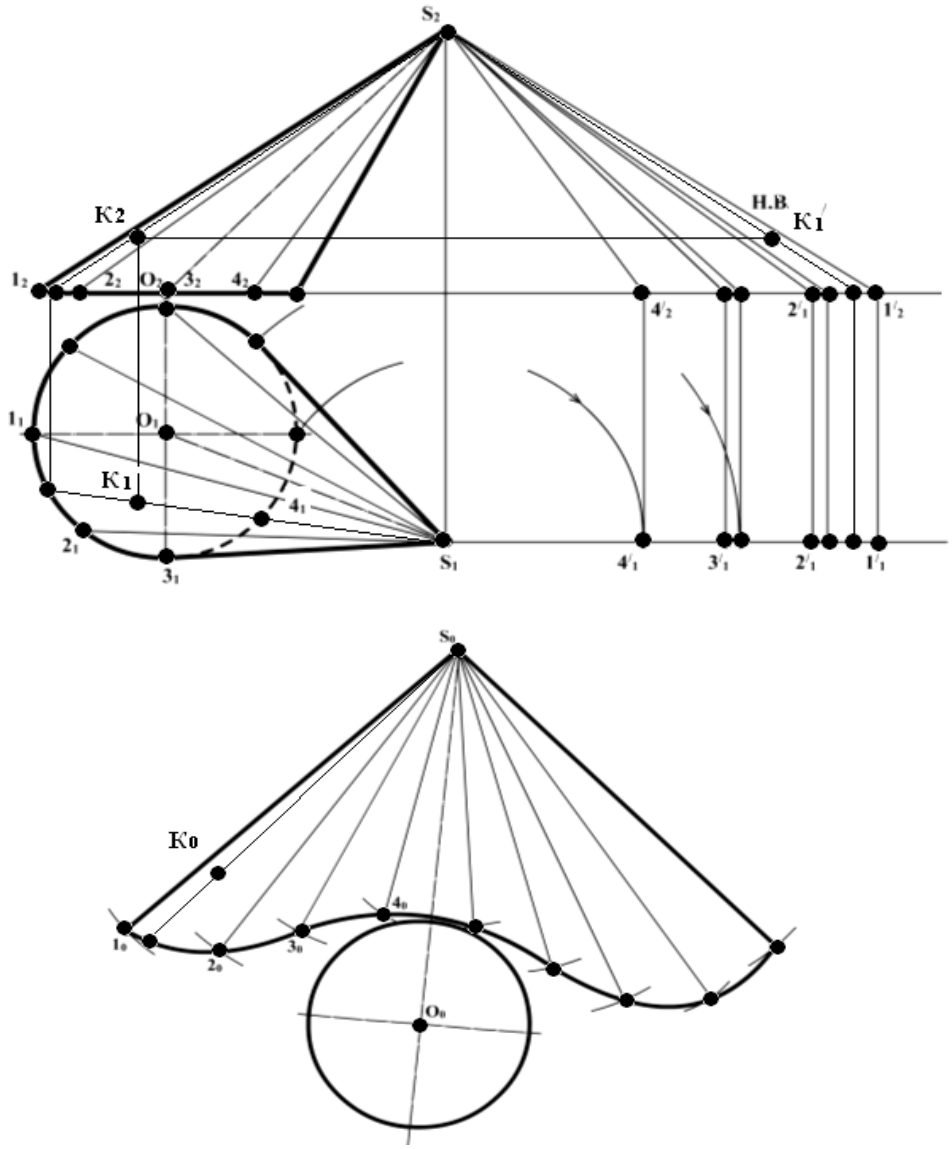
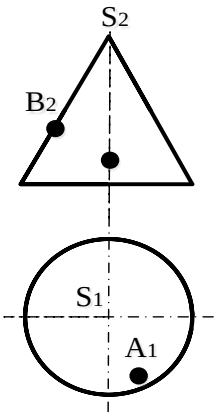
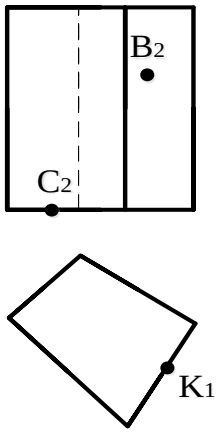
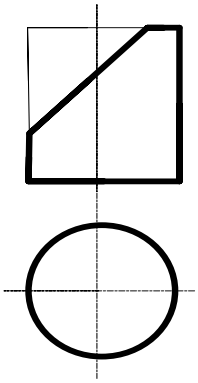
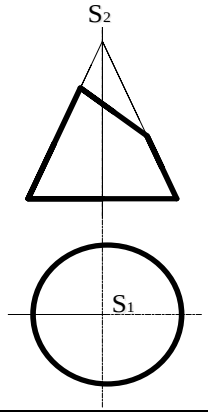
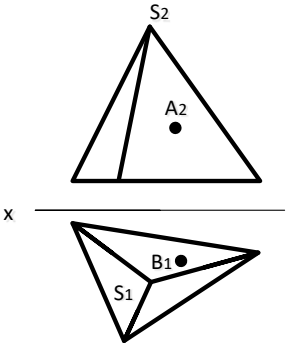
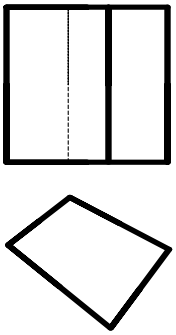


Рис. 6.6 – Розгортка похилого конуса

Задачі для самостійного розв’язування

Побудувати розгортку поверхонь:

Варіант 1, 7  	Варіант 2, 8 
Варіант 3, 9 	Варіант 4, 10 
Варіант 5, 11  	Варіант 6, 12 

Контрольні запитання

1. Що називається розгорткою поверхні?
2. Які поверхні належать до розгортних?
3. Назвіть властивості поверхні, які зберігаються на її розгортці?
4. У чому полягає загальний прийом розв’язання задачі на побудову умовної розгортки нерозгортних поверхонь?
5. Як можна побудувати розгортку зрізаної циліндричної поверхні?
6. Як будується розгортка похилого конуса?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Арустамов Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х. А. Арустамов – М. : Машиностроение, 1978. – 445 с.
2. Бутырь Ю. В. Начертательная геометрия : учеб.-метод. материалы для самостоятельного изучения курса / Ю. В. Бутырь, А. М. Прерис – Х. : УЗПИ, 1989. – 306 с.
3. Цвіркун Л.О. Нарисна геометрія та інженерна графіка : метод. реком. з вивчення дисц. – Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2019. – 104с.
4. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский – М. : Машиностроение, 1977. – 368 с.
5. Гордон В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева – М. : Наука, 1971. – 351 с.
6. Дворніков В. А. Нарисна геометрія (текст лекцій) / В. А. Дворніков – Кривий Ріг : КТУ, 2006. – 125 с.
7. Дукмасова В. С. Методика решения задач по начертательной геометрии: учеб. пособ. / В. С. Дукмасова, В. А. Краснов – Челябинск : Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 81 с.
8. Михайленко В. Є. Інженерна та комп’ютерна графіка / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов – К. : Вища школа, 2002. – 332 с.
9. Магопець О. С. Навчально-методичний посібник до організації самостійної роботи студентів / О. С. Магопець, Т. М. Ауліна – Кіровоград : КНТУ, 2004. – 127 с.
10. Фролов С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов – М. : Машиностроение, 1983. – 240 с.
11. Хаскин А. М. Черчение / А. М. Хаскин – К. : Высшая школа, 1980. – 440 с.
12. Бенке Й.З., Демьян М.Л., Козарь О.П. Технічне креслення. Збірник тестів з інженерної графіки. – К. : Кондор, 2018. – 184 с.
13. Буда А. Г., Гречанюк М. С. Креслення. Елементи нарисної геометрії та проекційне креслення : навчальний посібник – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 112 с.
14. Лусь В.І. Теоретичні і практичні основи виконання проекційного креслення. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 197 с.
15. Волошкевич П.П., Бойко О.О., Базишин П.А. Технічне креслення та комп’ютерна графіка. – К. : Кондор, 2017. – 234 с.
16. Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М. Інженерна графіка. – К. : Каравела, 2015. – 288 с.
17. Шкіца Л.Є., Корнута О.В., Бекіш І.О. Інженерна графіка. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2015. – 301 с.
18. Загородній П.П., Волевач С.В. Нарисна геометрія. – Х. : НУХТ, 2014. – 339 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Г

Головні лінії площини
Горизонталь площини
Горизонтальна площина проекцій
Горизонтальна проекція точки
Горизонтально-проекціююча пряма
Горизонтально-проекціююча площина

К

Конус
Конічні перерізи

Л

Лінія зв’язку
Лінія найбільшого скату
Лінія перетину двох площин

М

Метод паралельного переміщення

П

Піраміда
Площина загального положення
Площина рівня
Проекціююча площина
Проекціююча пряма
Профільна площина проекцій
Профільна проекція точки
Профільно-проекціююча пряма
Профільно-проекціююча площина
Призма
Пряма загального положення
Пряма рівня

Р

Розгортка

С

Слід площини
Слід прямої
Спосіб заміни площин проекцій
Спосіб обертання навколо проекціюючої прямої
Спосіб суміщення
Сфера

Т

Тор

Ф

Фронтальна площина проекцій
Фронталь площини

Фронтальна проекція точки
Фронтально-проекціююча пряма
Фронтально-проекціююча площина

Ц

Циліндр

Навчальне видання

Цвіркун Людмила Олександрівна,

Омельченко Олександр Володимирович,

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
«ПРАКТИКУМ З НАРИСКОЇ ГЕОМЕТРІЇ»

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет
економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського
50042, Дніпропетровська обл.,
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.
Свідоцтво суб’єкта видавничої
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.