

УДК 332.14+51-77

DOI: 10.31891/2307-5740-2019-276-6-211-215

ХОРОЛЬСЬКИЙ В. П., СЕРЕБРЕНИКОВ В. М., КВІТКА Т. В.

Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського, м. Кривий Ріг

МОДЕЛЮВАННЯ ВТРАТИ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ РОБІТНИКІВ НА ТЕХНОГЕННО НЕБЕЗПЕЧНИХ ПІДПРИЄМСТВАХ

В статті розглянуто математичне моделювання втрати працездатності робітників на техногенно небезпечних підприємствах. Метою математичного моделювання є спрямований пошук шляхів оцінки впливу техногенного тиску на стан працездатності робітників з можливостями наступного зменшення такого впливу. Застосування методу «динаміка середніх», який базується на дослідженні неперервних марковських процесів у вигляді систем диференціальних рівнянь, дає можливість побудувати динамічну математичну модель втрати працездатності робітників на техногенно небезпечних підприємствах. Авторами запропоновано математичну модель втрати працездатності робітників на техногенно небезпечних підприємствах у вигляді розв'язку диференціальних рівнянь для середніх чисельностей станів. Згідно з отриманою моделлю проведено графічний аналіз кількості непрацездатних робітників на підприємстві. Запропоновано використовувати функціонал, що характеризує якість заміни робітників, які втратили працездатність внаслідок техногенного тиску, на працездатних робітників введених ззовні. Отримано формули оптимальної величини інтенсивності поповнення ззовні працездатних робітників. Графічно проаналізовано середню кількість працездатних робітників, прийнятих ззовні за певний час, що приходить на одного робітника в початковий момент часу. Одержано аналітичні формули, які дозволяють оцінити середні чисельності робітників, які втратили працездатність внаслідок техногенних причин та характер зміни цієї чисельності залежно від часу.

Ключові слова: працездатність, техногенність, робітники, забруднення, математичне моделювання, диференціальне рівняння.

KHOROLSKY V., SEREBRENIKOV V., KVITKA T.

Donetsk National University of Economics and Trade named after Mykhailo Tugan-Baranovsky, Kryvyi Rih

MODELLING LOSS OF WORKERS 'DISABILITY ON TECHNOGENONALLY DANGEROUS ENTERPRISES

Mining in large enough territories leads to a sharp deterioration of the environment. One of the consequences of such activity is the emergence of areas with man-made pollution, which has an impact on the working condition of workers. Therefore, the problem of loss of working capacity of workers of enterprises that are polluters of territories and its modeling is urgent. The article deals with mathematical modeling of the disability of workers at technogenically dangerous enterprises. The purpose of mathematical modeling is to look for ways to evaluate the impact of technogenic pressure on the health of workers with the possibility of subsequently reducing such effects. The application of the method of "average dynamics", which is based on the study of continuous Markov processes in the form of systems of differential equations, makes it possible to build a dynamic mathematical model of the disability of workers in technogenically dangerous enterprises. The authors propose a mathematical model of the disability of workers in technogenically dangerous enterprises in the form of the solution of differential equations for the average numbers of states. According to the obtained model, a graphical analysis of the number of disabled workers at the enterprise was carried out. It is proposed to use a functional characterizing the quality of replacement of workers who lost their ability to work due to technogenic pressure to able-bodied workers introduced from the outside. Formulas of the optimum value of the intensity of replenishment from outside able-bodied workers were obtained. Graphically analyzed the average number of able-bodied workers taken outside for a certain period of time per worker at the initial time. Analytical formulas have been obtained that allow to estimate the average number of workers who have lost their working capacity due to man-made reasons and the nature of the change of this number depending on time.

Keywords: efficiency, technogenicity, workers, pollution, mathematical modeling, differential equation.

Постановка задачі. Розвиток ринкових відносин в Україні викликав безконтрольну розробку корисних копалин на значних територіях, що призвело до різкого погіршення екології. Як наслідок, на підприємствах, де працює достатньо велика кількість робітників, утворились зони з техногенним забрудненням. Аналіз стану працездатності робітників в техногенних зонах, де знаходяться такі підприємства, переконливо довів великий негативний вплив техногенного забруднення. Разом з цим, знайомство з відповідними науковими публікаціями показало, що даному питанню не приділяється достатньо уваги, хоча з кожним роком ситуація погіршується. Внаслідок цього, враховуючи актуальність проблеми, від науковців вимагається пильніша увага до аналізу втрати працездатності робітників підприємств, що розташовані в техногенних зонах. Однією із можливих спроб вирішення цих питань, згідно з сучасними тенденціями використання ІТ-технологій, є застосування математичного моделювання втрати працездатності робітників на підприємствах з техногенним тиском.

Аналіз досліджень та публікацій. У вітчизняній науці існують розробки в галузі аналізу забруднення природного середовища, але питання, пов'язані з управлінням діяльністю промислового комплексу регіону щодо мінімізації техногенного впливу на втрату працездатності робітників, недостатньо висвітлені. Теоретичним підґрунтям таких досліджень є наукові розробки вітчизняних та іноземних вчених, таких як Р.Р. Білоскурський, В.М. Геєць, М.Р. Когаловський, І.М. Ляшенко, М.М. Моїсєєв, О.І. Черняк та інші. Загальні питання еколого-економічної теорії висвітлено у працях Т.А. Акімова, А.В. Гирусова, Л.М. Горбача, А. Ендерса, Н.С. Сердитової,

М.А. Хлобистова, В.Я. Шевчука. Вплив техногенного забруднення на здоров'я людей досліджували В.П. Казначеев, І.М. Комарницький, В.М. Пономаренко та багато інших вчених.

Високо оцінюючи наукові досягнення у розв'язанні проблеми визначення обсягу економічного відшкодування збитку від впливу техногенного забруднення довкілля, треба відзначити, що розроблені теоретико-методичні підходи орієнтовані на відшкодування збитків, завданих природному середовищу. Але практично відсутні роботи щодо зменшення впливу техногенного тиску на втрату працездатності населення. Це зумовлює необхідність подальшого вивчення та вдосконалення методів управління на територіях з техногенним тиском [1].

Формулювання цілей. Метою статті є дослідження впливу техногенного тиску на працездатність робітників техногенно небезпечних підприємств шляхом математичного моделювання втрати працездатності робітників внаслідок техногенного тиску з подальшою розробкою рекомендацій, щодо зменшення негативних наслідків.

Виклад основного матеріалу дослідження. В ході математичного моделювання впливу техногенної забрудненості на втрату працездатності робітників підприємств виникає питання про вибір структури моделі. Під структурним синтезом моделі розуміється функціональні співвідношення без врахування величин її параметрів. Крім того, при структурному синтезі моделі впливу техногенної забрудненості підприємств на втрату працездатності робітників треба враховувати динамічний характер впливу, тобто залежність від часу. Але особливим моментом при структурному синтезі моделі є те, що вона повинна носити статистичний характер. Дійсно, число робітників, які працюють на техногенно небезпечних підприємствах, досить велике і неможливо прослідити за втратою працездатності кожного робітника. Внаслідок цього, щоб розв'язати це питання, треба користуватися узагальненими характеристиками, наприклад, середніми величинами, які безпосередньо пов'язані з характеристиками, які досліджуються. Це дозволяє застосувати «метод динаміки середніх» [2].

Розглянемо контингент робітників підприємства, яке має техногенну забрудненість. Нехай кількість робітників, які працюють на такому підприємстві, становить величину N , кожний з яких може випадковим чином переходити зі одного стану в другий стан. Припустимо, що усі потоки подій, які переводять робітника із одного стану в інший, є пуассоновські. Тоді процес, який протікає в зоні, є марковським. Таким чином, кожний робітник може знаходитися в одному із двох станів: s_0 – робітник працездатний, s_1 – робітник непрацездатний. Перехід робітника із одного стану в другий відбувається під дією потоку втрати працездатності інтенсивністю λ . Граф станів робітника представлений на рис. 1.

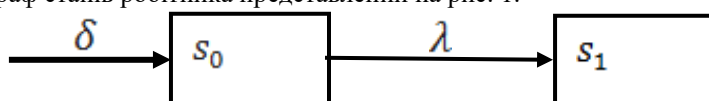


Рис. 1. Граф станів робітника.

Диференціальні рівняння для середніх чисельностей станів, згідно графу на рис.1, запишуться у вигляді

$$\frac{dm_0}{dt} = -\lambda \cdot m_0 + \delta, \quad (1)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \lambda \cdot m_0, \quad (2)$$

де m_0 – середня чисельність здорових робітників,

m_1 – середня чисельність непрацездатних робітників внаслідок техногенного тиску,

λ – інтенсивність втрати працездатності внаслідок техногенного тиску,

δ – інтенсивність поповнення ззовні середньої чисельності працездатних робітників.

Крім того, треба виділити початкові умови, які визначають стан робітників в початковий момент часу

$$m_0(t=0) = m_{00}, \quad (3)$$

$$m_1(t=0) = 0. \quad (4)$$

Згідно умов (3), (4), вважається, що в початковий момент часу усі робітники працездатні.

Рівняння (1), (2) і початкові умови (3), (4) визначають задачу Коші [3].

Далі доцільно представити задачу Коші (1), ..., (4) в безрозмірному вигляді, скориставшись теорією подібності [4]

$$\frac{d\hat{m}_0}{d\theta} = -\hat{m}_0 + \hat{\delta}, \quad (5)$$

$$\frac{d\hat{m}_1}{d\theta} = \hat{m}_0, \quad (6)$$

$$\hat{m}_0(\theta=0) = 1, \quad (7)$$

$$\hat{m}_1(\theta=0) = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } \theta = \lambda \cdot t, \hat{m}_0 = \frac{m_0}{m_{00}}, \hat{m}_1 = \frac{m_1}{m_{00}}, \hat{m}_{10} = \frac{m_{10}}{m_{00}}, \hat{\delta} = \frac{\delta}{\lambda \cdot m_{00}}.$$

В даному випадку змінна θ визначає безрозмірний час, який вимірюється в одиницях величини $1/\lambda$. Змінна $\hat{\delta}$ визначає безрозмірну величину, яка порівнює інтенсивність поповнення ззовні середньої чисельності

робітників відносно інтенсивності втрати працездатності внаслідок техногенного тиску на одного робітника в початковий момент часу. Інші безрозмірні величини віднесені на одного робітника в початковий момент часу. Перехід до безрозмірних величин дає можливість зменшити число змінних, представивши їх у вигляді співмножників, що значно спрощує подальші дослідження. Крім того, наявність мультиплікативних комплексів дає можливість при одній величині комплексу задати безліч комбінацій із множників, які утворюють цей комплекс. Зрозуміло, що це дозволяє дослідити значно більший матеріал, не проводячи додаткових обчислень.

Враховуючи, що рівняння (5) є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними, знаходимо послідовно його розв'язок

$$\frac{d\hat{m}_0}{d\theta} = -\hat{m}_0 + \hat{\delta}, \quad \int \frac{d\hat{m}_0}{-\hat{m}_0 + \hat{\delta}} = \int d\theta, \quad -\ln|-\hat{m}_0 + \hat{\delta}| = \theta + C, \quad (9)$$

де C – довільна стала.

Для знаходження величини довільної сталої скористаємось початковою умовою (7)

$$C = -\ln|\hat{\delta} - 1|. \quad (10)$$

Таким чином, згідно (9) і (10) розв'язання задачі Коші (5), (7) має вигляд

$$-\ln|-\hat{m}_0 + \hat{\delta}| = \theta - \ln|\hat{\delta} - 1|, \quad \ln\left|\frac{\hat{\delta} - \hat{m}_0}{\hat{\delta} - 1}\right| = -\theta, \quad \frac{\hat{\delta} - \hat{m}_0}{\hat{\delta} - 1} = e^{-\theta}, \quad \hat{\delta} - \hat{m}_0 = (\hat{\delta} - 1)e^{-\theta}, \quad \hat{m}_0 = \hat{\delta} - (\hat{\delta} - 1)e^{-\theta}. \quad (11)$$

Для розв'язання задачі Коші (6), (8) скористаємось формулою (11) $\frac{d\hat{m}_1}{d\theta} = \hat{\delta} - (\hat{\delta} - 1)e^{-\theta}$.

Інтегруючи останнє рівняння, послідовно отримуємо

$$\int d\hat{m}_1 = \int (\hat{\delta} - (\hat{\delta} - 1)e^{-\theta}) d\theta \quad \hat{m}_1 = \hat{\delta} \cdot \theta + (1 - \hat{\delta})(1 - e^{-\theta}) + C, \quad (12)$$

де C – довільна стала.

Згідно початкових умов (8) знаходимо, що

$$C = 0. \quad (13)$$

Згідно (12) і (13), розв'язання задачі Коші (6), (8) має вигляд

$$\hat{m}_1 = \hat{\delta} \cdot \theta + (1 - \hat{\delta})(1 - e^{-\theta}). \quad (14)$$

Таким чином, формули (11) і (14) визначають в безрозмірному вигляді математичну модель втрати непрацездатності робітників на техногенно небезпечних підприємствах.

Згідно формул (11) і (14) на рис. 2 і 3 представлені відповідні графіки. Аналіз графіків, представлених на рис. 2, показує, що з часом кількість працездатних робітників на підприємствах внаслідок техногенного тиску спадає, але при зростанні відносної інтенсивності поповнення чисельності працездатних робітників ззовні швидкість спадання зменшується. Аналіз графіків, представлених на рис. 3, показує, що з часом кількість непрацездатних робітників на підприємствах, які захворіли внаслідок техногенного забруднення, зростає, при цьому при зростанні відносної інтенсивності поповнення чисельності працездатних робітників ззовні швидкість теж зростає.

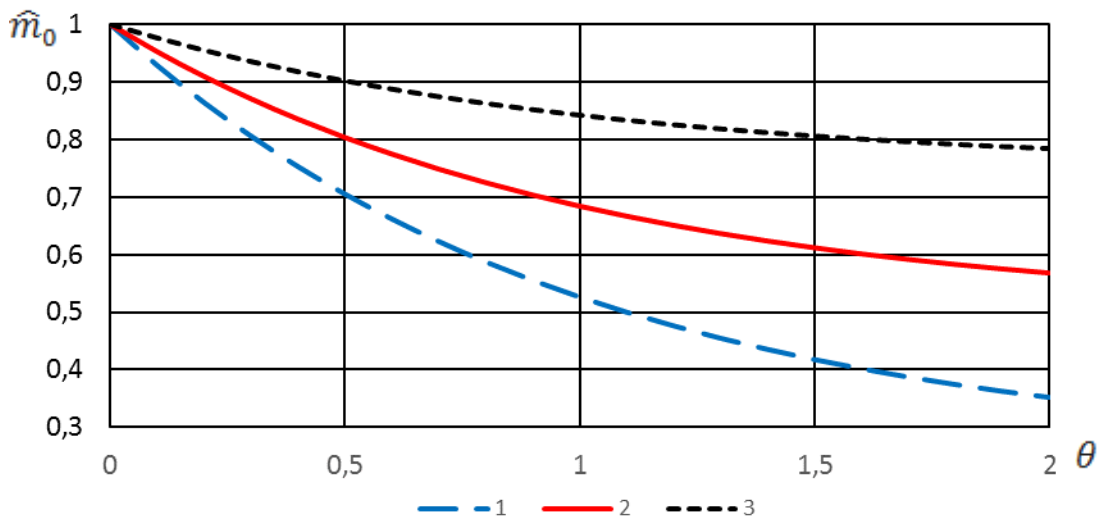


Рис. 2. Залежність відносної кількості працездатних робітників від часу ($1 - \hat{\delta} = 0,25$; $2 - \hat{\delta} = 0,5$; $3 - \hat{\delta} = 0,75$)

Математичне моделювання втрати непрацездатності робітників на підприємствах внаслідок техногенного тиску наводить на думку про можливість управління кількістю працездатних робітників на підприємствах з техногенним тиском. Дійсно, на підприємствах під техногенним тиском внаслідок захворювання зменшується кількість працездатних робітників, які є продуктивною силою для реалізації відповідних виробничих відносин на цьому підприємстві. Для компенсації цього убутку продуктивної сили потрібен приплив ззовні свіжої продуктивної сили, який в нашому випадку характеризується інтенсивністю

поповнення чисельності працездатних робітників на підприємстві. Разом з цим, виникає питання про рівнозначність заміни на підприємствах одних робітників іншими. Дійсно, прийняті ззовні робітники напевно будуть відрізнятися як по досвіду, так і за вимогами до роботодавця. Розглянемо, для пояснення випадок з моделюванням втрати працездатності робітників на підприємстві внаслідок техногенного тиску, представлений в безрозмірній формі формулою (14).

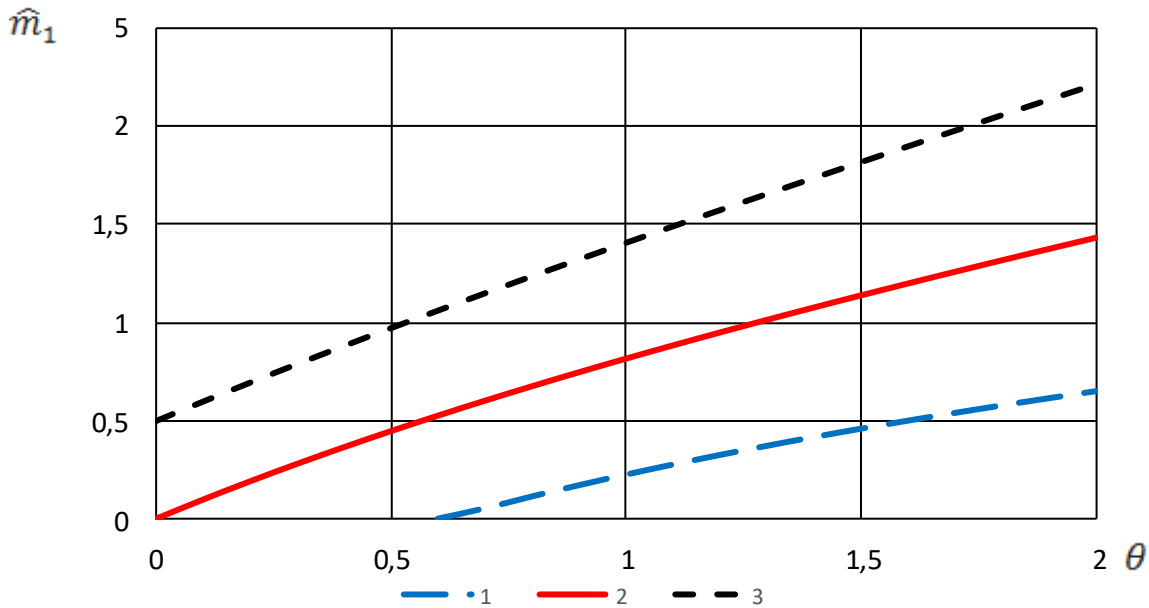


Рис. 3. Залежність відносної кількості непрацездатних робітників внаслідок техногенного тиску від часу ($1 - \delta = 0,25$; $2 - \delta = 0,5$; $3 - \delta = 0,75$).

Для реалізації оптимального управління кількістю працездатних робітників на підприємстві випишемо відповідний функціонал, який характеризує якість заміни робітників, які втратили працездатність внаслідок техногенного тиску, на працездатних робітників, викликаних ззовні,

$$\Phi(\delta) = \int_0^{\Theta} (c_1 \cdot \delta - c_2 \cdot \tilde{m}_1)^2 d\theta, \quad (15)$$

де c_1, c_2 – ваговий вклад прийнятих ззовні працездатних і непрацездатних робітників на підприємствах, відповідно,

\tilde{m}_1 – середня кількість непрацездатних робітників, коли $\delta = 0$,

$[0, \Theta]$ – проміжок часу, який розглядається.

Згідно формулі (14) функціонал (15) приймає вигляд

$$\Phi(\delta) = \int_0^{\Theta} (c_1 \cdot \delta - c_2 \cdot (1 - e^{-\theta}))^2 d\theta \quad (16)$$

Згідно необхідної умови існування екстремуму похідна функціонала (16) повинна дорівнювати нулю [5]

$$\Phi'(\delta) = \left(\int_0^{\Theta} (c_1 \cdot \delta - c_2(1 - e^{-\theta}))^2 d\theta \right)' = 0.$$

Обчислюємо похідну під знаком інтеграла і знаходимо оптимальну величину δ

$$\int_0^{\Theta} (c_1 \cdot \delta - c_2(1 - e^{-\theta})) d\theta = 0, \quad \delta \cdot c_1 \cdot \Theta = c_2 \int_0^{\Theta} (m_0(1 - e^{-\theta})) d\theta,$$

$$\delta_{opt} = \frac{c_2 \int_0^{\Theta} (m_0(1 - e^{-\theta})) d\theta}{c_1 \cdot \Theta}. \quad (17)$$

Обчислимо інтеграл, які входять в формулу (17)

$$\int_0^{\Theta} (1 - e^{-\theta}) d\theta = \int_0^{\Theta} (1 - e^{-\theta}) d\theta = \Theta - 1 + e^{-\Theta}$$

В результаті отримуємо оптимальну величину (17) в явній формі

$$\delta_{opt} = \gamma \left(1 - \frac{1 - e^{-\Theta}}{\Theta} \right), \quad (18)$$

де $\gamma = \frac{c_2}{c_1}$.

З урахуванням того, що

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda \cdot m_{00}} \quad \text{і} \quad \Theta = \lambda \cdot T,$$

де T – час спостереження, знаходимо згідно (18) оптимальну дійсну величину інтенсивності поповнення ззовні працездатних робітників

$$\delta_{opt} = \frac{\gamma \cdot m_{00}}{T} (\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}). \quad (19)$$

Таким чином, формула (19) шляхом введення зворотного зв'язку по каналу інтенсивності прийнятих ззовні робітників дозволяє стабілізувати кількість працездатних робітників, забезпечивши необхідні умови для роботи підприємств.

Для графічного аналізу формули (19) доцільно представити її в безрозмірному вигляді, скоротивши число змінних. Тоді середня кількість працездатних робітників, прийнятих ззовні за час T , яка приходить на одного робітника в початковий момент часу, знаходиться по формулі

$$\Delta_{opt} = \gamma(\theta - 1 + e^{-\theta}), \quad (20)$$

де $\Delta_{opt} = \frac{\delta_{opt} T}{m_{00}}$, $\theta = \lambda T$.

На рис. 4 представлені графіки, побудовані згідно з формулою (20).

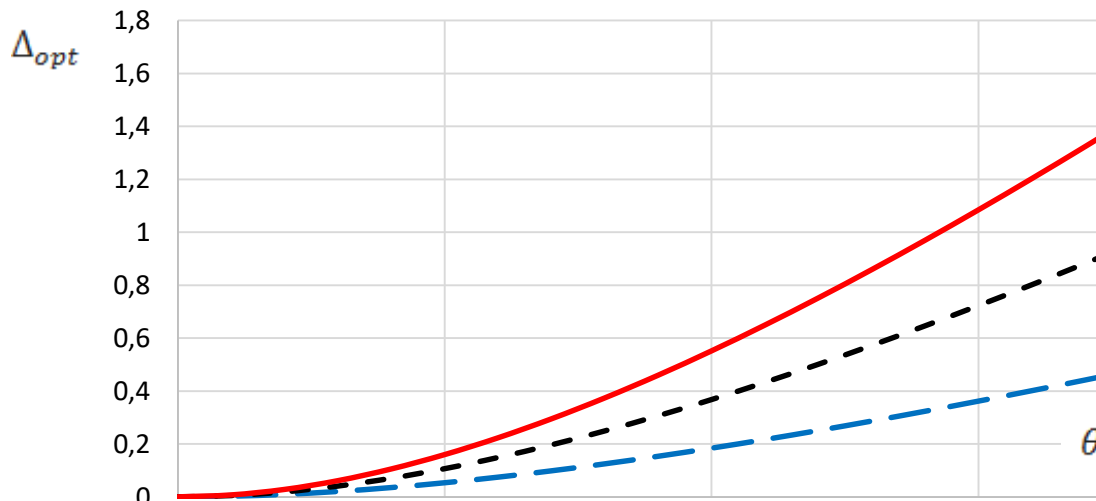


Рис. 4. Залежність оптимальної відносної середньої чисельності прийнятих ззовні робітників за час T від безрозмірного часу ($1 - \gamma = 0,5$; $2 - \gamma = 1$; $\gamma = 1,5$)

Аналіз графіків рис. 4 показує, що зі зростанням на підприємстві числа робітників, які втратили працездатність з причин техногенного забруднення, зростає середня кількість прийнятих ззовні працездатних робітників. При цьому, якщо затрати на прийнятого ззовні робітника зростають, то це призводить до зменшення числа прийнятих робітників.

Висновки. В результаті проведених досліджень авторами статті запропоновано математичну модель втрати працездатності робітників на техногенно небезпечних підприємствах у вигляді розв'язку диференціальних рівнянь для середніх чисельностей станів. Згідно з отриманою моделлю проведено графічний аналіз кількості непрацездатних робітників на підприємстві. Запропоновано використовувати функціонал, що характеризує якість заміни робітників, які втратили працездатність внаслідок техногенного тиску, на працездатних робітників введених ззовні. Отримано формули оптимальної величини інтенсивності поповнення ззовні працездатних робітників. Графічно проаналізовано середню кількість працездатних робітників, прийнятих ззовні за певний час, що приходить на одного робітника в початковий момент часу. Одержано аналітичні формули, які дозволяють оцінити середні чисельності робітників, які втратили працездатність внаслідок техногенних причин та характер зміни цієї чисельності залежно від часу.

Література

1. Хорольський В. П. Теорія та практика інноваційно-інтелектуального розвитку регіону з техногенними територіями / В. П. Хорольський, К. Д. Хорольський, К. Г. Рябикіна ; [за заг. ред. В. П. Хорольського, О. Б. Чернеги]. – Кривий Ріг : Видавець ФО-П Чернявський Д.О., 2019. – 484 с.
2. Ивченко Г.И. Теория массового обслуживания : учебное пособие / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М. : Librokom, 2015. – 306 с.
3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : научное пособие / А.Ф. Филиппов. – М. : URSS, 2015. – 240 с.
4. Гухман А.А. Введение в теорию подобия : научное пособие / А.А. Гухман. – М. : URSS, 2016. – 296 с.
5. Шершнев В.Г. Математический анализ : учебное пособие / В.Г. Шершнев. – М. : ИНФРА-М, 2014. – 288 с.

References

1. Khorolskyi V. P. Teoriia ta praktyka innovatsiino-intelektualnoho rozvytku rehionu z tekhnohennymy terytoriiamy / V. P. Khorolskyi, K. D. Khorolskyi, K. H. Riabykina ; [za zah. red. V. P. Khorolskoho, O. B. Cherneny]. – Kryvyi Rih : Vydavets FO-P Cherniavskiy D.O., 2019. – 484 s.
2. Ivchenko G.I. Teoriya massovogo obsluzhivaniya : uchebnoe posobie / G.I. Ivchenko, V.A. Kashtanov, I.N. Kovalenko. – M. : Librokom, 2015. – 306 s.
3. Filippov A.F. Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy : nauchnoe posobie / A.F. Filippov. – M. : URSS, 2015. – 240 s.
4. Guhman A.A. Vvedenie v teoriyu podobiya : nauchnoe posobie / A.A. Guhman. – M. : URSS, 2016. – 296 s.
5. Shershnev V.G. Matematicheskij analiz : uchebnoe posobie / V.G. Shershnev. – M. : INFRA-M, 2014. – 288 s.