МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.

Вища математика

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни

Ступінь: бакалавр

Кривий Ріг
2019

МИНИСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.

Вища математика

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни
Частина II

Ступінь: бакалавр

Затверджено на засіданні
кафедри загальноінженерних дисциплін
та обладнання
Протокол №1
від «28» серпня 2019 р.

Схвалено навчально-методичною
радою
ДонНУЕТ
Протокол №1
від «29» серпня 2019 р

.

Кривий Ріг
2019

УДК 512(076)
К 56

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.

К56 Вища математика [Текст] : метод. рекомендації до вивч. дисц. Ч.ІІ / О.К. Копайгора, О.С. Ляшенко.; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання. – Кривий Ріг : ДонНУЕТ, 2019. – 54 с.

Методичні рекомендації призначені для ЗВО всіх форм навчання інженерних спеціальностей ГМБ, ЕМБ і покликані допомогти студентам організувати вивчення дисципліни «Вища математика» завдяки інформації щодо змісту модулів та тем дисципліни, планів практичних занять, завдань для самостійного вивчення та розподілу балів за видами робіт, що виконуються студентами протягом вивчення дисципліни. Методичні рекомендації містять перелік питань для підготовки до підсумкового контролю та перелік основної та додаткової літератури.

УДК 512(076)

ЗМІСТ

ВСТУП ………..……………………………………………………………….. 3

ЧАСТИНА 1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»… …………………………… 4

ЧАСТИНА 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ……….…………………………………………… 11

Змістовий модуль 1.Диференціальні рівняння……………………………. 12

Змістовий модуль 2. Ряди.. 27

ЧАСТИНА 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ…………………..…………… 38

Змістовий модуль 1.Диференціальні рівняння……………………………. 39

Змістовий модуль 2. Ряди.. 46

ВСТУП

Загальний курс вищої математики є фундаментом освіти спеціаліста-інженера. Сучасна наука та техніка все більше застосовує математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це обумовлено передусім швидким розвитком обчислювальної техніки, завдяки чому значно розширюються можливості успішного застосування математики в розв'язанні конкретних задач.

Курс вищої математики належить до загальноосвітнього циклу дисциплін і викладається в перших двох семестрах. Теми, що розглядаються в курсі вищої математики, а також кількість часу, який планується для викладання кожної з цих тем, нерозривно зв'язані з вимогами спеціальних та інших загальноосвітніх кафедр, що стосується специфіки їх дисциплін.

Багато уваги приділено аналітичній геометрії, елементам лінійної алгебри та диференціальному і інтегральному численням, без яких неможливо вивчати в вузі теми дисциплін, як фізика, теоретична механіка, нарисна геометрія. Край необхідно для теоретичної механіки та курсу теоретичних основ електротехніки знання з теорії диференціальних рівнянь.

ЧАСТИНА 1.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

1. Опис дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Обов'язкова *(для студентів спеціальності "назва спеціальності")* / вибіркова дисципліна	Обов'язкова для студентів спеціальностей 133 «Галузеве машинобудування», 142 «Енергетичне машинобудування»
Семестр *(осінній / весняний)*	**весняний**
Кількість кредитів	**5**
Загальна кількість годин	**150**
Кількість змістовних модулів	**2**
Лекції, годин	**39**
Практичні / семінарські, годин	**24**
Лабораторні, годин	
Самостійна робота, годин	**87**
Тижневих годин для денної форми навчання:	
аудиторних	**4,2**
самостійної роботи студента	**5,8**
Вид контролю	**екзамен**

2. Програма дисципліни

Ціль – формування у майбутніх спеціалістів базових математичних знань для розв'язування задач у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання виробничих задач.

Завдання: надання студентам знань із основних розділів вищої математики: означень, теорем, правил; доведення основних теорем; вивчення закономірностей окремого випадкового явища та масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик; формування початкових умінь самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне мислення; виробити вміння формулювати свої знання, розв'язувати прикладні задачі і будувати економіко-математичні моделі.

Предмет:основні поняття та терміни вищої математики

Зміст дисципліни розкривається в темах:

1. Комплексні числа
2. Звичайні диференціальні рівняння
3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків
4. Числові ряди.
5. Функціональні та степеневі ряди
6. Ряди Фур'є

3. Структура дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма навчання)				
	усього	у тому числі			
		лекц.	пр./сем.	лаб.	СРС
1	2	3	4	5	6
Змістовий модуль 1. Диференціальні рівняння					
Тема 1. Комплексні числа	24	6	4	-	14
Тема 2. Звичайні диференціальні рівняння І порядку	24	6	4	-	14
Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків	27	8	4		15
Разом за змістовим модулем 1	**75**	**20**	**12**	**-**	**43**
Змістовий модуль 2. Ряди.					
Тема 4. Числові ряди	25	6	4	-	15
Тема 5. Функціональні та степеневі ряди	25	6	4	-	15
Тема 6. Ряди Фур'є.	25	7	4		14
Разом за змістовим модулем 2	**75**	**19**	**12**		**44**
Усього годин	**150**	**39**	**24**	**-**	**87**

4. Теми семінарських/практичних/лабораторних занять

№ з/п	Вид та тема практичного заняття	Кількість годин
1	Практична робота 1. Комплексні числа	4
2	Практична робота 2. Звичайні диференціальні рівняння І порядку	4
3	Практична робота 3. Диференціальні рівняння вищих порядків	4
4	Практична робота 4. Числові ряди.	4
5	Практична робота 5. Функціональні та степеневі ряди.	4
6	Практична робота 6. Ряди Фур'є	4

5. Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання згідно варіанту

6. Обсяги, зміст та засоби діагностики самостійної роботи

Вид та тема практичних занять	Кількість годин самостій-ної роботи	Зміст самостійної роботи	Засоби діагностики
Змістовий модуль 1. Диференціальні рівняння			
1. Комплексні числа	14	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Комплексні числа»	Опитування, перевірка задач
2. Звичайні диференціальні	14	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу,	Опитування, перевірка задач

рівняння І порядку		необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Звичайні диференціальні рівняння».	
3. Диференціальні рівняння вищих порядків	15	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків»	Опитування, перевірка задач
Разом змістовий модуль 1	**43**		
Змістовий модуль 2. Ряди			
4. Числові ряди	15	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Числові ряди».	Опитування, перевірка задач
5. Функціональні та степеневі ряди	15	1 Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв'язування задач. 2.Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Функціональні та степеневі ряди»	Опитування, перевірка задач
6. Ряди Фур'є	14	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв'язування задач. 2.Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Ряди Фур'є»	Опитування, перевірка задач
Разом змістовий модуль 2	**44**		
Разом	**87**		

7. Матриця зв'язку між дисципліною/ змістовим модулем, результатами навчання та компетентностями

Результати навчання	Компетентності												
	Загальні							Предметно-спеціальні					
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
1. здатність застосування математичних знань у процесі розв'язування економічних задач			+		+						+		

2.здатністьпобудовиматематичних моделей різних об'єктів та процесів			+		+						+		
3. здатність дослідження процесів за допомогою диференційного та інтегрального числення			+		+						+		
4. здатність використовувати ряди в ході аналізу взаємозв'язків різних показників			+		+						+		

8. Методи викладання

Лекції, практичні заняття, самостійна робота (розв'язування задач).

9. Методи оцінювання

Екзамен.

10. Розподіл балів, які отримують студенти

Відповідно до системи оцінювання знань студентів ДонНУЕТ, рівень сформованості компетентностей студента оцінюються у випадку проведення екзамену: впродовж семестру (50 балів) та при проведені підсумкового контролю - екзамену (50 балів).

Оцінювання студентів протягом семестру

№ теми практичного заняття	Вид роботи/бали					
	Тестові завдання, письмові опитування	Ситуаційні завдання, задачі	Обговорення теоретичних питань теми	Індиві-дуальне завдання	ПМК	Сума балів
Змістовий модуль 1						
Тема 1	2		1	4	2	9
Тема 2	2		2	3	2	9
Тема 3	1		2	3	1	7
Разом змістовий модуль1	5		5	10	5	**25**
Змістовий модуль 2						
Тема 4	2		2	3	1	8
Тема 5	1		1	3	2	9
Тема 6	2		2	4	2	8
Разом змістовий модуль 2	5		5	10	5	**25**
Разом	10		10	20	10	**50**

Загальне оцінювання результатів вивчення дисципліни

Для виставлення підсумкової оцінки визначається сума балів, отриманих за результатами екзамену та за результатами складання змістових модулів. Оцінювання здійснюється за допомогою шкали оцінювання загальних результатів вивчення дисципліни (модулю).

Оцінка		
100-бальна шкала	**Шкала ECTS**	**Національна шкала**
90-100	A	5, «відмінно»

80-89	B	4, «добре»
75-79	C	
70-74	D	3, «задовільно»
60-69	E	
35-59	FX	2, «незадовільно»
0-34	F	

11. Методичне забезпечення

1.Навчальний посібник.
2. Електронний конспект лекцій.
3. Методичні вказівки з вивчення дисципліни.
4. Комплекти індивідуальних завдань.
5.Навчальна та наукова література, нормативні документи.

12. Рекомендована література

Основна

1. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 160 с.

2. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.

3. Вища математика для економістів. [Електронний ресурс] : навчальний підручник / Т. В. Зінченко, О. І. Островська, В. М. Сафонов – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.30 – 07.06.2017.

4. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О. М.Мулява, В .П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.

5. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В. В. Листопад, О. А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.

6. Мартиненко М. А. (Теор. поля, мат. фізика), Юрик І. І. (Функ. комп. змін., операц. числ.) Вища математика. Спеціальні розділи : Навч. посіб. – К. : Ін-т. математики НАНУ, 2015. – 539с.

7. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: Навчальний посібник / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик / Вид.4-е,доповн. та перер. - К.: Видавничий Дім «Слово», 2014. – 296 с.

8. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика/В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л. : Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Допоміжна

1. Мартиненко М. А. Вища математика. [Електронний ресурс] : навч. посіб. / М.А. Мартиненко, О.М. Нещадим, В.М. Сафонов – К. : НУХТ,

2016.-230 с. Реєстраційний номер електронного посібника у НМУ 52.22 – 25.06.2016.

2. Зінькевич О. П. Вища математика. [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О.П. Зінькевич, В. М. Сафонов, О. М. Нещадим– К. : НУХТ, 2016.-193 с. Реєстраційний номер електронного посібника у НМУ 52.23 – 25.06.2016.

3. Шипачев В. С. Высшая математика : рекоменд. М-вом образования и науки РФ учебник для студ. высш. учеб. завед. / В.С. Шипачев; М-во образования и науки РФ. – М.: Высш. шк., 2010. – 479 с.

4. Шестаков А.А. Курс высшей математики. Интегральноеисчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ: учеб. для студ. вузов / А. А. Шестаков, И. А. Малышева, Д. П. Полозков; под ред. А. А. Шестакова. – М. : Высшая школа, 1987. – 320 с.

5. Шкіль М. І. Вища математика: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди: підручник у 3 кн. Кн. 2 / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – К. : Либідь, 2004. – 251 с.

6. Шкіль М. І. Вища математика: підручник у 3 кн. Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння / М. І. Шкіль, Т. В: Колесник. – К. : Либідь, 2004. – 351 с.

Інформаційні ресурси

1. Вища освіта України і Болонський процес / Навчальна програма. – Київ - Тернопіль: ТДПУ ім. В. Гнатюка, 2004. – 18 с.

2. ІСУЯ 7.5.1 – 03.01/УН «Загальні вимоги до організації процесу проведення навчальних занять».

3. ІСУЯ 7.5.1 – 03.02/УН «Загальні вимоги до організації методичного забезпечення виконання індивідуальних завдань з дисциплін».

4. ІСУЯ 7.5.1 – 03.03/УН «Загальні вимоги до організації виконання індивідуальних завдань».

5. ІСУЯ 7.5.1 – 03.04/УН «Загальні вимоги до організації СРС»

6. ІСУЯ 7.5.1 – 03.05/УН «Загальні вимоги до організації НДРС»

ЧАСТИНА 2.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
Тема 1. Комплексні числа

1.Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1.Означення комплексного числа і форми його представлення.

2.Зв’язок алгебраїчної та тригонометричної форм комплексного числа.

3.Умова рівності комплексних чисел. Спряжені комплексні числа.

4.В якому випадку комплексне число є звичайним дійсним числом?

5.Що називається дійсною (Re z) частиною комплексного числа, а що уявною (Im z)?

6.Арифметичні дії над комплексним числом в алгебраїчній формі.

7.Що називається «модулем» і «аргументом» комплексного числа?

8.Формула Муавра для піднесення до ступеня комплексного числа (показник – натуральне число).

9. Формула Муавра для добування кореня n- ступеня з комплексного числа.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв’язування завдання.

Приклад 1. Розв’язати квадратне рівняння з від’ємним дискримінантом.
а) $x^2-4x+5=0$

Розв’язання: $Д=в^2-4ас=(-4)^2-4\cdot 5=16-20=-4;\ \sqrt{Д}=\sqrt{-4}=2i$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{Д}}{2a}$$

$$x_1=\frac{4-2i}{2}=\frac{2(2-i)}{2}=2-i$$

$$x_2=\frac{4+2i}{2}=\frac{2(2+i)}{2}=2+i$$

Приклад розв’язування завдання.

Приклад 2. Скласти квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами за його коренями: $x_1=2-\frac{1}{2}i;\ x_2=2+\frac{1}{2}i;$

Розв’язання: За властивостями коренів квадратного рівняння (теорема Вієта): $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$; $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$; Знаходимо коефіцієнти:

$$-\frac{b}{a}=x_1+x_2=(2-\frac{1}{3}i)+(2+\frac{1}{3}i)=2-\frac{1}{3}i+2+\frac{1}{3}i=4$$

$$\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2=(2-\frac{1}{3}i)\cdot(2+\frac{1}{3}i=22–(\frac{1}{3}i)2=4+\frac{1}{9}=\frac{37}{9}$$

числа x_1 та x_2 є коренями рівняння: $x^2-4x+\frac{37}{9}=0$,

помножимо на *9* і одержимо шукане рівняння: $9x^2-36x+37=0.$

Приклад 3. Виконати додавання комплексних чисел:

Розв'язання: **а)** *(3+2i)+(-2+i)=(3-2)+(2+1)i=1+3i*

б) *(2-i)+(4-5i)=(2+4)+(-1-5)i=6-6i*

в) *(3+2i)+(3-2i)=(3+3)+(2-2)i=6+0i=6*

г) *(2–3i)+(-2+3i)=(2-2)+(-3+3)i=0+0i=0*

Приклад 3. Виконати віднімання комплексних чисел:

Розв'язання: а) *(2+3i)-(3-2i)=(2-3)+(3-(-2))i=-1+(3+2)i=-1+5i*

б) *(0,3+2i)-(0,3-3i)=(0,3-0,3)+(2+3)i=0+5i=5i*

Приклад 4. Виконати множення комплексних чисел:

Розв'язання: **а)** *(4-5i)·(2+3i)=8+12i-10i-15i2=8+2i+15=23+2i*

б) *(2-5i)·(2+5i)=22-(5i)2=4-25i2=4+25=29*

Приклад 5. Знайти частку комплексних чисел:

Розв'язання:

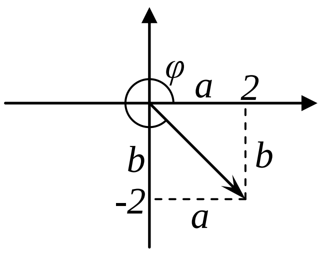
а) $\frac{2+5i}{3-2i}=\frac{(2+5i)}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i}=\frac{6+4i+15i+10i^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{6+19i-10}{9+4}=\frac{-4+19i}{13}=\frac{-4}{13}+\frac{19i}{13}$

б) $\frac{2+i}{i}=\frac{2+i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-2i-i^2}{-i^2}=\frac{-2i-(-1)}{-(-1)}=\frac{1-2i}{1}=1-2i$

в) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1+i)^2}{1-i^2}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$

Приклад 6. Знайти аргументи комплексних чисел:

Розв'язання: а) *Z=8*. Вектор даного числа розташований на дійсній вісі і напрями їх співпадають, отже $\varphi=0$.



б) *Z=-2i.* Вектор його розташований на *ОУ* і протилежно до неї направлений, отже $\varphi=\frac{3\pi}{2}$.

в) *Z=2-2i*

Побудуємо вектор даного числа. З малюнка знаходимо φ, як $2\pi-\varphi_0$. $tg\varphi_0=\left|\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{-2}{2}\right|=1$, отже $\varphi_0=arctg1=\frac{\pi}{4}$. Тому φ= $2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.

Приклад 7. Записати комплексні числа в тригонометричній формі.

Розв'язання: **а)** *Z=-2+2i*

$r=\sqrt{(2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

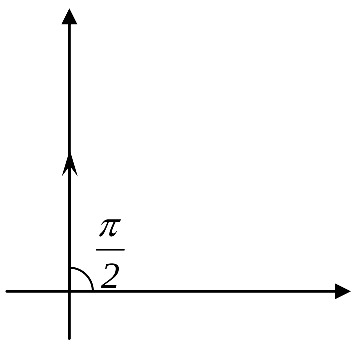
$tg\varphi_0=\left|\frac{2}{-2}\right|=1,\ \varphi_0=arctg1=\frac{\pi}{4}$

$\left.\begin{matrix}a<0\\ b>0\end{matrix}\right)\Rightarrow$ II чверть, отже $\varphi=\Pi-\varphi_0=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Відповідь: $Z=-2+2i=2\sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot sin\frac{3\pi}{4})$

б) *Z=2i*

$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+2^2}=2$



Радіус — вектор даного комплексного числа співпадає з додатнім напрямом уявної вісі *OУ*, тому $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Отже: $2i=2\cdot(\cos\frac{\pi}{2}+\ i\sin\frac{\pi}{2})$

Якщо $Z=i$, то $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$

г) $Z=3$, як комплексне число воно записується $Z=3+0i$, радіус—вектор його співнапрямлений з дійсною віссю, отже $\varphi=0$, а $|Z|=|3|=3$, тобто $r=3$.

Тому $3=3\ (\cos\cdot 0+i\cdot\sin 0)$, якщо $Z=1$, то $1=\cos 0+i\cdot\sin 0$.

Приклад 8. Виконати дії над числами в тригонометричній формі:

Розв'язання: **а)** Помножити числа:

$$2(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot 5(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=10(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi).$$

б) Поділити числа:

$$\frac{2(\cos\varphi+isin\ \varphi)}{5(\cos 2\varphi+isin\ 2\varphi)}=0{,}4(\cos(-\varphi)+isin(-\varphi))$$

в) Піднести до третього ступеня: $z=4(\cos 10\,°+isin\ 10°)$.

Скористаємося формулой Муавра (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – англійський математик): $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

$$z^3=4^3(\cos\ 3*10°+isin\ 3*10°)=64(\cos 30°+i\ sin 30°)$$

В алгебраїчній формі результат має вигляд:

$$z^3=64*\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\ \frac{1}{2}\right)=32\sqrt{3}+32i$$

г) Піднести до дванадцятого ступеня: z= 2(cos 15° + I sin15°)

$$z^{12}=2^{12}(\cos 12*15°+i\ sin\ 12*15°)=4096(\cos 180°+i\ sin 180\ )=4096$$

д) Добути корінь із комплексного числа: $\sqrt[3]{-8}$. Скористаємося формулою Муавра: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n})$,де

k=0,1,2,3,…,(n-1).

$$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8(\cos\pi+\sin\pi)}=\sqrt[3]{8}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3},k=0,1,2,...,(n-1)$$

к=0,

$$z_1=2(\cos\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi\cdot 0}{3})=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=1+i\sqrt{3}$$

$\kappa=1,$

$$z_2=2(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2(-1+i\cdot 0)=-2$$

$\kappa=2,$

$$z_3=2(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3})=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})=2(\cos(2\pi-\frac{\pi}{3}+i\sin(2\pi\ \frac{\pi}{3}))=$$

$$=2(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})=2(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=1-i\sqrt{3}.$$

Відповідь: Отже $\sqrt[3]{-8}$ має три значення: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -2$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

е) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16}(\cos\frac{0+2\Pi K}{4} + i\sin\frac{0+2\Pi K}{4})$, $\kappa = 0,1,2,3.$

Аргумент числа *16* дорівнює нулю.

$$\kappa = 0, z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2(1 + 0i) = 2$$

$$\kappa = 1. z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i$$

$$\kappa = 2, z_3 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1 + i\cdot 0) = -2$$

$$\kappa = 3, z_4 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 + i(-1)) = -2i$$

Приклад 8 Представити у показниковій формі комплексні числа:

Розв'язання: **а)** $Z=-\sqrt{3}+i$.

Знайдемо модуль r та аргумент φ комплексного числа.

$r=\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-3)^2+1=2}$, $r=2$

$tg\varphi_0=\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\varphi_0=arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$;

$\left.\begin{matrix} a<0 \\ b>0 \end{matrix}\right) \Rightarrow$ II чверть, $\varphi=\pi-\varphi_0=\pi-\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ отже $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\Pi}{6}}$

б) $Z=i$. Для даного числа $r=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, тому $i=e^{i\frac{\Pi}{2}}$

в) $Z=1$. Для даного числа $r=1$, $\varphi=0$, тому $1=e^{oi}$

г) $Z=-1=e^{\Pi i}$.

д) $Z=-i=e^{\frac{3\Pi}{2}i}$.

Практичні завдання

1. Знайти корені поданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел. Перевірку коренів виконати за допомогою формул Вієта.

Вар.	Тричлен	Вар.	Тричлен	Вар.	Тричлен
1	$2x^2 - 20x + 51$	5	$4x^2 - 4x + 41$	9	$4x^2 + 8x + 9$
2	$9x^2 - 18x + 14$	6	$2x^2 - 24x + 73$	10	$2x^2 + 28x + 99$
3	$2x^2 - 12x + 19$	7	$2x^2 - 8x + 9$	11	$2x^2 + 16x + 33$
4	$9x^2 - 6x + 4$	8	$3x^2 + 6x + 28$	12	$3x^2 - 12x + 13$

2. Дано комплексні числа z_1, z_2, z_3. Необхідно:

а) використовуючи алгебраїчну форму комплексного числа, обчислити вираз $W = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3}$, де $z_3 = z_1 + z_2$; Для контролю перевірити рівність:

$W \cdot z_3 = z_1 \cdot z_2$.

б)Обчислити W, виконуючи дії з числами z_1, z_2, z_3 в показниковій формі. Для контролю відповідь за допомогою формули Ейлера записати в алгебраїчній формі та порівняти з результатом пункту а)

Вар.	z_1	z_2	Вар.	z_1	z_2
1	-2 + i	3 + 2i	7	-6 - i	-4 – 5i
2	-5 + i	4 – 4i	8	5 – 3i	-5 – 7i
3	4 – 7i	-3 + 4i	9	-7 + i	-4 – 3i
4	-5 + 4i	7 – 4i	10	9 + 2i	3 – 7i
5	3 – 2i	8 + 2i	11	-3 - i	2 – 4i
6	1 + 2i	6 + i	12	4 – 5i	2 + 4i

Тема 2.
Звичайні диференціальні рівняння І порядку.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1.Поняття та означення диференціального рівняння.
2.Що називається розв’язком диференціального рівняння?
3.Геометричний зміст диференціального рівняння. Задача Коші.
4.Які функції називаються функціями з відокремлюваними змінними?
4.Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
5.Однорідні диференціальні рівняння.
6.Лінійні диференціальні рівняння.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв’язування завдання.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші (знайти загальний розв’язок диференційного рівняння і частинний розв’язок при заданих початкових умовах): $y' = -\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 2$.

Розв’язання: Запишемо рівняння у диференціалах: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

Дане рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними (тобто може бути зведене до вигляду, коли з одного боку знаку рівності присутня тільки залежна змінна y, а з іншого – тільки незалежна змінна x, таку рівність можна про інтегрувати і отримати загальний інтеграл рівняння).
Виконаємо відокремлення змінних, для чого домножимо рівняння на dx/y, в результаті отримаємо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Проінтегруємо отримане рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x},$$

і отримаємо

$$\ln|y| = -\ln|x| + C.$$

Це – загальний інтеграл рівняння у неявному вигляді. Звідси:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Частинний розв’язок знаходимо за допомогою початкової умови , підставляючи її о загального розв’язку:

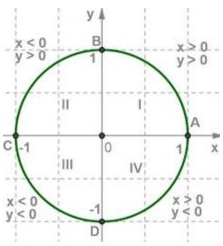
$$y(1) = \frac{C}{1} = 2;\ C=2.$$

Тоді частинним розв’язком диференційного рівняння є

$$y = \frac{2}{x}.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв’язок рівняння $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 0$. Виділити інтегральну криву, що проходить через точку А (1,0).

Розв’язання: Розділимо змінні $x \cdot dx = -y \cdot dy$, проінтегруємо: $\int x \cdot dx = -\int y \cdot dy$, одержимо $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$, або позначив $2C_1$ через C^2, маємо $x^2 + y^2 = C^2$ – загальний інтеграл. Це рівняння сім’ї концентричних кіл з центром у початку координат та радіусом *C*. Для розв’язку задачі Коші



підставимо в загальний інтеграл початкові умови: $x = 1$, $y = 0$, $1^2 + 0^2 = C^2$, звідки $C^2 = 1$, а тому шуканий частинний розв’язок $x^2 + y^2 = 1$– коло з центром в початку координат та радіусом 1.Ця інтегральна крива проходить через точку А (1,0).

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = tg\, x \cdot (y+1)$

Розв’язання: Дане рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Представимо похідну у вигляді співвідношення диференціалів і помножимо обидві частини рівняння на dx $dy = tgx \cdot (y+1)dx$

Тепер розділимо обидві частини рівняння на множник *(y+1)*

$$\frac{dy}{y+1} = tg\ x\ dx$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо: $\int \frac{dy}{y+1} = \int tg\ x\ dx$

$$\ln|\ y+1| = \ -\ln|\cos x| + c;$$

$\ln|\ (y+1) \cdot \cos x| =\ c$ –загальний інтеграл.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$

Розв'язання: Коефіцієнти при диференціалах dx, dy є однорідними функціями одного і того ж виміру (другого). Звідси випливає, що дане рівняння однорідне. Щоб розв'язати це рівняння, покладемо, $y=xz$ де z – деяка функція змінної x. Оскільки, $dy= zdx + xdz$, то дане рівняння матиме вигляд:
$(x^2 - x^2z^2)dx + \ x^2z(zdx + xdz) = 0, dy = zdx + xdz, zdz = -\frac{dx}{x}$
Після спрощень отримаємо: $dx + xzdz = 0$ або .
Інтегруючи отримане рівняння, будемо мати: $\frac{z^2}{2} = -\ln x + \frac{1}{2} lnc$; $z^2 = ln\frac{c}{x^2}$
Оскільки $z = \frac{y}{x}$, то отримаємо $\frac{y^2}{x^2} = ln\frac{c}{x^2}$ – загальний інтеграл заданого однорідного рівняння.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок диференційного рівняння при заданих початкових умовах $xy' - y = x^3$, $y(1) = 5/2$.

Розв'язання: Дане рівняння є лінійним диференційним рівнянням першого порядку. $y = u \cdot v$; $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

$$x(u' \cdot v + u \cdot v') - uv = x^3,$$

$$x \cdot u' \cdot v + u(x \cdot v' - v) = x^3.$$

Накладемо на функцію v умову, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$x \cdot v' - v = 0,$$

і знайдемо функцію v з отриманого диференційного рівняння.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \qquad \ln|v| = \ln|x|, \qquad v = x.$$

Тепер функцію u знаходимо з рівняння

$$x^2 \cdot u' = x^3,$$

що утворюється в результаті підстановки $v = x$ до початкового рівняння:
$du = x \cdot dx,$

$$u = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Оскільки $y = u \cdot v$, то загальним розв'язком рівняння є

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \cdot x = \frac{x^3}{2} + Cx.$$

Константу інтегрування C знаходимо з початкової умови:

$$\frac{5}{2} = \frac{1^3}{2} + C \cdot 1.$$

Отже, $$y = \frac{x^3}{2} + 2x.$$

Приклад 6. Розв'яжіть задачу: знайти криву, яка проходить через точку ***M(0;1),*** якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої k дорівнює $2xy$.

Розв'язання: Як відомо, $y' = k$. Тому потрібно розв'язати задачу Коші:

$\boldsymbol{y' = 2xy}$, $\boldsymbol{y(0) = 1}$.

$\boldsymbol{\frac{dy}{y} = 2xdx}$, $\boldsymbol{\ln y = x^2 + C}$. $\boldsymbol{y(0) = 1 \Rightarrow C = 0}$.

Отже, шукана крива $\boldsymbol{y = e^{x^2}}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння: $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Розділивши ліву і праву частини на x приходимо до лінійного неоднорідного рівняння:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

Нехай $y = uv$, $y' = u'v + v'u$, тоді рівняння прийме вид:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3 \text{ або } u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3.$$

Користуючись тим, що одну з допоміжних функцій (наприклад v) можна вибрати довільно, підберемо її так, щоб вираження в дужках обернулося в нуль, тобто в якості v візьмемо одне із частинних рішень рівняння зі змінними, що розділяються.

$$v' - \frac{2}{x}v = 0 \text{ або } \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}; \text{ звідки: } \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}.$$

Якщо проінтегруємо обидві частини рівності, знайдемо частинне рішення цього рівняння, наприклад, при $c = 0$ $\ln|v| = 2\ln|x|$, звідки $v = x^2$.

При $v = x^2$ вихідне рівняння звернеться в рівняння:

$$u'x^2 = 2x^3 \text{ або } \frac{du}{dx} = 2x.$$

Розв'язуючи це рівняння зі змінними, що розділяються, одержуємо $u = x^2 + c$. Тоді остаточно маємо:

$$y = uv = \left(x^2 + c\right)x^2 = x^4 + cx^2.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння Бернуллі: $y \cdot x' + x = x^2 \ln y$.

Розв'язання. Перетворивши рівняння, маємо: $x' + \frac{x}{y} = \frac{x^2}{y} \cdot \ln y$. Маємо рівняння Бернуллі відносно змінної x = x(y). Розв'язки знайдемо згідно заміни $x = u \cdot v$; $x' = u'v + v'u$; $u'v + v'u + \frac{u \cdot v}{y} = u^2 \cdot v^2 \cdot \frac{\ln y}{y}$;

$$u'v + u(v' + \frac{v}{y}) = u^2 \cdot v^2 \cdot \frac{\ln y}{y}$$

Розіб'ємо рівняння на два, знайдемо невідомі функції $u \cdot$ та v:

(1) $\frac{dv}{dy} + \frac{v}{u} = 0$; $\frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y}$; $v = \frac{1}{y}$

(2) $\frac{du}{dy} \cdot \frac{1}{y} = u^2 \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\ln y}{y}$; $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln y}{y^2}dy$; $u = \frac{y}{1 + \ln y - cy}$;

Остаточно маємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$x = u \cdot v = \frac{1}{1 + \ln y - cy}$$

Практичні завдання

1.Розв'язати диференціальне рівняння, побудувати інтегральні криві, виділити на малюнку криву, через точку М(0; -1), записати рівняння цієї кривої:

1. $(x+4)\cdot dy-(y-2)\cdot dx=0$
2. $(x-1)\cdot dy-2(y-2)\cdot dx=0$
3. $dy-3(x-1)^2\cdot dx=0$
4. $3(y+1)\cdot dx-(1+x)\cdot dy=0$
5. $dy-2(x+1)\cdot dx=0$
6. $(y-1)\cdot dy+(x+2)\cdot dx=0$
7. $y\cdot dy-x\cdot dx=0$
8. $ctg\ x\cdot dy+y\cdot dx=0$
9. $(y+3)\cdot dx-(x-2)\cdot dy=0$
10. $y\cdot dy+2x\cdot dx=0$

2. Знайти загальне рівняння (або загальний інтеграл) диференціальних рівнянь а) та б):

1. а) $x\cdot y'-y=x\cdot tg\,\frac{y}{x}$ б) $y'\cdot\cos x+y\cdot\sin x=1$
2. а) $x\cdot dy-y\cdot dx=y\cdot dy$ б) $x\cdot y'+(x+1)\cdot y=3x^2\cdot e^{-x}$
3. а) $x\cdot y\cdot y'=y^2+x^2$ б) $y'-y\cdot ctg\,x=\sin 2x$
4. а) $x\cdot y'=y+x\cdot e^{\frac{y}{x}}$ б) $y'+2\cdot x\cdot y=x\cdot e^{-x^2}$
5. а) $x\cdot y'=3y(\ln y-\ln x)$ б) $x^2\cdot y'=2\cdot x\cdot y+3$
6. а) $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{4y}$ б) $x\cdot(y'-y)=e^x$
7. а) $y^2=2\cdot x\cdot y-x^2\cdot y'$ б) $x\cdot y'-2y=x^4\cdot e^{x^2}$
8. а) $x\cdot y'=y\cdot(1+\ln y-\ln x)$ б) $y'+y\cdot ctg\ x=\cos x$
9. а) $2x^2\cdot y'=x^2+y^2$ б) $y'-2\cdot x\cdot y=2x\cdot e^{x^2}$
10. а) $(4x-3y)\,dx+(2y-3x)\,dy=0$ б) $x\cdot y'-y=x\cdot\ln x$

Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків

.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Що називається диференціальним рівнянням n-ого порядку? Як визначити порядок диференціального рівняння?

2. Задача Коші для диференціального рівняння n-ого порядку.

3.Диференціальні рівняння n-ого порядку, які інтегруються в квадратурах.

4. Диференціальні рівняння, що допускають пониження порядку.

5.Лінійні однорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами.

6.Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння із сталими коефіцієнтами із спеціальною правою частиною.

7.Системи диференціальних рівнянь.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв'язування завдання.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(IV)} = \cos 2x$

Розв'язання:Проінтегруємо задане рівняння чотири рази:

$$y''' = \int \cos\ 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1\,;$$
$$y'' = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x + c_1\right) dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1\, x + c_2;$$
$$y' = \int \left(-\frac{1}{4}\cos 2x + c_1\, x + c_2\right) dx = -\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{c_1\, x^2}{2} + c_2 x + c_3;$$
$$y = \int \left(-\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{c_1\, x^2}{2} + c_2 x + c_3\right) dx = \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{c_1\, x^3}{6} + \frac{c_2\, x^2}{2} + c_3 x + c_4;$$

і є розв'язок заданого рівняння четвертого порядку.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 3y' = e^{2x}$

Розв'язання: Задане рівняння відноситься до виду F(x, y', y'')=0, яке розв'язується за допомогою підстановки та зводиться до рівняння першого порядку: F$(x, z, z',)$ = 0. Покладемо $y' = z$; $y'' = z'$ і маємо лінійне рівняння першого порядку відносно функції $z = z(x)$:

$$z' + 3z = e^{2x}$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо: $z(x) = c_1 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}$;тоді

$$y' = c_1 e^{-3x} + \tfrac{1}{5}e^{2x};\ \textit{звідки}$$
$$y = -\frac{c_1}{3}e^{-3x} + \frac{2}{5}e^{2x} + c_2;$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $x \cdot y'' + y' = 0$

Розв'язання: Дане рівняння не містить незалежної змінної x. Припустимо $y' = p(x)$, тоді $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ і рівняння прийме вигляд: $x \cdot \dfrac{dp}{dx} + p = 0$.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dp}{p} = -\dfrac{dx}{x}$,

звідки одержуємо: $\ln|p| = -\ln|x| + \ln C_1$, тобто

$p = \dfrac{C_1}{x}$ або $y' = \dfrac{C_1}{x}$. Відокремлюючи змінні в останньому рівнянні, одержимо $dy = \dfrac{C_1}{x}dx$. Інтегруємо та знаходимо загальний розв'язок: $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

Відповідь: $y = C_1 \ln|x| + C_2$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $tg\, y \cdot y'' = 2 \cdot (y')^2$

Розв'язання: Це рівняння не містить незалежної змінної *x*. Нехай $y' = p(y)$, тоді $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, і дане рівняння перетвориться до вигляду: $p\dfrac{dp}{dy}\operatorname{tg} y = 2p^2$ або $\dfrac{dp}{p} = 2\dfrac{dy}{\operatorname{tg} y}$ (де $p \neq 0$). Інтегруємо одержане рівняння першого порядку з відокремленими змінними та знаходимо:

$$\ln|p| = 2\ln|\sin y| + \ln C_1, \text{ або } p = C_1 \sin^2 y.$$

Замінюючи *p* на $\dfrac{dy}{dx}$, маємо: $\dfrac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 y$ або $\dfrac{dy}{\sin^2 y} = C_1 dx$,

Звідки знаходимо загальний інтеграл даного рівняння:

$$-\operatorname{ctg} y = C_1 x + C_2.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок ЛОДР: $y'' - 7y' + 12y = 0$

Розв'язання: Складемо характеристичне рівняння і розв'яжемо його: $k^2 - 7k + 12 = 0$; Дискримінант $D = 49 - 48 = 1$; $k_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$, $k_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$;

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$

Довідковий матеріал.

<table>
<tr><td colspan="3">Загальний вид ЛОДР $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Характеристичне рівняння $k^2 + p \cdot k + q = 0$</td></tr>
<tr><td>Корені $k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}$</td><td>Корені $k_1 = k_2 = k \in \mathbb{R}$</td><td>Корені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Фундаментальна система роз'язків:</td></tr>
<tr><td>$y_1(x) = e^{k_1 \cdot x}$ $y_2(x) = e^{k_2 \cdot x}$</td><td>$y_1(x) = e^{k \cdot x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{k \cdot x}$</td><td>$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$;
$y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$;</td></tr>
<tr><td colspan="3">Загальний розв'язок рівняння має вигляд:</td></tr>
<tr><td colspan="3">$y_{о.о.} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$</td></tr>
<tr><td>$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$</td><td>$y = e^{kx}(c_1 x + c_2)$</td><td>$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$</td></tr>
</table>

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок ЛНДР: $y'' - 6y' + 25y = -2x - 6$

Розв'язання: Розв'язок шукаємо у вигляді $y = y_o + Y$, де y_o – ? загальний розв'язок відповідного ЛОДР заданого ЛНДР:

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

$k^2 - 6k + 25 = 0$ – характеристичне рівняння

$D = 36 - 100 = -64 < 0$; $k_1 = \dfrac{6 + 8 \cdot i}{2} = 3 + 4 \cdot i$; $\alpha = 3$; $\beta = 4$; Тоді загальний розв'язок має вигляд: $y_o = e^{3x} \cdot (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом підбору:

$Y - ?$

$Y = A \cdot x + B$; $Y' = A$; $Y'' = 0$. Підставимо у рівняння:

$$Y'' - 6Y' + 25Y = -2x - 6$$

$$0 - 6A + 25(Ax + B) = -2x - 6$$

$$25Ax - 6A + B = -2x - 6$$

$\begin{matrix} 25A = -2 \\ -6A + B = -6 \end{matrix}$; A$= -\dfrac{2}{25}$; $-6 \cdot \dfrac{-2}{25} + B = -6$; $B = -6 - \dfrac{12}{25}$; $B = -\dfrac{162}{25}$

Частинний розв'язок приймає вигляд:

$Y = -\dfrac{2}{25}x - \dfrac{162}{25}$; або $Y = -\dfrac{1}{25}(2x + 162)$

Загальний розв'язок заданого ЛНДР остаточно приймає в

$y = e^{3x} \cdot (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) - \dfrac{1}{25}(2x + 162)$

Приклад 7. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = -78 \sin 3x$, що задовольняє початковим умовам (розв'язати задачу Коші) $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$.

Розв'язання: Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$. Для цього складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$. Його корені $k_1 = 2, \ k_2 = 3$, значить, $y_{o.o.} = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x}$.

Частинний розв'язок заданого рівняння шукаємо у вигляді:

$y_{ч.н.} = A \cos 3x + B \sin 3x$, так як $k_{1,2} \neq \pm 3 \cdot i$.

Знаходимо першу та другу похідні та підставляємо їх у вихідне рівняння

$y'_{ч.н.} = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$;

$y''_{ч.н.} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$.

Одержимо:

$(-3A - 15B) \cos 3x + (15A - 3B) \sin 3x = -78 \sin 3x$.

Прирівнюємо коефіцієнти при sin 3x та cos 3x у правій та лівій частинах рівняння, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -3\text{A} - 15\text{B} = 0 \\ 15\text{A} - 3\text{B} = -78. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо: A= -5, B=1, тобто, частинний розв'язок має вигляд: $y_{ч.н.} = -5 \cos 3x + \sin 3x$.

Значить, загальний розв'язок заданого ЛНДР рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x} - 5 \cos 3x + \sin 3x.$$

Щоб знайти частинний розв'язок , що задовольняє заданим початковим умовам, знайдемо похідну: $y'_{o.н.} = \ 2C_1 \cdot e^{2 \cdot x} + 3C_2 \cdot e^{3 \cdot x} + 3 \cos 3x + 15 \sin 3x$.

Підставимо початкові умови $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$ в загальний розв'язок та похідну:

$y(0)=C_1+C_2$ - 5=0

$y'(0)=$ $2C_1+3C_2$+3=0.

Звідки знайдемо $C_1=18,\quad C_2=-13$. Таким чином, шуканий частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам одержався із загального розв'язку при знайдених значеннях довільних сталих.

Відповідь: $y=18\cdot e^{2\cdot x}-13\cdot e^{3\cdot x}-5\cos 3x+\sin 3x$.

Приклад 8. Знайти частинний розв'язок системи диференціальних уравнений, удовлетворяющее начальным условиям

$x(0)=1,\quad y(0)=1$:

$$\begin{cases} x'+y'-2x-y=0 \\ x'-2y'+4x+5y=0 \end{cases}$$

Розв'язання: Спочатку систему приведем до нормальної форми. Для цього треба по черзі виключити з рівнянь x' и y'. Після елементарних перетворень рівнянь одержимо наступну систему:

$$\begin{cases} -3y'+6x+6y=0 \\ 3x'+3y=0 \end{cases};\ \text{або}\ \begin{cases} y'-2x-2y=0 \\ x'+y=0 \end{cases}$$

Далі , наприклад, виразимо одну змінну через іншу із другого рівняння: $y=-x'$, , звідки $y'=-x''$. Підставимо y, y' у перше рівняння системи та одержимо ЛОДР $x''-2x'+2x=0$.

Розв'язавши це рівняння, одержимо

$x=C_1\cdot e^t\cdot\cos t+C_2\cdot \mathrm{e}^t\cdot\sin t$.

Одна з невідомих знайдена. Продиференціюємо її, щоб підставити у рівняння для знаходження другої невідомої:

$x'=e^t\cdot((C_1+C_2)\cdot\cos\mathrm{t}+(\mathrm{C}_2-C_1)\cdot\sin t)$.

Знайдемо *y*: $y=-e^t\cdot((C_1+C_2)\cdot\cos\mathrm{t}+(\mathrm{C}_2-C_1)\cdot\sin t)$.

Таким чином, пара функцій є загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x=C_1\cdot e^t\cdot\cos t+C_2\cdot \mathrm{e}^t\cdot\sin t \\ y=-e^t\cdot((C_1+C_2)\cdot\cos\mathrm{t}+(\mathrm{C}_2-C_1)\cdot\sin t) \end{cases}$$

Враховуючи початкові умови, підставимо в загальний розв'язок $t=0$, $x=1$, $y=1$. Одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення C_1, C_2:

$$\begin{cases} 1=C_1 \\ 1=-(C_1+C_2) \end{cases},$$

Звідки $C_1=1$, $C_2=-2$. Таким чином, частинний розв'язок заданого рівняння має вигляд:

$$\begin{cases} x=e^t\cdot\cos t-2\mathrm{e}^t\cdot\sin t \\ y=e^t\cdot(\cos\mathrm{t}-3\cdot\sin t) \end{cases}$$

Практичні завдання

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1. а) $x \cdot y'' + 7y' + x = 0$ б) $2 \cdot (y')^2 = y''(y-1)$

2. а) $x \cdot y'' + y' = 0$ б) $(1+y) \cdot y'' = (y')^2$

3. а) $(1+x^2) \cdot y'' - 2 \cdot x \cdot y' = 2x$ б) $y \cdot y'' + (y')^2 = (y')^3$

4. а) $x \cdot y'' + 2y' = x^2$ б) $3y'(1+(y')^2) = y''$

5. а) $x \cdot y'' \cdot \ln x = y'$ б) $y \cdot y'' + 3(y')^2 = 0$

6. а) $x \cdot y'' = 2y' + x^3$ б) $y'' = -2 \cdot y \cdot (y')^3$

7. а) $x^3 \cdot y'' + x^2 y' = 1$ б) $y^3 \cdot y'' = -2$

8. а) $x^2 \cdot y'' - (y')^2 = 0$ б) $y \cdot y'' = y^2 y' + (y')^2$

9. а) $x \cdot y'' - y' - x^2 = 0$ б) $y \cdot y'' + (y')^2 = 1$

10. а) $x \cdot y'' + y' = 4x\sqrt{x}$ б) $y'' = y$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$ що задовольняє початковим умовам: $y(0) = a_0; \quad y'(0) = a_1$.

1. $y'' + y = 4 \cdot e^x; \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3.$
2. $y'' - 2 \cdot y' = 2 \cdot e^x; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4,$
3. $y'' + 2 \cdot y' + 2y = x \cdot e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$
4. $y'' - 4 \cdot y' = 8 \cdot x + 4; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$
5. $y'' - 4 \cdot y' + 4y = 5 \cdot e^{-3x}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$
6. $y'' - 4 \cdot y = \sin 2x - 2 \cdot \cos 2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$
7. $y'' + 3 \cdot y' - 4y = 5 \cdot e^{2x}; \quad y(0) = -\frac{1}{6}, \quad y'(0) = -\frac{1}{3},$
8. $y'' + 4 \cdot y = (6x+5) \cdot e^{-2x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0{,}75,$
9. $y'' - 2 \cdot y' + 10y = 74 \cdot \sin 3x; \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3,$
10. $y'' - 3 \cdot y' + 2y = 10 \cdot \sin x; \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 4.$

3. Знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняють зазначеним початковим умовам:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} - 2x = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt} - 2y - 8x = 0 \end{cases}$ $x(0) = 0; \quad y(0) = 1$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} + x + 4y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} - 2\dfrac{dy}{dt} + 4y - 2x = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2; \quad y(0) = 1$

3. $\begin{cases} 5\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{dx}{dt} + 37y = 0 \\ 2\dfrac{dy}{dt} - 7\dfrac{dx}{dt} - 37x = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 3; \quad y(0) = 2$

4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt} + 4y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 3\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2; \quad y(0) = 3$

5. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - 2\dfrac{dx}{dt} + x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 2\dfrac{dx}{dt} - 3x + 5y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2; \quad y(0) = -1$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 4y + 4x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + 5\dfrac{dy}{dt} + 28y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1; \quad y(0) = 2$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + 3x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + 3\dfrac{dy}{dt} + 11x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = -1; \quad y(0) = 5$

8. $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} - 5x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 5x - 5y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 3; \quad y(0) = 1$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 9y = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{dy}{dt} - x - 10y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 2; \quad y(0) = 1$

10. $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 5y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - 3\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1; \quad y(0) = 1$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
РЯДИ.

Тема 4. Числові ряди.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1.Поняття про числові ряди. Загальний член ряду.
2.Який ряд називається збіжним, а який розбіжним?
3.Що називається сумою ряду?
4.Сформулювати необхідну ознаку збіжності ряду.
5. Сформулювати достатні ознаки збіжності ряду: ознаку порівняння, ознаку Д'аламбера і радикальну ознаку Коші, інтегральну ознаку Коші. Для яких рядів застосовні ці ознаки?
6. Сформулювати ознаку Лейбниця. Для якого ряду застосовна ця ознака?
7.Який ряд називається абсолютно збіжним? Який ряд називається умовно збіжним?

2. Опитування.

3. Практичні завдання

Приклад розв'язування завдання.

Приклад.1.З'ясувати, збіжні чи розбіжні наступні ряди

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^n n!}$.

Розв'язання а). Порівняємо даний ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$, який є рядом Діріхле при p=3/2>1.Такий ряд є збіжним. Використаємо другу ознаку порівняння та першу визначну границю: sin α ~α при α→0:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}:\frac{1}{n^{3/2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}:\frac{1}{n^{3/2}}\right)=1$$

За другою ознакою порівняння із збіжності ряду Діріхле слідує збіжність даного ряду.

б). Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{n}$ дослідимо на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші. Складемо функцію $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ та обчислимо інтеграл:

$$\int_2^{\infty} f(x)\cdot dx = \int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x}\cdot dx = \int_2^{\infty} \ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3}\Bigg|_2^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{3} - \frac{\ln^3 2}{3} = \infty$$

Невласний інтеграл розбіжний, значить і ряд розбіжний.

в) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n n!}$ дослідимо за допомогою достатньої ознаки Д'аламбера.

$a_n = \frac{3^n}{2^n n!}$, $\quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}$,тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot 2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!\cdot 3^n} = \frac{3}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Одержали q=0<1. За ознакою Д'аламбера ряд збіжний.

Зауваження: За допомогою інтегральної ознаки Коші легко довести, що ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ збіжний при p>1 та розбіжний при p≤1.

Приклад.2. Дослідити на абсолютну збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Розв'язання: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$, що називається рядом Лейбниця збіжний за ознакою Лейбниця (дві умови виконуються). В той же час, ряд, складений із абсолютних значень його членів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ розбіжний (є гармонійним рядом). Таким чином ряд Лейбниця – умовно збіжний ряд.

Практичні завдання

1.Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1. а) $a_n = \frac{n+1}{n}\cdot 2^{-n}$ б) $a_n = tg\,\frac{1}{n}$

2. а). $a_n = \frac{n^3}{e^n}$ б) $a_n = 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$

3. а) $a_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$ б) $a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot\ln^2(n+1)}$

4. а) $a_n = \frac{n!\cdot n}{3^n}$ б) $a_n = \frac{1}{(n^2+1)^{2/3}}$

5. а) $a_n = \frac{e^{n^2}}{n!}$ б) $a_n = \frac{n+1}{2n^2+3n+2}$

6. а) $a_n = \frac{(1{,}01)^n}{(n+1)^2}$ б) $a_n = \frac{1}{n^2 \cdot arctg\, n}$

7. а) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ б) $a_n = \frac{1}{(n^2+1) \cdot arctg\, \frac{1}{n}}$

8. а) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ б) $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n+1)}$

9. а) $a_n = \frac{(3n)!}{n!}$ б) $a_n = \frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1}$

10. а) $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ б) $a_n = \cos\frac{1}{n^2+1}$

2. З'ясувати чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним, або розбіжним.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3n+1}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+5} 1$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot (2n+1)\,!}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 6^n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 6}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{5^n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n-4}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3n+1}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{4n+1}}$.

Тема 5. Функціональні та степеневі ряди.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Функціональні ряди та їх властивості.
2. Степеневі ряди. Теорема Абеля.
3. Ряд Тейлора. Достатня ознака розкладу функцій в ряди Тейлора та Маклорена. Ряди Маклорена для функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$. Біноміальний та логарифмічний ряди.

4. Застосування рядів до наближених обчисленнях.
2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв'язування завдання.

Приклад 1. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n}$

Розв'язання: Для знаходження радіуса збіжності використаємо відповідну формулу одержану із ознаки Д'аламбера. При цьому $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$. Тоді $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n (n+1)}{n\, 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$

Таким чином, ряд збіжний абсолютно всередині інтервалу $(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ та розбіжний зовні цього інтервалу (згідно теореми Абеля).Дослідимо ряд на кінцях інтервалу:

При $x = \frac{1}{3}$ ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Це гармонійний ряд, відомо, що він розбіжний.

При $x = -\frac{1}{3}$ ряд приймає вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Це ряд Лейбниця, він збіжний умовно (див. приклад № 2 попередньої теми)

Значить, область збіжності даного ряду $[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

Приклад 2. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n^2}$$

Розв'язання: Знайдемо радіус збіжності ряду, скориставшись другою формулою, яка одержана з радикальної ознаки Коші:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n \cdot n^2}\right|}} = 2.$$

Ряд збіжний на інтервалі: *x-3 = 2*; звідки *x=5; x-3 = -2*; звідки *x=1*.Таким чином, інтервал збіжності ряду (1;5).В точці *x=1* ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\cdot n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

абсолютно збіжний, як ряд Лейбниця. За перевіркою двох умов Лейбниця та дослідженні ряду, складеному з абсолютних значень його членів. В точці $x=5$ числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

збіжний за ознакою порівняння, як ряд Діріхле при р = 2>1. Остаточно маємо інтервал збіжності заданого степеневого ряду $x\in[1; 5]$
Відповідь: заданий ряд збігається на відрізку [1; 5].

Приклад 3. Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням, обчислити суму ряду:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

Розв'язання: За радикальною ознакою Коші переконуємося, що ряд збігається на відрізку [-1; 1], причому рівномірно всередині відрізка, як степеневий ряд. Згідно з теоремою про почленне диференціювання ряду маємо:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots=\frac{1}{1+x^2},\quad |x|<1.$$

Тому сума має вид:

$$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\mathrm{arctg}x,\quad |x|<1.$$

Приклад 4. Розкласти у ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Розв'язання: Обчислимо коефіцієнти Тейлора для заданої функції:

$$f^{(n)}(x)=3^n\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad n\in\mathrm{N},\quad f(0)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$f^{(n)}(0)=3^n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Переконуємось, що *n*-й залишок формули Тейлора прямує до нуля, якщо n прямує у нескінченність:

$$R_n(x)=\frac{3^{n+1}\cdot\cos\left(3\theta x+\frac{\pi}{3}+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\to 0$$

Тому ряд Маклорена збігається на всій числовій осі та його сума є функція f(x) Таким чином, маємо:

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n,\quad x\in R.$$

Приклад 5. Розкласти у ряд Маклорена функцію

$$f(x)=\mathrm{arctg}x$$

Розв'язання: Скористаємося геометричним рядом

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Проінтегруємо цей ряд на відрізку [0; x], де 0 < x <1 отримаємо

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\quad |x|<1.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що ряд збігається умовно на кінцях інтервалу, тобто ряд збіжний при x∈[-1; 1]

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_0^{1/4} e^{-x^2}\cdot dx$ з з точністю 10^{-4}.

Розв'язання: Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена , для цього в розклад експоненціальної функції підставимо замість *x* змінну $(-x^2)$:

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\qquad(-\infty<x<\infty).$$

Цей ряд можна інтегрувати на будь-якому скінченному відрізку, тобто:

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\cdot dx = \int_0^{1/4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{1/4}x^{2n}\cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^{1/4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3}+\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}-...$$

Одержаний числовий ряд є знакозмінним рядом, який задовольняє умови теореми Лейбниця. Значить, щоб обчислити інтеграл з точністю до 10^{-4} досить взяти всього два члена ряду, при цьому помилка буде менша третього члена розкладу: $\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5}=\frac{1}{10240}<10^{-4}$. Таким чином, з заданою точністю

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\cdot dx \approx \frac{1}{4}-\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} = \frac{1}{4}-\frac{1}{192}\approx 0{,}2448.$$

Приклад 6. Знайти перші чотири члена розкладу в ряд розв'язку рівняння $y'=x^2+y^2$, що задовольняє початковим умовам y=1/2 при x=0.

Розв'язання: Шуканий розв'язок запишемо у вигляді ряду Маклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots.$$

Знайдемо вираз для трьох послідовних похідних, диференціюючи задане рівняння

$$y'=x^2+y^2, \qquad y''=2x+2y\,y', \qquad y'''=2+2(y')^2+2\,y\,y''.$$

Обчислимо значення цих похідних при x=0, враховуючи початкові умови:

$$y'(0)=0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}, \qquad y''(0)=2\cdot 0+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$y'''(0)=2+2\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{19}{8}.$$

Підставляючи ці значення в ряд Маклорена, одержим відповідь:

$$y(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{19}{48}x^3+\dots.$$

Практичні завдання

1.Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$

1. $a_n=\frac{3^n}{n\sqrt{n+1}}$

2. $a_n=\frac{(-1)^n}{(2n-1)(n+1)!}$

3. $a_n=\frac{\ln\,(n+2)}{n}$

4. $a_n=\frac{n!}{(2n)!}$

5. $a_n = \sin^2 \frac{1}{n}$

6. $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)\sqrt{n+1}}$

7. $a_n = \frac{9^n}{\sqrt{n^2+1}}$

8. $a_n = 2^n \cdot tg\left(\frac{\pi}{3n}\right)$

9. $a_n = \frac{1}{n^2 \ln(n+1)}$

10. $a_n = \frac{5^n}{\sqrt{2^n}}$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^b f(x)\,dx$ з точністю до *0,001*, розклавши підінтегральну функцію в степеневий ряд, а потім проінтегрувати його почлено

1. $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}, \qquad b = 0{,}5.$
2. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, \qquad b = 0{,}5.$
3. $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \qquad b = 0{,}5.$
4. $f(x) = x \cdot \cos\sqrt{x}, \qquad b = 1.$
5. $f(x) = \ln(1+\sqrt{x}), \qquad b = 0{,}25.$
6. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad b = 1.$
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad b = 0{,}5.$
8. $f(x) = x \cdot arctg\,\frac{x}{2}, \qquad b = 0{,}5.$
9. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot arctg\,\frac{x}{4}, \qquad b = 0{,}5.$

10 $f(x) = x \cdot \ln(1+x^2), \qquad b = 0{,}5.$

3. Знайти три перших, відмінних від нуля члена розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку $y = y(x)$ диференціального рівняння $y' = f(x; y)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = y_0$

1. $y' = 2\cos x - xy^2; \quad y(0) = 1.$

2. $y' = x + x^2 + y^2; \quad y(0) = 1.$

3. $y' = xy + e^y; \quad y(0) = 0.$

4. $y' = 2x + \cos y; \quad y(0) = 0.$

5. $y' = 3 + x - \sin y; \quad y(0) = 0.$

6. $y' = 4y^2 + e^{x^2}; \quad y(0) = 1.$

7. $y' = e^x - 2y^2; \quad y(0) = 0.$

8. $y' = 3y - xy^2; \quad y(0) = 1.$

9. $y' = \sin x + \frac{1}{2}y^2; \quad y(0) = -1.$

10. $y' = 5e^x + xy; \quad y(0) = 0.$

Тема 6. Ряди Фур'є

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1.Тригонометричний ряд. У чому полягає задача про зображення функції рядом Фур'є.

2.Формули для коефіцієнтів Фур'є функції *f(x)*, $x \in [-\pi; \pi]$

3. Сформулювати достатні умови для зображення функції рядом Фур'є.

4. Вказати особливості рядів Фур'є для парних і непарних функцій.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв'язування завдання.

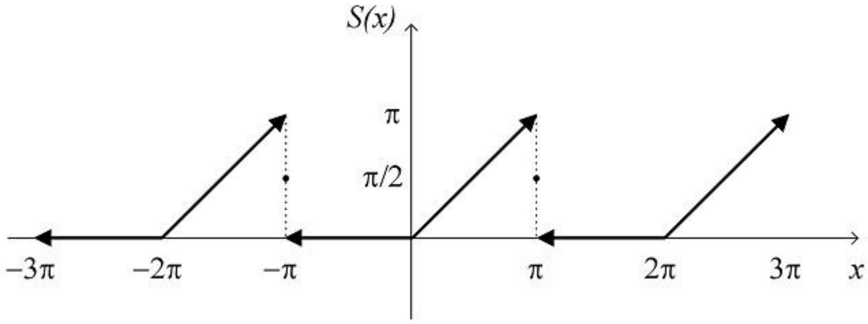
Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію періоду 2π

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0, \\ x, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

Точки -π; π є точками розриву функції на відрізку [-π; π]. Значення *f(x)* в них можуть бути не задані, оскільки не впливають на її розвинення в ряд Фур'є.
Задана функція на відрізку [-π; π] кусково-неперервна і кусково-диференційована, тобто задовольняє умови теореми Діріхле, тому її ряд Фур'є збігається саме до *f(x)* в усіх точках числової осі, крім точок розриву $\pi \cdot (2k+1)$, $k \in Z$ У точках розриву сума ряду

$$S(\pi(2k+1)) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Зобразимо графік суми ряду:



Обчислюємо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{\pi} x dx\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x \cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & n = 2k-1 \end{cases} \quad k \in \mathrm{N};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x \sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Тут враховано, що $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $n \in N$

Запишемо розклад функції у ряд Фур'є:

$$S(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi(2k+1), \quad x \in R, \\ \frac{\pi}{2}, & x = \pi(2k+1), \quad k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Зокрема, при $x = 0$ дістанемо числовий ряд

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

звідки

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Знайдемо амплітуди гармонік:

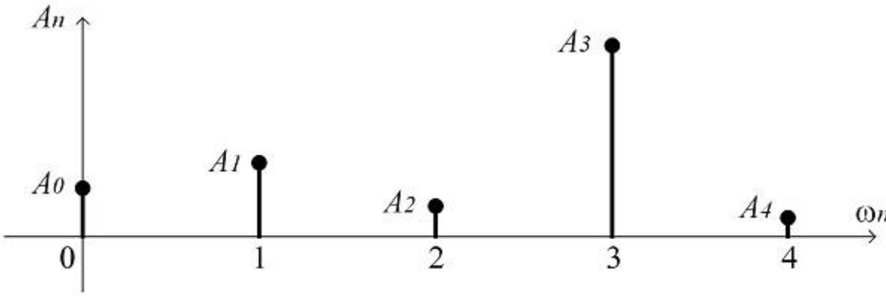
$$A_{2n-1} = \sqrt{a_{2n-1}^2 + b_{2n-1}^2} = \sqrt{\frac{4}{\pi^2(2n-1)^4} + \frac{1}{(2n-1)^2}} = \frac{1}{\pi(2n-1)^2}\sqrt{4 + \pi^2(2n-1)^2},$$

$$A_{2n} = \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Зокрема,

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\sqrt{4+\pi^2}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = \frac{1}{9\pi}\sqrt{4+9\pi^2}, \quad A_4 = \frac{1}{4}, \ldots.$$

Побудуємо графік амплітудного частотного спектра функції *f(x)*:



ЧАСТИНА 3.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 1. Комплексні числа

Форми контролю: розв’язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Задано комплексне число z Оберіть правильні відповіді для Re z
A. yi
B. xi
C. y
D. x

Задано комплексне число z Оберіть правильні відповіді для Im z.
A. yi
B. xi
C. y
D. x

Задано комплексне число z Оберіть правильні відповіді для обчислення |z|
A. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
B. $|z| = x^2 + y^2$
C. $|z| = |x| + |y|$
D. $|z| = |x + y|$

Куб уявної одиниці рівний
A. 1
B. -1
C. i
D. –i

Квадрат уявної одиниці рівний
A. 1
B. -1
C. i
D. –i

Четвертий ступінь уявної одиниці рівний
A. 1
B. -1
C. i
D. –i

П’ятий степінь уявної одиниці рівний
A. 1
B. -1
C. i
D. –i

Значення виразу $(1+i)^4$ рівний
A. 1
B. 0
C. 2
D. -4

Комплексне число -1 в тригонометричній формі має вид
A. $cos\ \frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}$
B. $cos\ \frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}$
C. $cos\ \pi + i\ sin\ \pi$
D. $cos\ \frac{3\pi}{2} + i\ sin\frac{3\pi}{2}$

Комплексне число $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ в алгебраїчній формі має вид
A. $\sqrt{3} - \mathrm{i}$
B. $1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$
C. $1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$
D. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

3. Задачі для самостійного розв’язування.
1. Обчислити:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;

2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;

4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

5) $(2 - i)^2$;

6) $(1 + 2i)^3$.

2. Знайти розв’язки рівнянь ($x, y \in \mathbf{R}$):

1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

2) $2x + (1 + i)(x + y) = 7 + i$;

3) $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$.

3. Обчислити:

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\frac{5}{1+2i}$; 5) $\frac{2i-3}{1+i}$; 6) $\frac{2+3i}{i}$;

7) $\frac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\frac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

4. Представити комплексне число в алгебраїчній та тригонометричній формі:

1. $\boldsymbol{z_0 = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}}$;

2. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{1-i}}$;

3. $\boldsymbol{z_0 = \frac{2}{1+i}}$;

4. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{1+i\sqrt{3}}}$;

5. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}}$;

6. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}}$;

7. $\boldsymbol{z_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}}$;

8. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{1+i}}$;

9. $\boldsymbol{z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}}$;

10. $\boldsymbol{z_0 = \frac{4}{\sqrt{3}+i}}$.

Рекомендована література:

1. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./ В.П. Дубовик, І.І Юрик.– К., Вища школа , 1993. – 648с.
3. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.
4. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика/В.В. Фортуна, О.І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 2. . Звичайні диференціальні рівняння І порядку.

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Диференціальні рівняння це:
A. Рівняння, що містить невідому функцію.
B. Рівняння, що містить невідому функцію то її похідні.
C. Рівняння, що містить невідому функцію та її інтеграли.
D. Інша відповідь.

Розв'язок диференціальних рівнянь це:
A. Функція, яка перетворює ДР в тотожність.
B. Функція, яка має кількість похідних рівних порядку ДР, і перетворює ДР в тотожність.
C. Функція, яка не перетворює ДР в тотожність.
D. Інша відповідь

Який вигляд має ДР І порядку в явній формі?
A. $F(x, y, y') = 0$
B. $y = f(x, y')$
C. $y' = f(x, y)$
D Інша відповідь

Задача Коші для ДР І порядку це:
A. Задача знаходження розв'язку ДР.
B. Задача знаходження розв'язку ДР, який задовольняє початковій умові.
C. Задача знаходження інтегральної кривої.
D. Інша відповідь.

Загальний розв'язок ДР І порядку це:
A. Функція, яка задовольняє ДР.
B. Функція, яка залежить від сталої C і задовольняє ДР.
C. Функція, яка залежить від сталої C, задовольняє ДР і для неї існує таке C_0, що виконується початкова умова.
D. Інша відповідь

Частинний розв'язок ДР І порядку це:
A. Один із загальних роз в'язків ДР.

B. Розв’язок, який дістають із загального згідно початковій умові.
C. Розв’язок, який не пов'язаний з загальним розв’язком ДР.
D. Інша відповідь.

3. Задачі для самостійного розв’язування.
Визначити до якого виду відноситься диференціальні рівняння І порядку та розв’язати їх:

1. $(x^2+y^2)dx - xy\,dy = 0$
2. $\cos^4 x dx + arctg\sqrt{y} dy = 0$
3. $\ln(x^2+1)dx - \dfrac{\cos 3y}{4+\sin 3y}dy = 0$
4. $x \cdot \sin 3x dx + \dfrac{ydy}{(y^2+4)^5} = 0$
5. $\left(x^2+2\right)y' = -2xy^2$
6. $y' + 25y = 0;$
7. $xy' + 4y = x^4$
8. $y' = \dfrac{x+2y}{x}$
9. $xy' - 2y = 2x^4$
10. $\left(xy + x^2\right)y' = y^2$
11. $\left(2xy + y^2\right)y' = y^2$
12. $xy' - y = 0$
13. $y' + \dfrac{y}{x} = -y^2$
14. $ydx = xdy$
15. $\cos^2 xdy = y^2 dx$

Рекомендована література:

1. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.
3. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика/В.В. Фортуна, О.І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 3. Диференціальні рівняння вищих порядків

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

ДР вищих порядків це:

A. ДР, порядок яких вище одиниці.
B. Лінійні ДР n-ого порядку.
C. Нелінійні ДР вищих порядків.
D. Інша відповідь

ДР n-ого порядку в явній формі має вигляд
A. $F\left(x, y, \dots, y^{(n)}\right) = 0$
B. $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$
C. $y^{(n)} - f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$
D. Інша відповідь

Задача Коші для ДР II порядку це:
A. Знаходження загального розв'язку.
B. Знаходження частинного розв'язку.
C. Знаходження частинного розв'язку, який задовольняє початковим умовам.
D. Інша відповідь.

Загальний розв'язок ДР II порядку має вигляд
A. $y = y(x)$
B. $y = y(x, C_1)$
C. $y = y(x, C_1, C_2)$
D. $y = y(x, C_1, C_2. C_3)$

Скільки початкових умов має ДР II порядку
A. 1
B. 2
C. 3
D. 4

Який вигляд має загальний інтеграл ДР II порядку
A. $y = y(x, C_1, C_2)$
B. $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$

C. $x = x(y, C_1, C_2)$
D. Інша відповідь

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1.Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0$

2. Знайти загальне (чи частинне) рішення диференціального рівняння другого порядку :

а) $y'' + 2y' - 3y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$ і $y'(0) = 2$;

б) $y'' + 2y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

3. Розв'язати диференціальне рівняння:

а) $y'' = \sin x$; б) $yy'' = (y')^2$ $y'' - 7y' + 12y = 5$

4. Знайти загальне рішення диференціального рівняння $y''' = 2x$.

5. Розв'язати диференціальне рівняння $x^3 y'' + x^2 y' = 1$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $yy'' + (y')^2 = 0$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' = 0$.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$.

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

10. Знайти розв'язок задачі Коші

а) $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

Рекомендована література:

1. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./ В.П. Дубовик, І.І Юрик.– К., Вища школа , 1993. – 648с.
3. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л. : Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
РЯДИ.

Тема 4. Числові ряди.

Форми контролю: розв'язування задач

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Якщо a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n \ldots$ послідовність чисел, то вираз $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається:
A. сума ряду;
B. ряд;
C. часткова сума;
D. прогресія.

Якщо a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n \ldots$ послідовність чисел, то вираз $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ називається:
A. сума ряду;
B. ряд;
C. часткова сума;
D. прогресія.

Якщо a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n \ldots$ послідовність чисел, то вираз $\sum_{k=1}^{n} a_k$ називається:
A. сума ряду;
B. ряд;
C. часткова сума;
D. прогресія.

Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$ сума перших трьох членів дорівнює:

A. $\frac{10}{9}$;

B. $\frac{157}{36}$;

C. $\frac{13}{4}$;

D. $\frac{137}{36}$.

Якщо для ряду $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ границя $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то

A. $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ збіжний;

B. $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ розбіжний;

C. обидва вірні;

D. нічого сказати не можна.

Серед перерахованих нижче рядів, вкажіть збіжні (можливо декілька відповідей):

A. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

B. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$

C. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

D. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n$

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1.Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)\,!}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+1}{n^3+n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4n-1}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{\sqrt{n}}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\,!}{5+n}$; **е)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{2n+1}\right)^n$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{n^4+2}$; **ж)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{(n+3)(n^2+2)}$; **и)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2n+1}$;

2. З'ясувати чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним, або розбіжним.

а). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\,!}$;   б). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,n}{4n^{2}-6}$;

в). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^{n}}{3n+1}$;   г). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+1)}{5^{n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}+5}1$;   е). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,n^{2}}{3n-4}$;

Рекомендована література:

1. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.
3. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л. : Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 5. Функціональні та степеневі ряди.

Форми контролю: розв’язування задач

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Сума функціонального ряду:
A. число;
B. функція;
C. матриця;
D. Інша відповідь.

Якщо функціональний ряд правильно збігається на проміжку, то:
A. в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються;
B. в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються абсолютно;
C. в усіх точках цього проміжку числові ряди збігаються умовно;
D. Інша відповідь.

Достатня умова розкладу функції у ряд Тейлора:
A. існування нескінченної кількості похідних функції;

B. існування числа, яким обмежені похідні функції в околі центру розкладання;
C. існування обмежених похідних функції в околі центру розкладання.
D. Інша відповідь.

Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^{n-1}}$ **:**

A. (-√5/3; √5/3);
B. (-2,2);
C. (-1/2,1/2) ;
D. (1;3).

2.Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n5^{n-1}}x^n$ **:**

A. (-√5/3; √5/3);
B. (-1/5,1/5);
C. (-5,5);
D. (-1,1).

3.Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{4^n}x^n$ **:**

A. (-√5/4; √5/4);
B. (-2,2);
C. (-1/4,1/4);
D. (-4,4).

3. Задачі для самостійного розв'язування.
1.Визначити інтервал збіжності ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot 10^n}{5\sqrt{n}}$;   в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ **;**   **г)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}$ **;**   **д)** $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$ **.**

2. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^2\sqrt{3^n}}x^n$.

3.Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5^n}x^n$.

Рекомендована література:

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./ В.П. Дубовик, І.І Юрик.– К., Вища школа , 1993. – 648с.
2. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.

3. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л. : Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 6. Ряди Фур'є

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Рівність між функцією та сумою її ряду Фур'є за змістом теореми Діріхле означає:
A. рівність в усіх точках інтервалу;
B. рівність в точках неперервності ;
C. рівність в точках неперервності, окрім кінців інтервалу.
D. Інша відповідь.

А) 0, 0, k a k = = ∞ ; Б) 0, 1, k b k = = ∞.
Тригонометричний ряд Фур'є парної функції має коефіцієнти
A. $a_k = 0, k = \overline{0,\infty}$;
B. $b_k = 0,\ k = \overline{1,\infty}$;
C. $a_k = 0, k = \overline{0,\infty}$; $b_k = 0,\ k = \overline{1,\infty}$;
D. . $a_k \neq 0, k = \overline{0,\infty}$; $b_k \neq 0,\ k = \overline{1,\infty}$.

Яку функцію можна подати, як суму простих гармонік?
A. сталу;
B. періодичну;
C. зростаючу;
D. спадну.

3. Задачі для самостійного розв'язування
1. Розкласти задану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі *(a; b).*

.а) $f(x) = |x| - 1$ в інтервалі (-1; 1).
б) $f(x) = x + 4$ в інтервалі (-2; 2).
в) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < 0, \\ x, & 0 \le x < 3. \end{cases}$ в інтервалі (-3; 3).
г) $f(x) = x^2$ в інтервалі (-π;π).

д) $f(x)=\begin{cases}-x, & -1<x<0,\\ 0, & 0\le x<1.\end{cases}$ в інтервалі (-1; 1).

е) $f(x)=2x+3$ в інтервалі (-π;π).

є) $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0,\\ \pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ в интервале (-π;π).

ж) $f(x)=|x|+1$ в інтервалі (-π;π).

з) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ 3, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ в інтервалі (-2;2).

и) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \dfrac{1}{4}\pi x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ в інтервалі (-π;π).

Рекомендована література:

1. Вища математика : підручник / М. Г. Медведєв, В. М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./ В.П. Дубовик, І.І Юрик.– К., Вища школа , 1993. – 648с.
3. Лавріненко Н.М. Вища математика. Частина перша: навч. посіб. для студ. техн. спец. / М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т ім. М. Туган-Барановського, каф.вищої і приклад. математики; Н. М. Лавріненко, С. М. Латинін, А.О. Возняк.– Донецьк, 2010. – 600 с.
4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І . Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Навчальне видання

Копайгора Ольга Костянтинівна,

Ляшенко Ольга Сергіївна

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ
ВИЩА МАТЕМАТИКА
Частина ІІ

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет
економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського
50042, Дніпропетровська обл.,
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.
Свідоцтво суб'єкта видавничої
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.