МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.

Вища математика

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни

Ступінь: бакалавр

Кривий Ріг
2020

МИНИСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.

Вища математика

Методичні рекомендації для вивчення дисципліни
Частина I

Ступінь: бакалавр

Затверджено на засіданні
кафедри загальноінженерних дисциплін
та обладнання
Протокол №1
від «28» серпня 2019 р.

Схвалено навчально-методичною
радою
ДонНУЕТ
Протокол №1
від «29» серпня 2019 р

Кривий Ріг
2020

УДК 512(076)
К 56

Копайгора О.К., Ляшенко О.С.
К 56 Вища математика [Текст] : метод. рекомендації до вивч. дисц.Ч.І / О.К. Копайгора, О.С. Ляшенко.; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання. – Кривий Ріг : ДонНУЕТ, 2019. – 73 с.

Методичні рекомендації призначені для ЗВО всіх форм навчання інженерних спеціальностей ГМБ, ЕМБ і покликані допомогти студентам організувати вивчення дисципліни «Вища математика» завдяки інформації щодо змісту модулів та тем дисципліни, планів практичних занять, завдань для самостійного вивчення та розподілу балів за видами робіт, що виконуються студентами протягом вивчення дисципліни. Методичні рекомендації містять перелік питань для підготовки до підсумкового контролю та перелік основної та додаткової літератури.

УДК 512(076)

ЗМІСТ

ВСТУП………………………………………………………………… 4

ЧАСТИНА 1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»… ………………………… 5

ЧАСТИНА 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ……………………………………………… 14

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри , векторної алгебри і аналітичної геометрії......……………………. 15

Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення............ 30

ЧАСТИНА 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ…………………..…………… 55

Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри , векторної алгебри і аналітичної геометрії.....…………………… 56

Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення.............. 64

ВСТУП

Загальний курс вищої математики є фундаментом освіти спеціаліста-інженера. Сучасна наука та техніка все більше застосовує математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це обумовлено передусім швидким розвитком обчислювальної техніки, завдяки чому значно розширюються можливості успішного застосування математики в розв’язанні конкретних задач.

Курс вищої математики належить до загальноосвітнього циклу дисциплін і викладається в перших двох семестрах. Теми, що розглядаються в курсі вищої математики, а також кількість часу, який планується для викладання кожної з цих тем, нерозривно зв’язані з вимогами спеціальних та інших загальноосвітніх кафедр, що стосується специфіки їх дисциплін.

Багато уваги приділено аналітичній геометрії, елементам лінійної алгебри та диференціальному і інтегральному численням, без яких неможливо вивчати в вузі теми дисциплін, як фізика, теоретична механіка, нарисна геометрія. Край необхідно для теоретичної механіки та курсу теоретичних основ електротехніки знання з теорії диференціальних рівнянь.

ЧАСТИНА 1.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

1. Опис дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Обов'язкова *(для студентів спеціальності "назва спеціальності")* / вибіркова дисципліна	Обов'язкова для студентів напряму підготовки 142 «Енергетичне машинобудування», 133 «Галузеве машинобудування»
Семестр *(осінній / весняний)*	**Осінній**
Кількість кредитів	**6**
Загальна кількість годин	**180**
Кількість змістовних модулів	**2**
Лекції, годин	**45**
Практичні / семінарські, годин	**45**
Лабораторні, годин	
Самостійна робота, годин	**90**
Тижневих годин для денної форми навчання:	
аудиторних	**6**
самостійної роботи студента	**6**
Вид контролю	**екзамен**

2. Програма дисципліни

Ціль – формування у майбутніх спеціалістів базових математичних знань для розв'язування задач у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання виробничих задач.

Завдання: надання студентам знань із основних розділів вищої математики: означень, теорем, правил; доведення основних теорем; вивчення закономірностей окремого випадкового явища та масових випадкових явищ, прогнозування їх характеристик; формування початкових умінь самостійно поглиблювати свої знання, розвивати логічне мислення; виробити вміння формулювати свої знання, розв'язувати прикладні задачі і будувати економіко-математичні моделі.

Предмет:основні поняття та терміни вищої математики

Зміст дисципліни розкривається в темах:

1.Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь.

2. Векторна алгебра

3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі.

4.Функції. Границя функції. Неперервність функції.

5.Диференціальне числення функції однієї змінної.

6.Інтегральне числення

7.Функції декількох змінних

3. Структура дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма навчання)				
	усього	у тому числі			
		лекц.	пр./сем.	лаб.	СРС

1	2	3	4	5	6
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри , векторної алгебри і аналітичної геометрії					
Тема 1. Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь	38	10	10	-	18
Тема 2. Векторна алгебра	26	6	6	-	14
Тема 3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі	26	6	6		14
Разом за змістовим модулем 1	**90**	**22**	**22**	**-**	**46**
Змістовий модуль 2. Диференціальне та інтегральне числення.					
Тема 4. Функції. Границя функції. Неперервність функції.	23	6	6	-	11
Тема 5. Диференціальне числення функції однієї змінної	23	6	6	-	11
Тема 6. Інтегральне числення.	23	6	6		11
Тема 7. Функції декількох змінних	21	5	5		11
Разом за змістовим модулем 2	**90**	**23**	**23**		**44**
Усього годин	**180**	**45**	**45**	**-**	**90**

4. Теми семінарських/практичних/лабораторних занять

№ з/п	Вид та тема практичного заняття	Кількість годин
1	Практична робота 1. Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь	10
2	Практична робота 2. Векторна алгебра	6
3	Практична робота 3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі.	6
4	Практична робота 4.Функції. Границя функції. Неперервність функції.	6
5	Практична робота 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.	6
6	Практична робота 6. Інтегральне числення	6
7	Практична робота 7.Функції декількох змінних	5

5. Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання згідно варіанту

6. Обсяги, зміст та засоби діагностики самостійної роботи

Вид та тема практичних занять	Кількість годин самостій-ної роботи	Зміст самостійної роботи	Засоби діагностики
Змістовий модуль 1. Елементи лінійної алгебри , векторної алгебри і аналітичної геометрії			
1. Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь.	18	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем	Опитування, перевірка задач

		лінійних рівнянь».	
2. Векторна алгебра	14	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Векторна алгебра».	Опитування, перевірка задач
3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі.	14	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі»	Опитування, перевірка задач
Разом змістовий модуль 1	**46**		
Змістовий модуль 2. **Диференціальне та інтегральне числення**			
4. Функції. Границя функції. Неперервність функції.	11	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Функції. Границя функції. Неперервність функції».	Опитування, перевірка задач
5. Диференціальне числення функції однієї змінної.	11	1 Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2.Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Диференціальне числення функції однієї змінної».	Опитування, перевірка задач
6. Інтегральне числення	11	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач.2.Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Інтегральне числення»	Опитування, перевірка задач
7. Функції декількох змінних	11	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу, необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: «Функції декількох змінних»	Опитування, перевірка задач
Разом змістовий	**44**		

модуль 2			
Разом	**90**		

7. Матриця зв'язку між дисципліною/ змістовим модулем, результатами навчання та компетентностями

Результати навчання	Компетентності												
	Загальні							Предметно-спеціальні					
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
1. здатність застосування математичних знань у процесі розв'язування економічних задач			+		+						+		
2.здатністьпобудовиматематичних моделей різних об'єктів та процесів			+		+						+		
3. здатність дослідження процесів за допомогою диференційного та інтегрального числення			+		+						+		
4. здатність використовувати ряди в ході аналізу взаємозв'язків різних показників			+		+						+		

8. Методи викладання

Лекції, практичні заняття, самостійна робота (розв'язування задач).

9. Методи оцінювання

Екзамен.

10. Розподіл балів, які отримують студенти

Відповідно до системи оцінювання знань студентів ДонНУЕТ, рівень сформованості компетентностей студента оцінюються у випадку проведення екзамену: впродовж семестру (50 балів) та при проведені підсумкового контролю - екзамену (50 балів).

Оцінювання студентів протягом семестру

№ теми практичного заняття	Вид роботи/бали					
	Тестові завдання, письмові опитування	Ситуаційні завдання, задачі	Обговорення теоретичних питань теми	Індиві-дуальне завдання	ПМК	Сума балів
Змістовий модуль 1						
Тема 1	2		1	4	2	9
Тема 2	2		2	3	2	9
Тема 3	1		2	3	1	7
Разом змістовий модуль1	5		5	10	5	**25**
Змістовий модуль 2						
Тема 4	2		2	3	1	8
Тема 5	1		1	3	1	6
Тема 6	1		1	2	2	6
Тема 7	1		1	2	1	5
Разом змістовий модуль 2	5		5	10	5	**25**

Разом	10		10	20	10	**50**

Загальне оцінювання результатів вивчення дисципліни

Для виставлення підсумкової оцінки визначається сума балів, отриманих за результатами екзамену та за результатами складання змістових модулів. Оцінювання здійснюється за допомогою шкали оцінювання загальних результатів вивчення дисципліни (модулю).

Оцінка		
100-бальна шкала	**Шкала ECTS**	**Національна шкала**
90-100	A	5, «відмінно»
80-89	B	4, «добре»
75-79	C	
70-74	D	3, «задовільно»
60-69	E	
35-59	FX	2, «незадовільно»
0-34	F	

11. Методичне забезпечення

1.Навчальний посібник.
2. Електронний конспект лекцій.
3. Методичні вказівки з вивчення дисципліни.
4. Комплекти індивідуальних завдань.
5.Навчальна та наукова література, нормативні документи.

12. Рекомендована література

Основна

1. Вища математика : підручник / М.Г. Медведєв, В.М. Романенко, О. М. Мулява, С. В. Гузенко – К. : НУХТ, 2016.-219 с. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2016.
2. Вища математика для економістів. [Електронний ресурс] : навчальний підручник / Т.В. Зінченко, О.І. Островська, В.М. Сафонов – К. : НУХТ, 2017.. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.30 – 07.06.2017.
3. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.
4. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М.А. Мартиненко, О.П. Зінькевич, В.В.Листопад, О.А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.
5. Мартиненко М.А. (Теор. поля, мат. фізика), Юрик І. І. (Функ.комп.змін., операц.числ.) Вища математика. Спеціальні розділи: Навч.посіб. – К.:Ін-т. математики НАНУ, 2015. – 539с.
6. Мартиненко М.А.Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: Навчальний посібник / М.А.Мартиненко, І.І.Юрик / Вид.4-е,доповн. та перер. - К.:Видавничий Дім «Слово», 2014. – 296 с.

7. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика/В.В. Фортуна, О.І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Допоміжна

1. Мартиненко М. А. Вища математика. [Електронний ресурс] : навч. посіб. / М.А. Мартиненко, О.М. Нещадим, В.М. Сафонов – К. : НУХТ, 2016.-230 с. Реєстраційний номер електронного посібника у НМУ 52.22 – 25.06.2016.

2. Зінькевич О. П. Вища математика. [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О.П. Зінькевич, В. М. Сафонов, О. М. Нещадим– К. : НУХТ, 2016.-193 с. Реєстраційний номер електронного посібника у НМУ 52.23 – 25.06.2016.

3. Шипачев В.С. Высшая математика: рекоменд. М-вом образования и науки РФ учебник для студ. высш. учеб. завед. / В.С. Шипачев; М-во образования и науки РФ. – М.: Высш. шк., 2010. – 479 с.

4. Шестаков А.А. Курс высшей математики. Интегральноеисчисление. Дифференциальныеуравнения. Векторныйанализ: учеб. для студ. вузов / А.А. Шестаков, И.А. Малышева, Д.П. Полозков; под ред. А.А. Шестакова. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.

5. Шкіль М.І. Вища математика: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди: підручник у 3 кн. Кн. 2 / М.І. Шкіль, Т.В: Колесник. – К.: Либідь, 2004. – 251 с.

6. Шкіль М.І. Вища математика: підручник у 3 кн. Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння / М.І. Шкіль, Т.В: Колесник. – К.: Либідь, 2004. – 351 с.

Інформаційні ресурси

1. Вища освіта України і Болонський процес / Навчальна програма. – Київ - Тернопіль: ТДПУ ім. В. Гнатюка, 2004. – 18 с.

2. ІСУЯ 7.5.1 – 03.01/УН «Загальні вимоги до організації процесу проведення навчальних занять».

3. ІСУЯ 7.5.1 – 03.02/УН «Загальні вимоги до організації методичного забезпечення виконання індивідуальних завдань з дисциплін».

4. ІСУЯ 7.5.1 – 03.03/УН «Загальні вимоги до організації виконання індивідуальних завдань».

5. ІСУЯ 7.5.1 – 03.04/УН «Загальні вимоги до організації СРС»

6. ІСУЯ 7.5.1 – 03.05/УН «Загальні вимоги до організації НДРС»

ЧАСТИНА 2.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ , ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

Тема 1. Визначники. Елементи теорії матриць. Загальна теорія систем лінійних рівнянь.

1.Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Матриці. Лінійні дії над матрицями. Добуток матриць.
2. Визначники другого та третього порядку. Їх властивості та методи обчислення.
3. Обернена матриця.
4. Розв’язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Сумісні, несумісні та невизначені системи.
5. Формули Крамера, умови застосування.
6. Метод Гауса розв’язання та дослідження систем.
7. Матричний метод розв’язання систем.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклади розв’язування завдання.

Приклад 1. Знайти суму двох матриць АіВ:

Розв’язання

$$A+B=\begin{pmatrix}2&3&7\\-1&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&5&-1\\2&3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4&3+5&7-1\\-1+2&0+3&4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8&6\\1&3&2\end{pmatrix}$$

Приклад 2. Знайти добуток матриці А на число:

Розв’язання

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}5&4&-2\\6&0&4\\2&-1&5\\-3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&12&-6\\18&0&12\\6&-3&15\\-9&12&3\end{pmatrix}$$

Приклад3. Перемножити матриціАіВ:

Розв’язання З означення добутку матриць слідує, що помножити матрицю ***А*** на матрицю ***В*** можна лише в тому випадку, коли число стовпців в першій матриці дорівнює числу рядків в другій матриці

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&0&6&2\\4&5&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&4&0\\1&5&1\\3&2&6\\0&1&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot6+0\cdot1+6\cdot3+2\cdot0&3\cdot4+0\cdot5+6\cdot2+2\cdot1&3\cdot0+0\cdot1+6\cdot6+2\cdot5\\4\cdot6+5\cdot1+1\cdot3+(-1)\cdot0&4\cdot4+5\cdot5+1\cdot2+(-1)\cdot1&4\cdot0+5\cdot1+1\cdot6+(-1)\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36&26&46\\32&42&6\end{pmatrix}$$

Приклад4. Обчислити визначники:

Розв'язання

а)

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 7\cdot(-5) - 3\cdot(-2) = -35 + 6 = -29$$

б)

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin x\cdot(-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

в)обчислити визначник, розклавши його за елементами першої строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

=12-15-2·(-8-25)+3·(-6-15) = -3+66-63=0.

Приклад5. Знайти обернену матрицю до матриці А:

Розв'язання

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пересвідчимся, що матриця А невироджена:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 0 - 0 - 4 - 12 = -10 \neq 0;$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці А та запишемо матрицюВ, складену з них, далі її транспонуємо $B^T = \tilde{A}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -12\ A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8,\ A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$B = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = B^T = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -4 \end{pmatrix};$$

4) $$A^{-1} = \frac{1}{-10}\begin{pmatrix} -12 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix};$$

5) Перевіряємо:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{-10}\begin{pmatrix}-12 & -2 & 6\\ 1 & 1 & -2\\ 8 & -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Легко переконатися, що $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$

.

Приклад6. Розв'язати систему:

$$\begin{cases}2x_1+\ x_2=7\\ x_1-7\,x_2=-2\end{cases}$$

Розв'язання:

Визначник з коефіцієнтів є

$$d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7$$

він відмінний від нуля, і тому до системи може бути застосовано правило Крамера. Чисельниками для невідомих будуть визначники

$d_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19$, $d_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11$

Таким чином, розв'язком даної системи служить наступна упорядкована пара чисел:

$$x_1=\frac{d_1}{d}=\frac{19}{7};\ x_2=\frac{d_2}{d}=\frac{11}{7};.$$

Відповідь: Корінь рівняння $\left(\frac{19}{7};\ \frac{11}{7}\right)$.

Приклад7. Розв'язати систему методом Крамера:

Розв'язання:

$$\begin{cases}2x+3y+z=1\\ x+y+z=0\\ x-y=1\end{cases}.$$

За формулами: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Обчислюємо визначники системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1+2=3\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-1+4=3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3.$$

Щоб одержати визначник Δ_1, замінимо у визначнику системи Δ перший стовпчик на стовпчик вільних членів; замінюючи у визначнику Δ другий стовпчик на стовпчик вільних членів, одержуємо Δ_2, аналогічно одержуємо Δ_3, вставляючи замість третього стовпчика стовпчик із вільних членів. Одержуємо розв'язок:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Відповідь: Корінь рівняння (1; 0; -1)

Приклад8. Розв'язати систему за допомогою оберненої матриці:

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Визначник $\Delta(A) = 3 \neq 0$, значить матрицяAмає обернену матрицю A^{-1}. Тоді розв'язок знайдемо із рівняння: $X = A^{-1}B$, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Знайдем матрицю A^{-1} (*див. приклад4*)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x = 1;\ y = 0;\ z = -1.$

Приклад9. Розв'язати систему методом Гауса:

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

Перепишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Ми змінили місцями 1-е та 2-е рівняння заданої системи, щоб спростити обчислення:

Складаємо розширену матрицю:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

Нульових, несумісних рядків немає, $a_{11} = 1 \neq 0$; виключимо 1-е невідоме x_1 з усіх рівнянь системи, крім 1-го. Для цього множимо елементи 1-огорядка матриці $\overline{A}$ на «-2» и додамо з відповідними елементами 2-огорядка, Потім множимо елементи 1-огорядка на «-3» и додамо з відповідними элементами третього рядка. Одержимо:

$$\overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 6 & 14 \\ 0 & 7 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

Матриці $\overline{A_1}$ відповідає система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ \quad 7x_2 + 6x_3 = 14 \\ \quad 7x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}.$$

В матриці $\overline{A_1}$ нульових , несумісних рядків також немає, виключимо невідоме x_2 з 3-го рівняння системи, для цього множимо елементи 2-огорядка матриці $\overline{A_1}$ на «-1» и додамо до елементів 3-огорядка:

$$\overline{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Матриця $\overline{A}_2$ має несумісний рядок (3-ій рядок має усі елементи рівні нулю, окрім останнього). Цьому рядку відповідає несумісне рівняння $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$. Значить, система розв'язків не має ($0 \neq 2$), система несумісна.

Практичні завдання

Завдання 1Знайти значення виразу 3A+B*C за варіантом:

№ вар.		A	B	C
1	7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
2	8	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3	9	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4	10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	11	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6	12	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Завдання2Розв'язати СЛАР матричним методом, методом Крамера та Гауса.

Вар.		Вар.		Вар.	
1	$\begin{cases} 2\cdot X + Y + 3\cdot Z = 7 \\ X - Y + 2\cdot Z = 1 \\ 3\cdot X + 2\cdot Y - Z = 6 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 2\cdot X + Y - Z = -1 \\ X + 4\cdot Y + 2\cdot Z = 15 \\ 7\cdot X - 2\cdot Y + 3\cdot Z = -7 \end{cases}$	9	$\begin{cases} X + 3\cdot Y + 2\cdot Z = 3 \\ 3\cdot X - 5\cdot Y + Z = -1 \\ 2\cdot X - Y + Z = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} X - Y + 4\cdot Z = 9 \\ 2\cdot X + Y + Z = 4 \\ 7\cdot X + 3\cdot Y + 2\cdot Z = 11 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 6\cdot X - 5\cdot Y + 3\cdot Z = 13 \\ 2\cdot X + 3\cdot Y + 4\cdot Z = 9 \\ X - 2\cdot Y + 3\cdot Z = 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2\cdot X - Y + 5\cdot Z = 5 \\ 3\cdot X + 2\cdot Y - Z = 4 \\ X + Y - 3\cdot Z = 1 \end{cases}$

3	$\begin{cases} 5\cdot X+Y+3\cdot Z=-4 \\ 2\cdot X+5\cdot Y-6\cdot Z=3 \\ 3\cdot X+7\cdot Y-2\cdot Z=4 \end{cases}$	7	$\begin{cases} X-Y+2\cdot Z=-2 \\ 2\cdot X+Y+Z=-1 \\ 3\cdot X-2\cdot Y-Z=-11 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3\cdot X+2\cdot Y+6\cdot Z=-8 \\ 2\cdot X-Y+3\cdot Z=-3 \\ X+5\cdot Y-2\cdot Z=-7 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 7\cdot X-2\cdot Y+4\cdot Z=0 \\ 3\cdot X+Y+3\cdot Z=5 \\ 2\cdot X-4\cdot Y+3\cdot Z=-5 \end{cases}$	8	$\begin{cases} X-2\cdot Y+Z=0 \\ 2\cdot X+3\cdot Y-Z=5 \\ X+4\cdot Y-7\cdot Z=-12 \end{cases}$	12	$\begin{cases} X+3\cdot Y+4\cdot Z=-1 \\ X+2\cdot Y+3\cdot Z=4 \\ -2\cdot X+4\cdot Y-Z=0 \end{cases}$

Тема 2. Векторна алгебра

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Які величини називаються векторними?
2.Назвати лінійні операції над векторами.
3. Які вектори називаються:
– рівними ;
– спів напрямленими ;
– протилежно напрямленими ;
– колінеарними ;
– компланарними ?
4. Що називається абсолютною величиною вектора ?
5. Формула для знаходження координат вектора, з початком в точці $A(x_1;y_1;z_1)$ та кінцем в точці $B(x_2;y_2;z_2)$.
5. Скалярний добуток і його властивості.
6.Що називається векторним добутком?•··
7.Що називається мішаним добутком?
8. Умова компланарності векторів.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклади розв’язування завдання.

Приклад1Перевірити колінеарність векторів $\overline{a}$ = {2, -1, 3} и $\overline{b}$ = {-6, 3, -9}.

Розв’язання:Вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні. Перевіримо умову:

$\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}=\frac{3}{-9}$, тобто коефіцієнт пропорційності існує та дорівнює $-\frac{1}{3}$

Відповідь: $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

Приклад 2Довести теорему косинусів у трикутнику.

Розв’язання. Зобразимо сторони трикутника *ABC* у вигляді векторів$\overrightarrow{AB}$≡***c***, $\overrightarrow{AC}$≡***b***, $\overrightarrow{CB}$≡***a***. Тоді ***a*** +***b***=***c***.

Піднесемо цей вираз до квадрату:$\boldsymbol{a^2+b^2+2a\cdot b=c^2}$.

Використовуючи поняття скалярного добутку, одержимо

a·b=|***a***|*|***b***|*cos(**a,b**)*= |***a***|*|***b***|*cos*(π-α*)*= -|***a***|*|***b***|*cos*α , де α=∠ABC/

Таким чином, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

Приклад 3. Знайти площу трикутника, заданого вершинами А(1; 2; 0), В(0; -2; 1), С(-1; 0; 2).

Розв'язання Площа трикутника АВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB}$ = (-1; -4; 1), $\overrightarrow{AC}$= (-2; -2; 2), то за формулою $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

У нашому випадку формула приймає вигляд:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-6\vec{k}$$

Тоді за формулою довжини вектора, площа трикутника дорівнює:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=3\sqrt{2}\,(\text{кв. од.})$$

Відповідь: $S_\Delta=3\sqrt{2}\,(\text{кв. од.})$

Приклад4. За координатами вершин $A_1(3;3;1)$, $A_2(2;-2;1)$, $A_3(2;1;0)$, $A_4(1;1;1)$ накреслити піраміду $A_1A_2A_3A_4$ і засобами векторної алгебри знайти:

1) довжину сторони A_1A_2,
2) косинус кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3,
3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$
4)роботу сили, що є рівнодіючою сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, під дією якої тіло переміщується прямолінійно з точки A_1 в точку A_4,де $\vec{F}_1=\{-1;-2;3\}$, $\vec{F}_2=\{-2;-3;9\}$

Розв'язання

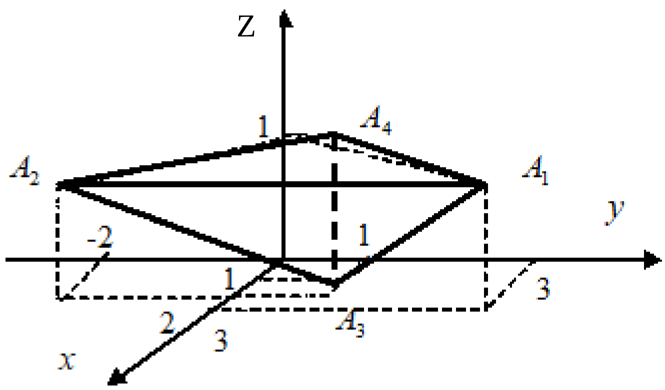


Рисунок до прикладу 4.

1) Довжина сторони A_1A_2

Для знаходження довжини використаємо формулу:

$$|A_1A_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$|A_1A_2|=\sqrt{(2-3)^2+(-2-3)^2+(1-1)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(0)^2}$$

$\left|A_1A_2\right| = \sqrt{1+25}$,

Відповідь: $\left|A_1A_2\right| = \sqrt{26}$

2) косинус кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3

Скористаємось формулою: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|}$

Із попередньої задачі відомо, що, $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{26}$, тоді $\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$,

$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-3;\ 1-3;\ 0-1)$, $\overrightarrow{A_1A_3} = (-1;\ -2;\ -1)$, $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) * (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ =(-1)*(-1)+(-5)*(-2)+0*(-1)=11

$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3} = 11$

Відповідь: $\cos\varphi = \dfrac{11}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}$, $\cos\varphi = \dfrac{11}{2\sqrt{39}}$, $\cos\varphi = \dfrac{11\sqrt{39}}{78}$, $\cos\varphi \approx 0{,}881$.

3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$

$V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1)$, $\overrightarrow{A_1A_4} = (1-3;\ 1-3;\ 1-1)$,

$\overrightarrow{A_1A_4} = (-2;\ -2;\ 0)$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(1-5) = -8$$

$V = \dfrac{1}{6}\left|-8\right|$ $\qquad V = \dfrac{4}{3}$ (куб.од)

4) За фізичним змістом скалярного добутку $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$. Рівнодіюча сил = сумі

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, $\vec{F} = (-1 \quad -2 \quad 3) + (-2 \quad -3 \quad 9)$; $\vec{F} = (-3 \quad -5 \quad 12)$; $\vec{S} = \overrightarrow{A_1A_4} = (-2 \quad -2 \quad 0)$

$A = \vec{F}\cdot\vec{S} = (-3 \quad -5 \quad 12)(-2 \quad -2 \quad 0) = 6 + 10 + 0 = 16$; $A = 16$ (Дж)

Практичні завдання

Завдання 1. За координатами вершин накреслити піраміду $A_1A_2A_3A_4$ і засобами векторної алгебри знайти: 1) довжину сторони A_1A_2, 2) косинус кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3,3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

1.	$A_1(4;0;0), A_2(-2;1;2), A_3(1;3;2), A_4(3;2;1)$
2.	$A_1(-2;1;2), A_2(4;0;0), A_3(3;2;7), A_4(1;3;2)$
3.	$A_1(1;3;2), A_2(3;2;7), A_3(4;0;0), A_4(-2;1;2)$
4.	$A_1(3;2;7), A_2(1;3;2), A_3(-2;1;2), A_4(4;0;0)$
5.	$A_1(3;1;-2), A_2(1;-2;1), A_3(-2;1;0), A_4(2;2;5)$
6.	$A_1(1;-2;1), A_2(3;1;-2), A_3(2;2;5), A_4(-2;1;0)$
7.	$A_1(-2;1;0), A_2(2;2;5), A_3(3;1;2), A_4(1;-2;1)$
8.	$A_1(2;2;5), A_2(-2;1;0), A_3(1;-2;1), A_4(3;1;2)$
9.	$A_1(1;-1;6), A_2(4;5;-2), A_3(-1;3;0), A_4(6;1;5)$
10.	$A_1(6;1;5), A_2(-1;3;0), A_3(4;5;-2), A_4(1;-1;6)$
11.	$A_1(2;1;-1), A_2(2;-3;0), A_3(1;1;-1), A_4(5;-4;-2)$
12.	$A_1(-3;2;-2), A_2(3;-2;-1), A_3(1;1;-1), A_4(4;-1;-5)$

Тема 3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

Аналітична геометрія на площині.

1.Які бувають види рівнянь прямої на площині ?
2.Записати рівняння прямої за точкою та нормальним вектором.
3. Записати рівняння прямої за точкою та напрямним вектором.
4. Записати рівняння прямої за точкою з кутовим коефіцієнтом.
5. Як знайти кутовий коефіцієнт прямої?
6. Як обчислити кут між двома прямими?
7. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
8. Канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.

Аналітична геометрія в просторі.

1. Канонічне і параметричне рівняння прямої в просторі.
2. Як знайти кут між двома прямими?

3. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих в просторі.
4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
5. Назвати загальне рівняння площини; рівняння площини у відрізках; рівняння площини,
що проходить через три задані точки.
6. Як знайти кут між двома площинами?
7. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин в просторі.
8. Назвати випадки взаємного розташування прямої і площини в просторі.
9. Як визначити кут між прямою та площиною?
10. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини, а також умову того, пряма належить площині.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклад розв'язування завдання.

Приклад. 1. За координатами вершин накреслити трикутник ΔABC і знайти:

1) рівняння лінії BC, 2) рівняння висоти AK, 3) довжину висоти AK.

де $A(8;0)$, $B(-4;-5)$, $C(-8;-2)$

Розв'язання

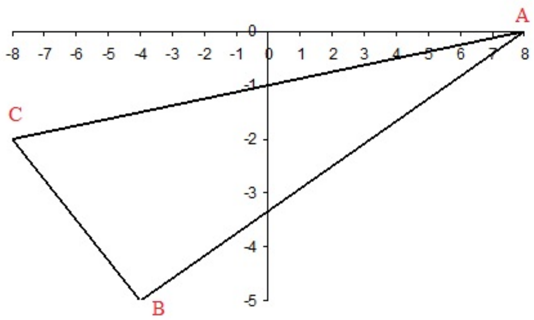


Рисунок до прикладу 1

1) Рівняння лінії BC напишемо за формулою:

$(BC): \dfrac{x-x_C}{x_B-x_C} = \dfrac{y-y_C}{y_B-y_C}$; $(BC): \dfrac{x+8}{-4+8} = \dfrac{y+2}{-5+2}$; $(BC): \dfrac{x+8}{4} = \dfrac{y+2}{-3}$;

$(BC): -3x-24 = 4y+8$; $(BC): -3x-4y-32=0$; $(BC): 3x+4y+32=0$

Перевірка

$B(-4;-5) \Rightarrow x=-4$; $3\cdot(-4)+4y+32=0$; $-12+4y+32=0$; $4y+20=0$; $4y=-20$; $y=-5, B\in(BC)$

$C(-8;-2) \Rightarrow x=-8$; $3\cdot(-8)+4y+32=0$; $-24+4y+32=0$; $4y+8=0$; $4y=-8$; $y=-2$, $C\in(BC)$

2) рівняння висоти AK

$AK \perp BC$

$(BC): 3x+4y+32=0$; $y=-\dfrac{3}{4}x-8$; $k_{BC}=-\dfrac{3}{4}$.

Рівняння напишемо, користуючись формулою:

$(AK): y - y_A = k_{AK}(x - x_A)$; $(AK): y - 0 = k_{AK}(x-8)$; $(AK): y = k_{AK}(x-8)$

$AK \perp BC \Rightarrow k_{AK} \cdot k_{BC} = -1 \Rightarrow k_{AK} \cdot (-\frac{3}{4}) = -1 \Rightarrow k_{AK} = \frac{4}{3}$

$(AK): y = \frac{4}{3}(x-8)$; $(AK): -4x + 3y + 32 = 0$

3) довжина висоти AK.

$|AK| = \frac{|3x_A + 4y_A + 32|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$; $|AK| = \frac{|3 \cdot 8 + 4 \cdot 0 + 32|}{\sqrt{25}}$; $|AK| = \frac{56}{5}$; $|AK| = 11{,}2$ (од)

Приклад. 2.Знайти площу квадрату, дві сторони якого лежать на прямих 4x -3y– 10 = 0 і 8x - 6y + 15 = 0

Розв'язання: Оскільки задані прямі паралельні, то довжину d сторони квадрата можна знайти як відстань від довільної точки однієї прямої до другої прямої. Знайдемо яку-небудь точку на першій прямій. Нехай, наприклад, x = 1, тоді 4·1 – 3y - 10 = 0,звідки y = -2. Отже точка $M_0(1; -2)$ належить першій прямій.

За формулою знайдемо відстань від точки M_0до другої прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 1 - 6 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{7}{2}$$

Знайдена відстань і є величиною сторони квадрату. Тоді площа квадрата

$$S = d^2 = \frac{49}{4}$$

Відповідь:площа квадрату $S = \frac{49}{4}$ (кв. од).

Приклад. 3. Привести рівняння кола до канонічного виду, знайти центр кола та його радіусі накреслити коло: $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 74 = 0$

Розв'язання: Рівняння кола, з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Виділимо повний квадрат відносно змінних x та y заданому рівнянні другого порядку:

$x^2 + y^2 - 14x - 6y - 74 = 0$; $(x^2 - 14x + 49) - 49 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 74 = 0$

$(x-7)^2 - 49 + (y-3)^2 - 9 - 74 = 0$; Рівняння кола приймає вигляд:

$(x-7)^2 + (y-3)^2 = 132$;да центр має координати $C(7;\ 3)$;а радіус $R = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$

$R \approx 11{,}49$

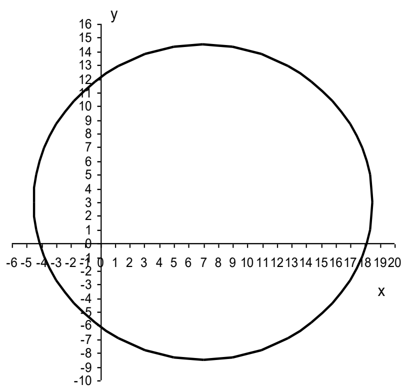


Рисунок до прикладу 3

Приклад. 4. . За координатами точок A_1, A_2, A_3, A_4 знайти:
1) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 2) рівняння площини, що проходить через A_4 паралельно $A_1A_2A_3$; 3) довжину висоти A_4K: $A_1(3;3;1),\ A_2(2;-2;1),\ A_3(2;1;0),\ A_4(1;1;1)$

Розв'язання: 1). рівняння площини $A_1A_2A_3$ напишемо за формулою:

$$(A_1A_2A_3):\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0; \qquad (A_1A_2A_3):\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-1 \\ 2-3 & -2-3 & 1-1 \\ 2-3 & 1-3 & 0-1 \end{vmatrix}=0;$$

$$(A_1A_2A_3):\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-1 \\ -1 & -5 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$(A_1A_2A_3):\ (x-3)\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=0;$$

$(A_1A_2A_3)$**:** $5(x-3)-(y-3)-3(z-1)=0$**;** $5x-15-y+3-3z+3=0$**;**

Рівняння площини має вигляд:

$(A_1A_2A_3)$**:** $5x-y-3z-9=0$

Перевірка

$A_1(3;3;1)\Rightarrow 5\cdot3-3-3\cdot1-9=0\Rightarrow 15-3-3-9=0\Rightarrow 15-15=0\Rightarrow A_1\in(A_1A_2A_3)$

$A_2(2;-2;1)\Rightarrow 5\cdot2+2-3\cdot1-9=0\Rightarrow 12-3-9=0\Rightarrow 12-12=0\Rightarrow A_2\in(A_1A_2A_3)$

$A_3(2;1;0)\Rightarrow 5\cdot2-1-3\cdot0-9=0\Rightarrow 10-1-9=0\Rightarrow 10-10=0\Rightarrow A_3\in(A_1A_2A_3)$.

2) рівняння площини (P), що проходить через A_4 паралельно $A_1A_2A_3$

($A_1A_2A_3$)**:** $5x-y-3z-9=0$ **;** $\vec{N}_1=(5;-1;-3)$ **;** Для написання рівняння площини скористаємося рівнянням:

(P): $A\cdot(x-x_4)+B\cdot(y-y_4)+C\cdot(z-z_4)=0$ **,** $\vec{N}=(A,B,C)$**;** $\vec{N}\perp(P)$

(P): $A\cdot(x-1)+B\cdot(y-1)+C\cdot(z-1)=0$**;**

$(P)\|(A_1A_2A_3)\Rightarrow\vec{N}\uparrow\downarrow\vec{N}_1$**,** тобто можна прийняти $\vec{N}=(A,B,C)=(5;-1;-3)$**;**

(P): $5\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-1)+(-3)\cdot(z-1)=0$**;**

(P): $5x-5-y+1-3z+3=0$**;** Остаточно, рівняння площини має вигляд:

(P): $5x-y-3z-1=0$

3) довжина висоти A_4K.

Довжина висоти $|A_4K|=\dfrac{8\sqrt{35}}{35}$ (од.)

Практичні завдання

Завдання 1. За координатами вершин накреслити трикутник ΔABC і знайти: рівняння лінії BC, рівняння висоти AK, довжину висоти AK.

Вар.	Координати точок	Вар.	Координати точок
1.	A(-5;2), B(2;-1), C(1;-2)	2.	A(1;1), B(-5;4), C(-2;5)
3.	A(0;3), B(2;4), C(-8;-1)	4.	A(-1;1), B(-7;4), C(-4;5)
5.	A(1;-3), B(3;-5), C(-5;7)	6.	A(1;-1), B(-5;2), C(-2;3)
7.	A(2;-1), B(4;2), C(5;1)	8.	A(-1;-1), B(-7;2), C(-4;3)
9.	A(9;6), B(-7;-6), C(0;18)	10.	A(1;0), B(7;3), C(4;4)
11.	A(1;1), B(7;4), C(4;5)	12.	A(7;1), B(-5;-4), C(-9;-1)

Завдання 2. Привести рівняння кола до канонічного виду, знайти центр кола та його радіусі накреслити коло.

Вар.	Рівняння	Вар.	Рівняння
1.	$x^2+y^2-6x+4y-29=0$	2.	$x^2+y^2-2x+4y-14=0$
3.	$x^2+y^2-6x+8y-34=0$	4.	$x^2+y^2+6x-2y-35=0$
5.	$x^2+y^2+18x-6y-115=0$	6.	$x^2+y^2+10x-6y-59=0$
7.	$x^2+y^2+12x+4y-41=0$	8.	$x^2+y^2+2x+14y-75=0$
9.	$x^2+y^2-16x-4y-168=0$	10.	$x^2+y^2-6x-14y-158=0$
11.	$x^2+y^2-4x+6y-14=0$	12.	$x^2+y^2+2x+4y-21=0$

Завдання 3. Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

Вар.	Рівняння лінії	Вар.	Рівняння лінії
1	$\mathbf{25x^2+9y^2-225=0}$	7	$\mathbf{x^2+36y^2-36=0}$
2	$\mathbf{9x^2-25y^2-225=0}$	8	$\mathbf{4x^2+16y^2-64=0}$
3	$\mathbf{16x^2+9y^2-144=0}$	9	$\mathbf{16x^2-25y^2-400=0}$
4	$\mathbf{9x^2-4y^2-36=0}$	10	$\mathbf{25x^2+36y^2-900=0}$
5	$\mathbf{4y^2-9x^2-36=0}$	11	$\mathbf{x^2-9y^2-9=0}$
6	$\mathbf{4x^2+16y^2-64=0}$	12	$\mathbf{16x^2+9y^2-144=0}$

Завдання 3. За координатами точок A_1, A_2, A_3, A_4 із завдання 1, теми «Векторна алгебра» знайти: 1) рівняння площини $A_1A_2A_3$,
2) рівняння площини, що проходить через A_4 паралельно $A_1A_2A_3$,
3) довжину висоти A_4K.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.
Тема 4.Функції. Границя функції. Неперервність функції.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Дати означення функції однієї змінної.
2. Поняття границі функції в точці.
3. . Основні теореми про границі.
4. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними, їх порівняння та основні еквівалентності.
5. Перша та друга визначні границі
6. Неперервність функцій. Точки розриву. Властивості неперервних функцій.

2. Опитування.

3. Практичні завдання

Приклад розв'язування завдання.

Приклад 1. Знайти границі функції.

Розв'язання Використовуючи теореми про границі функції треба в функцію замість x підставити значення, до якого воно прямує:

a) $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 1) = \{1 + 3 - 1\} = 3.$

b) $\lim_{x\to \pi}(\cos x - \sin 2x) = \{-1 + 0\} = -1$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2 + 3x-4}{x+2} = \left\{\frac{1+3-4}{1+2}\right\} = \left\{\frac{0}{3}\right\} = 0$

Якщо отримаємо невизначеності, треба застосовувати спеціальні методи: $\{\frac{0}{0}\}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = |$виділяємо критичний множник $(x-1)|$

Для цього розкладаємо чисельник за коренями квадратного рівняння, а знаменник – за формулою скороченого множення:

$$x^2 + 3x - 4 = (x-1)*(x+4); x^2 - 1 = (x-1)*(x+1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)*(x+4)}{(x-1)*(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+4)}{(x+1)} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$e)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =|$тут виділити критичний множник заважає ірраціональність, тому множимо чисельник і знаменник на спряжений до чисельника вираз|:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{*\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\{\frac{\infty}{\infty}\}$

$$\text{f) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+\ 2x-5}{x^3+3x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

|перетворимо дріб, розділивши чисельник і знаменник на x^3| =

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3,$ бо вирази типу$\{\frac{c}{x^n}\}$ $\to 0$

<u>Висновок:</u>1) Для розкриття невизначеності $\{\frac{0}{0}\}$ треба виділити критичний множник в чисельнику та знаменнику та скоротити дріб на цей вираз.

Для розкриття невизначеності $\{\frac{\infty}{\infty}\}$ треба чисельник та знаменник дробу поділити на найвищій ступінь дробу, при цьому:

а) якщо старший ступінь чисельника дорівнює старшому ступеню знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших ступенях;

б) якщо старший ступінь чисельника більше старшого ступеню знаменника, то границя дорівнює нескінченності;

в) якщо старший ступінь чисельника менше старшого ступеню знаменника, то границя дорівнює нулю.

2) Для розкриття невизначеностей $\{\infty-\infty\},\{0*\infty\}$ треба за допомогою тотожних перетворень привести ці невизначеності до вигляду $\{\frac{0}{0}\}$або$\{\frac{\infty}{\infty}\}$та розкрити їх за допомогою вище розглянутих правил.

3) ***Перша визначна границя:***

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, розкриває невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$

4) ***Друга визначна границя:***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$або$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, розкриває невизначеність виду $\{1^\infty\}$

5) Якщо границя$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними і записують $\alpha(x)\sim\beta(x)$

Таблиця еквівалентних величин

$x\to 0$

$\sin\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$
$\tan\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$
$1-\cos\alpha(x)$	$\sim$	$\frac{(\alpha(x))^2}{2}$
$\arcsin\alpha(x)$	$\sim$	$\alpha(x)$

$arctan\ \alpha(x)$	~	$\alpha(x)$
$e^{\alpha(x)}-1$	~	$\alpha(x)$
$a^{\alpha(x)}-1$	~	$\alpha(x)$
$ln(1+\alpha(x))$	~	$\alpha(x)$

Приклад 2. Знайти границі функції:

а). $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 5x}{\tan 2x}$ в). $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^x$

Розв'язання . а). $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 5x}{\tan 2x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left|\begin{matrix} sin5x\sim 5x \\ tan2x\sim 2x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot 5x}{2x}=10$

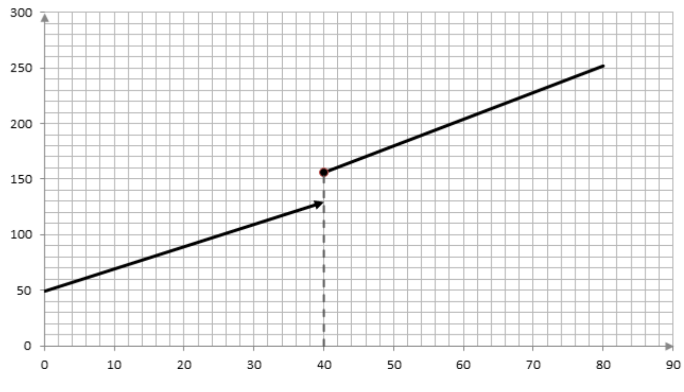
в). $\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right]^{\frac{x}{-x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x}{-x^2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{-x}\right)}=e^0=1$

Приклад 3. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару *(2x+50)* грн, якщо продано товару менше, ніж 40 од., та доплачує 20 % комісійних, якщо кількість проданого товару 40 од. і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платнею, отриманою продавцем, і побудувати графік функції.

Розв'язання. Залежно від інтервалу, в якому знаходиться кількість проданого товару, функція буде мати різний вигляд, а саме:

$$y=\begin{cases} 2x+50, & 0\le x<40 \\ 1{,}2\cdot(2x+50), & x\ge 40\end{cases}$$

Графіком функції на інтервалі $0\le x<40$ буде частина прямої y=2x+50, а на піввісі $x\ge 40$ – промінь $y=1{,}2\cdot(2x+50)$ (див. рис.)



У точці *x=40* функція *y* не є неперервною і має розрив.

$$\lim_{x\to 40-0}(2x+50)=130$$

$$\lim_{x\to 40+0}(1{,}2\cdot(2x+50))=156$$

Значення функції в точці x=40 – y(40)=156Функція має скінчений розрив першого роду і стрибок функції $\delta=|130-156|=26$

Нескінченні розриви функції називають *розривами другого роду*. Прикладом розривної функції другого роду є функція $y=\frac{1}{x}$, яка має розрив у точці x=0.

Точку x_0 називають точкою *усувного розриву* функції, якщо лівостороння границя співпадає з правосторонньою, але не дорівнює значенню функції.

Практичні завдання

Завдання 1. Визначити границю функції

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+2}{7x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2}{2x^2+3x+2}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x}{x^4+2x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$
5. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
6. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to\pi}(\sin 2x\cdot \mathrm{ctg}\, x)$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-7}\right)^{2x+1}$

Тема 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Дати означення похідної функції в точці.
2. Задачі, що приводять до поняття похідної.
3. Механічний та геометричний зміст похідної
4. Правила диференціювання
5. Диференціал функції
6. Диференціювання параметрично заданих та неявних функцій.
7. Логарифмічне диференціювання.
8. Зв’язок між диференційованістю та неперервністю функції.
9. Дослідження функцій за допомогою похідної.

2. Опитування.

3. Практичні завдання

Приклад розв’язування завдання.

Наведемо таблицю похідних основних елементарних функцій:

Функція $y=f(x)$	Похідна y'
1	**2**
$y=const$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=x^a$	$y'=a\cdot x^{a-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=a^x,\ a>0, a\neq1$	$y'=a^x\cdot\ln a$

1	2
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x, \ \ a > 0, a \neq 1$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Приклад 1. Знайти похідні першого порядку функції $y=f(x)$.

Розв'язання:Використовуючи формули похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні першого порядку.

a)Елементарна функція: $y=x^5$, $y'=5x^{5-1}=5x^4$

b)Сума функцій:

$(x^3-3x^2+x+5)'=(x^3)'-(3x^2)'+(x)'+(5)'=3x^2-6x+1+0=3x^2-6x+1.$

c) Добуток функцій:

$[(3x^2+5x)(4x^2-6)]'=(3x^2+5x)'(4x^2-6)+(3x^2+5x)(4x^2-6)'==(6x+5)(4x^2-6)+(3x^2+5x)8x=48x^3+60x^2-36x-30.$

d) Частка функцій:

$$\left(\frac{5x^2}{3x^2+4}\right)' = \frac{(5x^2)'(3x^2+4)-(5x^2)(3x^2+4)'}{(3x^2+4)^2} = \frac{10x(3x^2+4)-5x^2\cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{40x}{(3x^2+4)^2}.$$

e) Складена функція:

$[(x^2-5x+3)^3]'=3(x^2-5x+3)^2\cdot(x^2-5x+3)'=3(x^2-5x+3)^2\cdot(2x-5);$

f) Функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{array}\right\} \quad (0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну:1) при будь-якому значенні t; 2) при $t=\pi/4$.

$$1) y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt;$$

2)$(y'_x)_{t=\pi/4}$=-$ctg(\pi/4)$=-1.

g) Функція y від x задана неявно: $x^2+2xy-y^2=2x$

Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, не забуваючи, що y є функцією від x

$2x+2(y+xy')-2yy'=2$ або $x+y+xy'-yy'=1$

Звідси $y'(x-y)=1-x-y$, тобто, розв'язуючи рівняння відносно y', маємо:

$y'=\dfrac{1-x-y}{x-y}$.

h) Показниково-степенева функція $y=x^{cosx}$

Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо:

$lny=lnx^{cosx}$; $lny=cosxlnx$; $(lny)'=(cosxlnx)'$;

$\dfrac{y'}{y}$= $-sin\,x\,ln\,x+cos\,x\dfrac{1}{x}$; $y'=y(-sin\,x\,ln\,x+cos\,x\dfrac{1}{x})$,тобто

$y'=x^{cosx}(-sin\,x\,ln\,x+cos\,x\dfrac{1}{x})$.

Приклад 2. Знайдіть диференціал функції $y=x^2+2x$ в точці x=2 .

Розв'язання. *Перший спосіб.* Оскільки диференціал - це головна, лінійна відносно Δx ,частина приросту функції в точці x, знайдемо приріст даної функції в точці x=2 , тобто

$\Delta y=y(2+\Delta x)-y(2)=(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)-8=6\Delta x+(\Delta x)^2$.

Лінійною частиною приросту є вираз $6\Delta x$. Таким чином, $dy(2)=6\Delta x$.

Другий спосіб. Оскільки $dy=f'(x)dx$, то маємо

$y'=2x+2$, $y'(2)=6$, $dy(2)=6dx$

Приклад3. Знайти диференціал функції $y=f(x)$першого порядку

Розв'язання:

$y=tg^2x$,За формулою диференціала$dy=f'(x)dx$; $dy=2tgx\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$.

$y=\sqrt{1+\ln x}$, аналогічно $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\dfrac{1}{x}dx$.

Приклад 4. Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{x}$.

Розв'язання: Маємо невизначеність { $\dfrac{0}{0}$ }, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}-e^x}{1}=3-1=2$

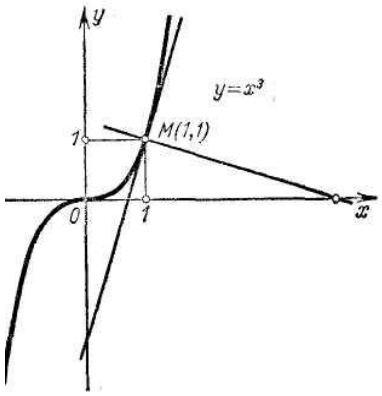
Приклад 5.Обчислити границі, використовуючи правило Лопіталя

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання:. Маємо невизначеність{ $\dfrac{\infty}{\infty}$ }, тому $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$.

Приклад 6. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3$у точці $M(1, 1)$.

Розв'язання:Так як $y'=3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює $(y')_{x=1}$ =3. Отже, рівняння дотичної: y—1=3 (x—1) або y=3x— 2.
Рівняння нормалі: y-1=- (x -1)/3, або y=-1/3x+4/3 (див. рис.)



Приклад 7. Знайдіть кут між дотичною, проведеною до кривої $y=x^3$- 2x^2- 5xу точці x = 2, і додатним напрямом осі Ox

Розв'язання:Знайдемо похідну $y'=3x^2$— $4x$ — 5. Тоді $y'(2)$=12-8-5= —1. Згідно з геометричним змістом похідної розв'язуємо рівняння tgα= — 1, звідки дістаємо α=135°— (зауважимо, що 0≤α<180°).

Приклад 8. Тіло масою 2 кг рухається прямолінійно за законом x(t)=t²+t+l. Координата вимірюється в метрах, час t- в секундах. Знайти:а) діючу силу;б) кінетичну енергію тіла через 2 с після початку руху.

Розв'язання: Швидкість руху матеріальної точки – перша похідна від закону руху $\upsilon(t) = x'(t) = \left(t^2 + t + 1\right)' = 2t + 1$; При t= 2с, $\upsilon = 2 \cdot 2 + 1 = 5\left(\frac{м}{c^2}\right)$

Прискорення – друга похідна від закону руху матеріальної точки або перша похідна від швидкості руху: $a = \upsilon'(t) = (2t+1)' = 2\left(\frac{м}{c^2}\right)$, тоді силу визначимо за формулою $F = ma = 2кг \cdot 2\frac{м}{c^2} = 4H$, а кінетична енергія

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{2кг \cdot \left(5\frac{м}{c'}\right)^2}{2} = 25Дж$$

Відповідь: F = 4 H; E = 25 Дж

Приклад 9.По прямій рухаються дві матеріальні точки за законами $x_1(t)=6t^2-3$; $x_2(t)=t^3$. У якому проміжку часу швидкість першої точки більша від швидкості другої точки?

Розв'язання:Враховуючи те, що швидкість є похідною від координати (шляху), маємо такі залежності: $\upsilon_1(t) = x_1'(t) = (6t^2 - 3)' = 12t$
$\upsilon_2(t) = x_2'(t) = (t^3)' = 3t^2$

За умовою $\upsilon_1 > \upsilon_2$, тобто $12t>3t^2$; $12t-3t^2>0$; $3t(t–4)<0$

Відповідь: у проміжку часу $t \in (0;4c)$ швидкість першої точки буде більша за швидкість другої точки.

Приклад 10. Дослідити функцію $y = \frac{x}{1+x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область існування функції — інтервал $-\infty<x<+\infty$. Відразу відзначимо, що при $x<0$ маємо $y<0$, а при $x>0$ маємо $y > 0$.

2) Функція усюди неперервна.

3) Досліджуємо функцію на максимум і мінімум: з рівності

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

знаходимо критичні точки:

$$x_1=-1\ ,x_2=1.$$

Досліджуємо характер критичних точок:

при $x<1$ маємо $y'>0;$

при $x>1$ маємо $y'<0.$

Отже, при $x=-1$ функція має мінімум:

$$y_{\min}=(y)_{x=-1}=-0{,}5.$$

Далі

при $x<-1$ маємо $y'<0;$

при $x>-1$ маємо $y'>0.$

Отже, при $x=1$ функція має максимум

$$y_{\max}=(y)_{x=1}=0{,}5.$$

4) Визначимо області зростання й спадання функції

при $-\infty<x<-1$ маємо $y'<0$ – функція убуває,

при $-1<x<1$ маємо $y'>0$ - функція зростає,

при $1<x<+\infty$ маємо $y'>0$ - функція убуває.

5) Визначимо області опуклості й вгнутості кривої і точки перегину: з рівності

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0$$

одержимо

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}.$$

Досліджуючи y'' як функцію від x, знаходимо:

при $-\infty<x<-\sqrt{3}$ $y''<0$ – крива опукла,

при $-\sqrt{3}<x<0$ $y''>0$ - крива вгнута,

при $0<x<\sqrt{3}$ $y''<0$ – крива опукла,

при $\sqrt{3}<x<+\infty$ $y''>0$ - крива вгнута.

Отже, точка з координатами $x=-\sqrt{3}$, $y=-\sqrt{3}/4$ є точка перегину; точно так само точки $(0, 0)$ і $(\sqrt{3}\ ,\sqrt{3}/4)$ є точки перегину.

6) Визначимо асимптоти кривої :

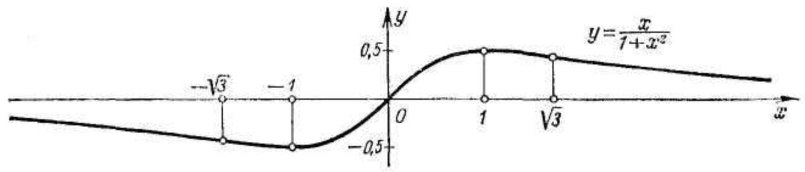
при $x\to+\infty$ $y\to0$,

при $x\to-\infty$ $y\to0$.

Отже, пряма $y=0$ є єдина похила асимптота.

Вертикальних асимптот крива не має, тому що ні для одного кінцевого значення x функція не прагне до нескінченності.

Графік досліджуваної кривої зображено на рисунку.



Практичні завдання

Завдання 1.Знайти похідну функції

1. $y = 6x^2 - 2x + 4$
2. $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x - 2$
3. $y = 4x^2 + \cos x;$
4. $y = \cos x^3 + \sin 4x;$
5. $y = 4e^x - tg3x;$
6. $y = \ln x - ctg4x^2;$
7. $y = 8e^{3x} + 2e^x;$
8. $y = (x-8)\sin x;$
9. $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 9};$
10. $y = x^3 \ln x$
11. $y = -\ln x \cdot \arccos 5x$
12. $y = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$
13. $y = \frac{\sin x}{tg4x};$
14. $y = \frac{2^x}{\sin x}$
15. $y = \ln x^3;$
16. $y = \sin x + 5e^x;$
17. $y = \ln\left(\frac{tgx}{1-2x}\right);$
18. $y = e^{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x} - 1\right)$

Завдання2 Знайдіть похідну функції $\frac{dy}{dx}$, заданої параметрично

Вар.	Функції	Вар.	Функції
1.	y= arccos t, x= arcsin t	2.	y= $1/\cos^2$ t, x=ln tg t
3.	y= $5\sin^3$ t ,x= $2\cos^3$ t	4.	y=$1/\sin^2$ t, x=ln ctg t
5.	y= $\ln\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$,x=arc tg t	6.	y=e^{-t^2} ,x= e^{-t}
7.	y= $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,x= $(\arcsin t)^2$	8.	y= e^t sin t, x= e^t cos t
9.	y=$\frac{1}{\sin^2 t}$, x=ln cos t	10.	y=$\frac{2t^2}{1+t^3}$, x=$\frac{3t}{1+t^3}$
11.	y= 4(1-cos 2t), x=4(2t-sin 2t)	12.	y=3(sin t-cos t), x=3(t sin t+cos t)

Завдання3. Знайдіть похідну функції $\frac{dy}{dx}$, заданої неявно

Вар.	Функції	Вар.	Функції
1.	$\sin(xy)= x^2+y^2$	2.	ycos x=sin(x-y)
3.	$3^x+3^y=3^{x+y}$	4.	$x^3+y^3-4axy=0$
5.	$\ln(x+y)+ x^2y=1$	6.	x sin y= x^2+y^2
7.	y^3-4y+1	8.	sin x- cos y=x-y
9.	cos (xy) + sin (xy)=y	10.	ctg 2y= ctg 2x
11.	$x^3y+y^3+xy^2=1$	12.	. $x^4+y^4=x^3y^3$
13	y=x-arcsin y	14	$x^3y+y^3x=x-y^2$

Завдання 3. Знайдіть похідну функції , користуючись правилом логарифмічного диференціювання

1. $y=x^{arcsinx}$
2. $y=(lgx)^{x/2}$
3. $y=(x^3+1)^{\sin x}$
4. $y=(\cos 2x)^{\ln tgx/2}$
5. $y=(\sin\sqrt{x})^{1/x}$
6. $y=(ctg\ 5x)^{5x-1}$
7. $y=(x^5+1)^{ctg\ x}$
8. $y=(x^8+1)^{tg\ x}$
9. $y=(2x-3)^{\cos x}$
10. $y=(\arcsin x)^{\sin x1}$
11. $y=x^{arctg\ x}$

$y=(\mathrm{tg}\ x)^{ctg\ x}$

Завдання 4. Розв'яжіть задачі на складання рівняння дотичної і нормалі кривої

1. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{1}{3}x^3 — \frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.
2. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y=(2/3)x+4$
3. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3+5x^2+5x+4$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = 4x - 2$.
4. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{2}{3}x^3+5x^2+9x+\frac{2}{3}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = x — 2$.
5. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{1}{3}x^3+7x^2+15x+\frac{1}{3}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.
6. Складіть рівняння дотичної і нормалі кривої $y=x^3+7x^2+11x+\frac{8}{27}$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y = 3x-4$.
7. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{5}{3}x^3+11x^2+13x+\frac{8}{75}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{5}$.
8. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{4}{3}x^3+5x^2+3x+\frac{4}{3}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю абсцис кут 135°.
9. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 5x^2+ x+3$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{2}$.
10. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{1}{3}x^3+7x^2+10x+130$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -3x + 2$.
11. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3+6x^2+\frac{2}{3}x+\frac{8}{27}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -3x +1$.

12.Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 + 6x^2 — x + \frac{1}{9}$ в точках, в яких дотичні мають кутовий коефіцієнт рівний —4.

Завдання 5. Знайдіть границі, використовуючи правило Лопіталя

1. а) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3^x}{x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^x$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} tg^x$

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x - \sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}$

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3+1)\cdot 4^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (ctg)^{\sin x}$

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3-x-2)\cdot 3^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

6. а) $\lim\limits_{x\to 0} [(1-\cos x)\cdot ctg\, x]$; б) $\lim\limits_{x\to 1} (1\frac{1}{\ln x} - x)$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

7. а) $\lim\limits_{x\to 0} [\ln x \ln(x-1)]$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^2$

8. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^2$

9. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot 2^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x\cos}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\lg x}$

10. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{ctg^2 x}$

11. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4} \cdot 5^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{x^{-2}}$

12. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4} \cdot 6^{\frac{1}{x^4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^x$

Завдання 6. Провести повне дослідження функції $y=f(x)$ та побудувати її графік.

1. $y = x^2 + \frac{2}{x}$
2. $y = \frac{1}{x^2+3}$
3. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$
4. $.y = \frac{1}{1+x^2}$
5. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$
6. $y = \frac{x^2-5}{x-3}$
7. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$
8. $\frac{4x-12}{(x-2)^2}$
9. $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$
10. $y = \frac{x}{x^2-4}$
11. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$
12. $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$

Тема 6. Інтегральне числення

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Означення невизначеного інтеграла та його геометричний зміст.
2. Таблиця основних інтегралів.
3. Основні методи інтегрування.
4. Задачі, що приводять до визначеного інтегралу; властивості визначених інтегралів.
5. Формула Ньютона-Лейбниця.
6. Формула інтегрування за частинами у визначеному інтегралі.
7. Заміна змінної у визначеному інтегралі.
8. Геометричні і механічні застосування визначених інтегралів.
9. Означення невласного інтегралу.
10. Невласні інтеграли I роду.
11. Невласні інтеграли II роду.

2. Опитування.

3. Практичні завдання

Приклади розв’язування завдання.

Наведемо таблицю інтегралів основних елементарних функцій:

$\int dx = x + C$;	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$;	
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$;	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \ a \neq 1$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;
$\int e^x dx = e^x + c$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;
$\int \sin x dx = -\cos x + c$;	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$;
$\int \cos x dx = \sin x + c$;	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c$;
$\int tgx dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$;	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$;
$\int ctg dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm k}\right\rvert + c$.

Невизначений інтеграл.

Приклад 1. Знайти інтеграл **безпосереднім інтегруванням**.

Розв’язання:Використовуючи формули інтегралів та їх властивості обчислимо:

a) $\int(8x^7-3x^2+3x+10)dx=\frac{8x^8}{8}-\frac{3x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+10x+c$

b) $\int\frac{x^2+1}{x^2+4}dx=\int\frac{x^2+1+3-3}{x^2+4}dx=\int\frac{(x^2+4)-3}{x^2+4}dx=\int dx-3\int\frac{dx}{x^2+4}=x-\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}+C$.

Відповідь. $x-\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}+C$

c) $\int\frac{\sqrt[3]{x}-x^2+x^3e^x}{x^3}dx=$| Подамо даний інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів|$=\int\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{x^3e^x}{x^3}\right)dx=\int\left(x^{-\frac{8}{3}}-\frac{1}{x}+e^x\right)dx=\int x^{-\frac{8}{3}}dx-\int\frac{dx}{x}+\int e^xdx=$

$\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}}-\ln|x|+e^x+C=-\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\ln|x|+e^x+C$

Відповідь. $-\frac{3}{5x\sqrt[3]{x^2}}-\ln|x|+e^x+C$

d) $\int\frac{dx}{(5x-1)^4}=$|підведемо функцію під знак диференціалаd(5x-1)=5dx | =

$=\frac{1}{5}\int u^{-4}du=\frac{1}{5}\cdot\frac{u^{-3}}{-3}+C=-\frac{1}{15(5x-1)^3}+C$

Відповідь. $-\frac{1}{15(5x-1)^3}+C$

Приклад2. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, що знаходиться у знаменнику підінтегрального виразу: $x^2+6x+10=x^2+6x+9+1=(x+3)^2+1$. Враховуючи, що $d(x+3)=(x+3)'dx=dx$, знаходимо інтеграл: $\int\frac{dx}{x^2+6x+10}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1}=$ $arctg(x+3)+C$

Приклад3. Знайти невизначений інтегралза допомогою **методу інтегрування частинами.**

Розв'язання:а) $\int(2x+3)\sin 3xdx$. Покладаємо $u = 2x+3, dv = \sin 3xdx$, тоді $du = 2dx$, $v = \int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Згідно з формулою інтегрування частинами маємо: $\int(2x+3)\sin 3xdx$ = $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x$ + $\frac{2}{3}\int \cos 3xdx$ = $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3xdx + C$ ·

Відповідь. $-\frac{1}{3}(2x+3)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3xdx + C$

Приклад4. Знайти інтеграл $\int x\ln^2 xdx$.

Розв'язання. Покладаємо $u = \ln^2 x$, $dv = xdx$, тоді $du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx$, $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ Застосувавши формулу інтегрування частинами, отримуємо: $\int x\ln^2 xdx$ = $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x^2 \ln x \cdot \frac{1}{x}dx$ = $\frac{x^2}{2}\ln^2 x$ - $\int x\ln xdx$. Інтеграл $\int x\ln xdx$ також знаходимо методом інтегрування частинами. Покладаємо $u = \ln x, dv = xdx$, тоді $du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}$, $\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x$ - $\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x$ - $\frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$+C.

Остаточно маємо: $\int x\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$+C

Відповідь. $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$+C

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл **методом заміни змінної.**

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$. Проведемо заміну змінної $x = t^2$, тоді $dx = 2tdt$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = 2\int \frac{tdt}{t+1} = 2\int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{d(t+1)}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C =$$
$$= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C \cdot$$

Відповідь. $2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + C$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \sqrt{\cos 5x+1} \cdot \sin 5xdx$

Розв'язання. Проведемо заміну змінної $t = \cos 5x + 1$, тоді $dt = -5\sin 5xdx$, а $\sin 5xdx = -\frac{1}{5}dt$.

$$\int \sqrt{\cos 5x+1} \cdot \sin 5x dx = \int t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{5}\right) dt = -\frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{5}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{15} t\sqrt{t} + C =$$

$$= -\frac{2}{15}(\cos 5x+1)\sqrt{\cos 5x+1} + C$$

Запропоновані перетворення рівносильні введенню під знак диференціала функції $\cos 5x+1$.

Відповідь. $-\frac{2}{15}(\cos 5x+1)\sqrt{\cos 5x+1} + C$

Практичні завдання

Завдання 1. Знайти інтеграл безпосереднім інтегруванням.

1. $\int (3x+5)^7 dx$	2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)^5}}$	3. $\int \sqrt[3]{2x-1} dx$
4. $\int \frac{dx}{4+3x}$	5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+5x)^2}}$	6. $\int e^{-x^2} x dx$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$	8. $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$	9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$
10. $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$	11. $\int \cos(2x+1) dx$	12. $\int tg(2-3x) dx$

Завдання2. Знайти невизначений інтегралза допомогою методу інтегрування частинами.

1. $\int x \ln(1+x^2) dx$	2. $\int (x^2-2x+2)e^{-x} dx$	3. $\int (2x+3)2^x dx$
4. $\int (x^2+32)\sin 3x dx$	5. $\int (x+1)\cos 5x dx$	6. $\int (3x+5)e^{4x} dx$
7. $\int (x^2-2x+2)e^{-x} dx$	8. $\int arctgx dx$	9. $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, dx$
10. $\int (x^2+1)\ln x dx$	11. $\int x^2 e^{5x} dx$	12. $\int x^2 \sin 2x \, dx$

Завдання 3. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int \cos\sqrt{x} \, dx$	2. $\int \sin\sqrt[3]{x} \, dx$	3. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

4. $\int \frac{\cos\left(3\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}dx$	5. $\int \sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x^3}-3\right)dx$	6. $\int \frac{xdx}{\cos^2\left(3x^2+\frac{1}{2}\right)}$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	8. $\int \frac{e^{\sqrt{\sin x}}}{\sqrt{\sin x}}\cos xdx$	9. $\int x^3\sin^2 x^4\cos x^4 dx$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}\arcsin\frac{x}{5}}$	11. $\int \frac{dx}{\left(1+4x^2\right)arctg^2 x}$	12. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}dx$

Визначені інтеграли

Формула **Ньютона-Лейбниця:** $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$

Приклад 1. Знайти інтеграл **безпосереднім інтегруванням**.

Розв'язання: $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$

Відповідь. $\frac{1}{2}\ln 2$

Приклад 2. Обчислити інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами. $\int\limits_0^1 xe^x dx$

Розв'язання. $\int\limits_0^1 xe^x dx = \left|\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x dx \\ du = dx \\ v = e^x \end{array}\right| = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1$

Відповідь. 1

Приклад 3. Обчислити інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами. $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$

Розв'язання:

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx = \left|\begin{array}{l} u = \ln x, dv = \frac{dx}{x^5} \\ du = \frac{dx}{x}, v = -\frac{dx}{4x^4} \end{array}\right| = -\frac{\ln x}{4x^4}\Big|_1^2 + \frac{1}{4}\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4}\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$$

Відповідь. $-\frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}$

Приклад4. Обчислити визначений інтеграл за допомогою методу заміни. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = 2\sin t$. Границі інтегрування знаходимо із співвідношень $2\sin t = 0, t_1 = 0$ і $2\sin t = 1, t_2 = \frac{\pi}{6}$. Функції $x = 2\sin t$ та її похідна $x' = 2\cos t$ неперервні на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, що підтверджує законність даної підстановки. Отже маємо

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} 2\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2t)dt = 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Відповідь. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Практичні завдання

Завдання1.Знайти визначений інтеграл за допомогою методу інтегрування частинами.

1. $\int_0^1 x \arcsin 2x\, dx$	2. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} arctg\, 3x\, dx$	3. $\int_0^{0,5} \arcsin x\, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x\, dx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos\frac{x}{2} dx$	6. $\int_1^2 (3x+2)\ln(x+3)dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin 4x\, dx$	8. $\int_{-1}^1 \arccos\frac{x}{2} dx$	9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\sin 3x\, dx$
10. $\int_1^{e^4} \sqrt{x} \ln\frac{x}{16} dx$	11. $\int_1^e \sin(\ln x)\, dx$	12. $\int_0^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

Завдання2.Знайти визначений інтеграл методом заміни змінної.

1. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$	2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$	3. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$

4. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$	5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x+1}}$	6. $\int\limits_{0}^{3} x\sqrt{1+x}dx$
7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$	8. $\int\limits_{0}^{64} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x}dx$	9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$
10. $\int\limits_{4\sqrt{2}}^{8} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$	11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$	12. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2}dx$

Невласні інтеграли.

Приклад 1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$

Розв'язання: В цьому прикладі обидві границі інтегрування нескінченні, тому розбиваємо заданий інтеграл на два:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2+2}.$$

Далі, за означенням, маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2+2} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(x+3)^2+2} +$$

$$+\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{(x+3)^2+2} = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0}^{b} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{3}{\sqrt{2}} - \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{a+3}{\sqrt{2}} +$$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{b+3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{3}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ має нескінченний розрив в точці $x=1$, але її первісна $F(x)=3\sqrt[3]{x-1}$ неперервна на $[1,2]$. Тому тут можна застосувати формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3\sqrt[3]{x-1} = 3\cdot$$

Зауваження. Є також можливим дослідження невласних інтегралів на збіжність без безпосереднього їх обчислення.

Застосування визначених інтегралів.

1. **Обчислення площ фігур.**

Приклад3. Знайти площу фігури, обмежену параболою, яка задана рівнянням $x = y^2$ і прямою лінією, рівняння якої має вигляд $x+y=2$.

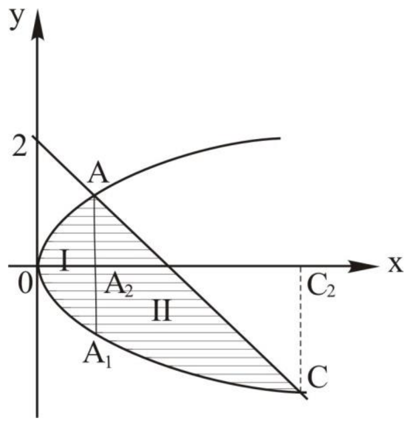


Рисунок до прикладу 3

Розв'язання 1. Побудуємо схематичний рисунок заданої фігури. Будуємо пряму та параболу (див. рис.).

З рисунка визначаємо, що фігура знизу обмежена дугою параболи OC і відрізком прямої AC. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі OY і розіб'ємо фігуру на дві частини. Тоді $S = S_I + S_{II}$. Проекція фігури I на вісь OX – це відрізок OA_2, проекція фігури II – відрізок A_2C_2.

Абсциса точки O $x = 0$. Для знаходження абсциси точки A_2 або точки A необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо два значення для x: $x_1 = 1$ і $x_2 = 4$. Це пов'язано з тим, що пряма і парабола мають дві точки перетину A і C. Таким чином, отримані одночасно абсциси точок A_2 і C_2. Звідси маємо, що інтервали інтегрування для обчислення площ S_I - це $[0,1]$ і S_{II} - це $[1,4]$.

Фігура I знизу обмежена напівпараболою $y = -\sqrt{x}$, зверху – напівпараболою $y = \sqrt{x}$. Отже,

$$S_I = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx \cdot$$

Фігура II знизу обмежена напівпараболою $y = -\sqrt{x}$, зверху прямою $y=2-x$

Тому

$$S_{II} = \int_1^4 (2 - x - (-\sqrt{x}))dx = \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx; S = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})dx$$

Після обчислення отриманих інтегралів, знаходимо, що $S = \frac{9}{2}$(кв.од.)

Приклад4. Обчислити довжину дуги параболи $y^2 = (x-p)^3$, що вирізана параболою $y^2 = \frac{1}{2}p^2x$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (див. рис.) З рисунка видно, що в задачі потрібно знайти довжину дуги BAB', що складається з двох симетричних частин. Тому достатньо обчислити довжину дуги *AB* і подвоїти результат. Для знаходження меж інтегрування достатньо знайти абсцису точки *B*, оскільки абсциса точки *A* уже відома і рівна *p*. Розв'яжемо систему рівнянь двох парабол:

$$\begin{cases} y^2 = (x-p)^3 \\ y^2 = \frac{1}{2}p^2 x \end{cases} \Rightarrow (x-p)^3 = \frac{1}{2}p^2 x.$$

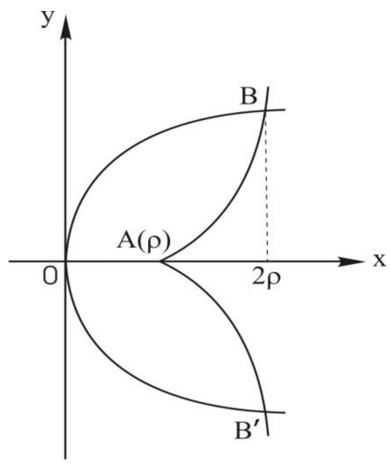


Рисунок до прикладу 4

Отримали кубічне рівняння, розв'язок якого знаходимо підбором: $x = 2p$.

Так як функцію можна записати рівнянням $y = f(x)$, то для розв'язання задачі використовується формула (10), де $a = p$,

$b = 2p$, $f(x) = \sqrt{(x-p)^3}$, $f'(x) = \frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}}$.

$$L = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+(\frac{3}{2}(x-p)^{\frac{1}{2}})^2}dx = 2\int_p^{2p} \sqrt{1+\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}p}dx =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-\frac{9}{4}p+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_p^{2p} = \frac{16}{27}(\sqrt{(1+\frac{9}{4}p)^3}-1).$$

Зауваження. 1. Якщо при обчисленні довжин дуг, межі інтегрування відомі, будувати рисунок не обов'язково.

. Застосування інтегралів при розв'язанні задач механіки

Приклад5. Обчислити силу, з якою вода тисне на пластину; переріз пластини являє собою рівнобедрений трикутник, висота якого рівна *h*, а основа – *a*, причому основа трикутника співпадає з поверхнею води.

Розв'язання. Будуємо систему координат так, щоб вісь *OX*

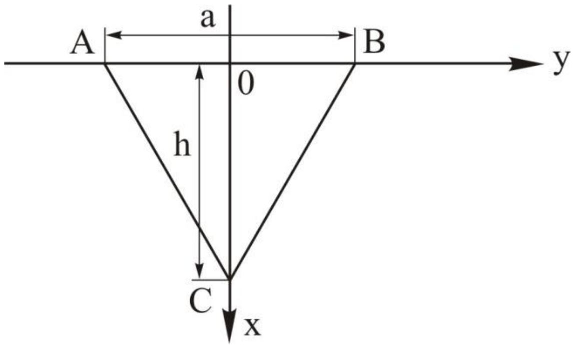


Рисунок до прикладу 5

збігалася з висотою трикутника, а вісь *OY* – з основою (див. рис.). Так як Δ ABC симетричний відносно осі *OX*, то достатньо знайти силу тиску води на ΔCDB і результат подвоїти. Щоб використати формулу (19) потрібно знайти рівняння бокових сторін трикутника. Точка B має координати $B(0,\frac{a}{2})$, точка $C(h,0)$. Рівняння прямої

BC: $\frac{x}{h}+\frac{y}{a/2}=1$ або $y=\frac{a(h-x)}{2h}$.

За формулою (19) $F=2\int_0^h \rho g x \frac{a(h-x)}{2h}dx=\frac{\rho g a}{2h}\cdot 2\int_0^h x(h-x)dx=$

$$=\frac{\rho g a}{h}\left(\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\rho g a}{h}\left(\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\rho g a h^2}{6} \text{ (н).}$$

Практичні завдання

Завдання1.Знайти площу фігури, обмеженою лініями:

1. $y=x^{2/3},\ y=0,\ x=1,\ x=8$	2. $y=1/x,\ y=0,\ x=1,\ x=2$	3. $y=x^4,\ y=0,\ x=1$
4. $y=1/x^2,\ y=0,\ x=1,\ x=1/2$	5. $y=x^2/4,\ y=0,\ x=0,\ x=2$	6. $y=x^2-4,\ y=0$
7. $y=9-x^2,\ y=0$	8. $y=\sqrt{x}+1,\ y=0,\ x=0,\ x=4$	9. $y=x^{3/4},\ y=0,\ x=1$
10. $y=4-\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ x=4$	11. $y=x^3,\ y=0,\ x=-1,\ x=1$	12. $y=25-x^2,\ y=0$

Тема 7.Функції декількох змінних

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Означення функцій двох змінних.
2. Що називається областю визначення функції двох змінних?
3. Означення частинних похідних функцій двох змінних.
4. Сформулюйте теорему про мішані частинні похідні двох змінних 2-го порядку.
5. Сформулюйте необхідні і достатні умови екстремуму функції двох змінних.

2. Опитування.

3. Практичні завдання.

Приклади розв'язування завдання.

Приклад 1.Знайти область визначення функції від двох змінних

z$=3x+5xy+y^2$.

Розв'язання Функція представляє многочлен двох змінних. Тоді область визначення цієї функції - всі пари дійсних чисел (x;y).

D(z)={∀x,y∈R²}

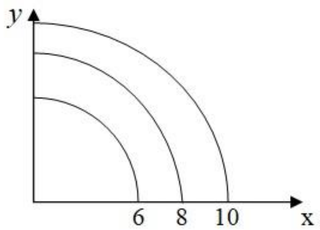
Приклад2.Знайти область визначення функції$z=\sqrt{100-x^2-y^2}$

Розв'язання. Область визначення функції $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$ визначається з нерівності $100-x^2-y^2\geq 0$, тобто $x^2+y^2\leq 10^2$. Це круг з центром у початку координат і радіусом $r=10$.

Функція від двох змінних (аргументів) $f(x,y)$ представляє собою деяку поверхню в тривимірному просторі. Зокрема, графіком функції $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$ є верхня половина сфери.

Приклад2.Побудувати лінії рівня (ізолінії)функції$z=\sqrt{100-x^2-y^2}$

Розв'язання.Побудуємо лінії однакового рівня функції $z=\sqrt{100-x^2-y^2}$. При $C=0$ маємо $0=\sqrt{100-x^2-y^2}$, тобто $x^2+y^2=10^2$ (коло з радіусом $r=10$, див.рис.). При $C=6$ отримуємо $6=\sqrt{100-x^2-y^2}$ тобто $x^2+y^2=8^2$. Отже лінією рівня, яка відповідає константі $C=6$, є коло з радіусом $r=8$.При $C=8$ отримуємо ізолінію (неявну функцію y від x)$x^2+y^2=6^2$.



Приклад3.Знайти частинні похідні функції $z=4x^2+2xy+3y^2$

Розв'язання.Для знаходження частинних похідних функції $z=4x^2+2xy+3y^2$ вважаємо в першому випадку x –змінною величиною, а y – сталою, а в другому випадку – навпаки. Тоді похідні мають вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=8x+2y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x+6y$$

Приклад4.Знайти частинні похідні функції $z=x^2 siny;z=4x^2+2xy+3y^2$

Розв'язання: Аналогічно попередньому: **.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,siny;\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2cosy.$

Приклад5.Знайти екстремум функції $z=x^3-3xy+y^3$

Розв'язання Для заданої функції знайдемо критичні точки із системи: $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$. Розв'язуємо систему $\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0\end{cases}$, звідки знаходимо

дві критичні (стаціонарні) точки: $M_0=(0,0)$ та $M_1(1,1)$. Обчислюємо другі частинні похідні:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x; \qquad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3; \qquad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

У точці $M_0=(0,0)$ маємо: $A=0$, $B=-3$, $C=0$, отже, $AC-B^2=-9<0$, тобто екстремуму немає.

У точці $M_1(1,1)$ маємо: A=6, B=-3, C=6, отже, AC-B^2=27>0,A=6>0.
Функція $z = x^3 - 3xy + y^3$має мінімум у точці (1;1) .
Відповідь: min (1;1)= 1-3+1=-1

Приклад 6.Знайти похідну функції в точці A(1;2;-1) за напрямом від точки A до точки B(2;4;-3). З'ясувати характер зміни поля в даному напрямі.

Розв'язання.Знаходимо вектор $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$і його напрямні косинуси:

$$\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}, \cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\lambda = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних в точці A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = \left.(2x - 2z)\right|_A = 4; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = \left.2y\right|_A; \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = \left.-2x\right|_A = -2; \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A = 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot(-\frac{2}{3}) = \frac{16}{3}.$$

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то задана функція в даному напрямі зростає.

Приклад7.У результаті дослідження взаємозв'язку одержано слідуючи пари значень: Методом найменших квадратів знайти лінійну функцію, яка найкращим чином наближає емпіричні дані:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,3	6,3	4,8	3,8	3,3

Розв'язання

Коефіцієнти a, bоптимальної функціїy=ax+b знайдемо, як розв'язок системи

$$\begin{cases} a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + bn = \sum y_i \end{cases}$$

З метою швидкого обчислення складемо таблицю:

x_i	1	2	3	4	5	$\sum x_i =$	15
y_i	5,3	6,3	4,8	3,8	3,3	$\sum y_i =$	23,5
x_i^2	1	4	9	16	25	$\sum x_i^2 =$	55
$x_i y_i$	5,3	12,6	14,4	15,2	16,5	$\sum x_i y_i =$	64

Таким чином одержуємо слідуючу систему лінійних рівнянь:

$\begin{cases} 55a + 15b = 64 \\ 15a + 5b = 23{,}5 \end{cases}$. Цю систему розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 55\cdot 5 - 15\cdot 15 = 275 - 225 = 50 \neq 0$$

, значить система має єдиний розв'язок.

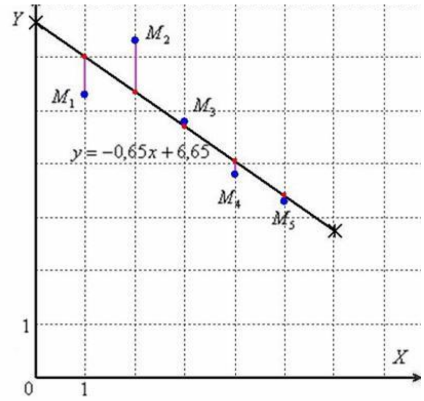
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 64 & 15 \\ 23{,}5 & 5 \end{vmatrix} = 64 \cdot 5 - 23{,}5 \cdot 15 = 320 - 352{,}5 = -32{,}5$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-32{,}5}{50} = -0{,}65$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 55 & 64 \\ 15 & 23{,}5 \end{vmatrix} = 55 \cdot 23{,}5 - 15 \cdot 64 = 1292{,}5 - 960 = 332{,}5$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{332{,}5}{50} = 6{,}65$$

Таким чином шукана апроксимуюча функція має вид $y=-0{,}65x+6{,}65$і вона найкращим чином наближає експериментальні дані до теоретичних. Для побудови функції знайдемо два її значення: y(0)=6,65, y(6)=2,75 та виконаємо рисунок:



Побудована пряма називається лінією тренда.

Практичні завдання

Завдання1.Знайти частинні похідні першого порядку від заданих функцій двох змінних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

1) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$.

2) $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.

3) $z = x^2 \cdot \ln(x+y)$.

4) $z = (x+2y)^2$.

5) $z = e^{x+y^2}$.

6) $z = \sin(xy^2)$.

7) $z = 3xy^3 + \sqrt{xy}$.

8) $z = \sqrt{\dfrac{2x^3}{y}}$.

9) $z = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$.

10) $z = (\sqrt{x} - 2y)^2$.

Завдання 2. Скласти лінійну залежність по методу найменших квадратів основі експериментальних даних:

1)

x	0,5	1	2	2,5
y	1	1,5	2,5	3

2)

x	1	2	3	4
y	2	2,25	2,5	2,7

3)

x	1	1,5	2	3
y	5	4,5	4	3

4)

x	0	2	4	6
y	1,5	2,6	4	5,5

5)

x	0,5	1	2	3
y	2,5	3,5	5	6,5

6)

x	0,5	1	2	4
y	3,5	3	2,5	1,5

7)

x	3	4	5	6
y	2,2	2,5	2,8	3

8)

x	2	3	4	5
y	2,7	3,5	4	4,5

9)

x	3	4	5	6
y	2	1,5	0,5	-1

10)

x	1	2	3	4
y	-1	-0,1	0,8	1,5

ЧАСТИНА 3.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ , ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ І АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

Тема 1. Визначники. Елементи теорії матриць.

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Матриця – це:

A) множина чисел, яка після певних обчислень дорівнює одному числу;

B) прямокутний масив чисел, який завжди містить n рядків та n стовпців;

C) прямокутний масив чисел, який містить n рядків та m стовпців;

D) фільм

Визначник – це:

A) прямокутний масив чисел, який містить n рядків та n стовпців;

B) число, що ставиться у відповідність масиву чисел, який містить n рядків та n стовпців;

C) число, що ставиться у відповідність масиву чисел, який містить n рядків та m стовпців;

D)знак.

Визначник $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{vmatrix}$ **обчислюється за формулою:**

A) $a_{11}.a_{12} - a_{21}.a_{22}$

B) $a_{11}.a_{21} - a_{12}.a_{22}$

C) $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

D) $a_{11}.a_{22} + a_{12}.a_{21}$

При заміні усіх рядків матриці стовпцями з відповідними номерами визначник матриці:

A) змінює знак;

B) не змінює свого числового значення;

C) подвоюється.

D)зменшується у два рази.

Одинична матриця – це матриця:

A) довільного розміру з елементами, що дорівнюють одиниці;

B) квадратна з елементами, що дорівнюють одиниці;

C) квадратна з одиницями на головній діагоналі та нульовими , які залишилися.

D)матриця, що складається з однієї одиниці.

При множенні матриці на число:

A) усі елементи множаться на це число;

B) усі елементи першого рядка матриці множаться на це число;

C) визначник цієї матриці множиться на дане число;

D) усі елементи першого стовпчика матриці множаться на це число.

Обчислити визначник третього порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

A).10

B). –13

C). 4

D). -7

Знайти різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

A). . $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 & 5 \\ 6 & 6 & 9 & 3 \\ 15 & 1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

B). $\begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

C). $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

D). $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & \mathbf{7} & -\mathbf{3} \\ 2 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є сумісною, якщо вона:

A) має лише єдиний розв’язок;

B) має два розв’язки;

C) не має розв’язок;

D) має безліч розв’язків.

Визначити сумісна чи ні система лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$

A). Так як $r(\widetilde{A}) = r(A) = n = 3$, то система сумісна і має єдиний розв'язок

B). Так як $r(\widetilde{A}) = r(A) = 2 < n = 3$, то система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків

C). Так як $r(\widetilde{A}) = r(A) = 3 < n = 4$, то система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків

D). Так як $r(\widetilde{A}) = 3 \neq r(A) = 2$, то система несумісна, тобто не має розв'язків

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти суму і різницю матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 8 & 2 \\ 9 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2.Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 5 & 6 & \mathbf{7} & -\mathbf{3} \\ 2 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ на число $\alpha = 3$.

3. Якщо $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ і $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, знайти матриці A і B.

4.Знайти добуток матриць:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5.Визначити сумісні чи ні системи лінійних рівнянь, розрахувавши ранги основної і розширеної матриць:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$

6.Розв'язати системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці, методом Гауса і за формулами Крамера:

а $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases}$

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.

2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В.В.Листопад, О.А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.

3. Дубовик В.П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.

4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 2. Векторна алгебра

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони знаходяться

A). на одній і лише на одній прямій;
B). лише на паралельних прямих;
C). на перпендикулярних прямих;
D).або на одній прямій, або на паралельних.

Вектори називаються компланарними, якщо вони знаходяться

A) в одній і лише в одній площині;
B). лише в перпендикулярних площинах;
C). лише в паралельних площинах;
D). або в одній площині, або в паралельних площинах.

Дано довжини взаємно-перпендикулярних векторів, що виходять із спільного початку: $|\vec{a}| = 4$**,** $|\vec{b}| = 3$ **і** $|\vec{c}| = \sqrt{11}$**. Знайти** $|\vec{b} - \vec{c}|$

A). $2\sqrt{5}$;
B). 5;
C). 3;
D). 2.

Скалярним добутком векторів a і bназивається (ab – кут між векторами a і b)

A). число, яке позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(ab)$;

B). вектор, ортогональний векторам a і b з довжиною $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(ab)$;

C). число$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(ab)$;

D). Вектор$\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(ab)$.

Мішаним добутком трьох векторів a, b і c називається

A). вектор, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий результат помножений скалярно на $\vec{c}$;

B). скаляр, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий вектор помножений векторно на $\vec{c}$;

C). скаляр, що отриманий при множенні $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а отриманий вектор помножений скалярно на $\vec{c}$

D). не має значення, як ми множимо вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Дано довжини взаємно-перпендикулярних векторів, що виходять із спільного початку: $|\vec{a}|=4$**,** $|\vec{b}|=3$ **і** $|\vec{c}|=\sqrt{11}$**. Знайти** $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ **.**

A). 2;
B). 4;
C). 7;
D). 6

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти координати точки A, що лежить на осі ординат і є рівновіддаленою від точок $A_1(-1;2)$ і $A_2(2;-3)$.

2. В трикутнику ABC сторони співпадають з векторами $\overrightarrow{AB}=(1;2;1)$ і $\overrightarrow{AC}=(-1;2;3)$, а координати вершини $A(2;1;1)$. Знайти:

а) проекції на координатні осі вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$;

б) координати векторів $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, які співпадають з медіанами трикутника ABC;

3. За координатами вершин засобами векторної алгебри знайти:
довжину сторони A_1A_2 ,2) косинус кута між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 3) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$, де $A_1(4;0;0)$, $A_2(-2;1;2)$, $A_3(1;3;2)$, $A_4(3;2;1)$

4. Дано точки $A(4;-1;2)$ і $B(3;2;-2)$. Знайти координати точок M_1 і M_2, які ділять відрізок AB відповідно у співвідношеннях $\frac{|\overrightarrow{AM_1}|}{|\overrightarrow{M_1B}|}=3$ і $\frac{|\overrightarrow{AM_2}|}{|\overrightarrow{M_2B}|}=-\frac{3}{2}$.

5. . Задано вектори $\bar{a}=(2;\,3;\,0)$, $\bar{b}=(1;\,-2;\,2)$, $\bar{c}=(3;\,2;\,1)$.Знайти:

а) скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $(\bar{a},\bar{b})$; б) косинус кута між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$; в) векторний добуток $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}\times\bar{b}$; г) мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$;д) чи колінеарні вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

6. Знайти об'єм паралелепіпеда V_1 та об'єм трикутної піраміди, побудованих на векторах $\bar{a}=(4;3;1)$, $\bar{b}=(1;-2;1)$, $\bar{c}=(2;2;2)$.

7. Чи компланарні вектори $\bar{a}=(3;1;-1)$, $\bar{\bar{b}}=(1;0;-1)$, $\bar{c}=(8;3;-2)$?

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.
2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М.А. Мартиненко, О.П. Зінькевич, В.В.Листопад, О.А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.
3. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.
4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 3. Елементи аналітичної геометрії на площині і в просторі.

Форми контролю: розв'язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

Загальне рівняння прямої L на площині має вигляд

A) Ax +By +C= 0 , де n= Ai+ Bj – вектор, ортогональний прямій L ;

B) Ax+By+C= 0 , де n=Ai +Bj – напрямний вектор прямої L ;

C) y=Ax+B, де n=Ai+Bj – напрямний вектор прямої L.

Точка А належить прямій 5x+y-13 = 0; її абсциса дорівнює 2. Ордината точки А дорівнює:

A). 11/5

B). –3

C). –11/5

D). 3

При якому значення параметра а точка A(a;-1) належить на прямій 3x-2y +10 = 0:
A). 4
B). –4
C). –8/3
D). 8/3

Коло задано рівнянням $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 5$. Центр і радіус кола:
A). O(-3;5), R = √5
B). O(3;-5), R = 5
C). O(3;-5), R = √5
D). O(3;-5), R = 25
Скільки не може бути точок перетину кола і параболи:
A). 0
B). 1
C). 2
D). 5

Знайти координати проекцій точок $B_1(1;-2;3)$, $B_3(4;0;2)$ **і** $B_2(-1;5;6)$ **на площину** Oxy
A). $B_1'(1;0;3)$, $B_2'(-1;0;6)$, $B_3'(4;0;2)$
B). $B_1'(1;-2;0)$, $B_2'(-1;5;0)$, $B_3'(4;0;0)$;
C). $B_1'(0;-2;3)$, $B_2'(0;5;6)$, $B_3'(0;0;2)$
D). $B_1'(1;0;0)$, $B_2'(-1;0;0)$, $B_3'(0;0;2)$

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти кут між прямими $l_1: 3x+y-7=0$; $l_2: x-y+4=0$
2. Напишіть рівняння прямих, які проходять через точку М, одна з яких паралельна, а друга – перпендикулярна даній прямій : $M(6;4), l: 2x-5y+11=0$
3. На площині задано трикутникABC своїми вершинами. Скласти рівняннясусіх його сторін, медіан та висот.
1) A (2; -1), B (0; 3), C (-4; 1).
2) A (-1; -3), B (-1; 0), C (4; 2).
4. Знайти відстань $\rho(A;l)$ від точки $A(6;0)$ до прямої $l: 4x-3y+31=0$.
5. Знайти точку перетину N прямих $l_1: 9x-5y+17=0$; $l_2: 4x+y+14=0$.
6. Визначити вид трикутника ABC (за сторонами і кутами), якщо відомі його вершини $A(4;6), B(1;2), C(-1;3)$.
7. Скласти рівняння кола з центром в точці $(-3;2)$ і радіусом $R=5$.
8. Знайти центри і радіуси заданих кіл: а) $x^2+y^2+6x-14y+49=0$;
б) $9x^2+9y^2-6x+12y-31=0$.

9. Коло з центром в початку координат проходить через точку перетину прямих $5x-4y+5=0$ і $2x+y-11=0$. Написати рівняння цього кола.

10. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого $(\pm 3;5)$, а більша вісь дорівнює 10.

11. Обчислити координати фокусів і ексцентриситет гіперболи $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{17}=1$.

12. Знайти вершину і вісь параболи $x=y^2-6y+10$.

13. Визначити взаємне розташування еліпса $x^2+4y^2=16$ і кола $x^2+y^2=4$.

14. Приведіть рівняння кривої другого порядку до канонічного виду і побудуйте її . Вкажіть координати вершин, фокусів. Обчисліть ексцентриситет кривої.

а) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$; б) $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$.

15.Знайтирівнянняплощини P_1, що проходить через точку $D(1;0;-3)$ паралельно площині $P: x-3y+2z+4=0$.

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.
2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М.А. Мартиненко, О.П. Зінькевич, В.В.Листопад, О.А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.
3. Дубовик В.П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.
4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ.

Тема 4Функції. Границя функції. Неперервність функції.

Форми контролю: розв’язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Функція f (x) – обмежена, якщо:
A) її область визначення обмежена множина;
B) множина її значень обмежена множина;
C) область визначення та множина значень функції – обмежені множини;
D) її аналітичний вираз обмежений.

Якщо $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$, то точка a є:
A) точкою усувного розриву;
B) точкою розриву першого роду;
C) точкою розриву другого роду;
D) точкою неперервності функції.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1+x}{7x+5x^2}$

A). $\dfrac{2}{5}$;
B). 2;
C). 7;
D). 5.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{x^3+2x+4}$

A). 1;
B). 0;
C). 2;
D). 4.

Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5\sqrt{x^3-1}}{\sqrt{x^3+x+1}}$

A). 1;
B). 5;
C). 1/5;
D). ∞ .

Добуток нескінченно малої функції на обмежену є
А) нескінченно малою;
В) обмеженою;
С) сталою;
D) нескінченно великою.

З того, що $\lim_{x\to a} f(x) = A$ слідує:
A) f(x)–A– є нескінченно малою;
B)f (x)–A– є оберненою до нескінченно малої;
C)f (x)–A– є такою, що спадає;
D)f (x)–A– не існує.

3. Задачі для самостійного розв'язування.
1.Знайти слідуючи границі:

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-95}{0,5x^3-49x^2}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{5x\,tg\,x}{\sin^2 2x}$; в) $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$;г) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{\sqrt{8+x}-3}$; д $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{2x+1}$

2. Дано функцію $f(x)=x^2+6x-4$. Перевірити, що $f(1)=3$, $f(3)=23$.
3. $f(x)=x^2+1$. Обчислити значення:
а) $f(4)$. б) $f(\sqrt{2})$. в) $f(a+1)$. г) $f(a)+1$. д) $f(a^2)$. ж) $f(2a)$.
4. $\varphi(x)=(x-1)(3x+5)^{-1}$. Написати вираз: $\varphi(1/x)$ і $1/\varphi(x)$.
5. $\varphi(x)=\sqrt{x^2+4}$. Написати вирази: $\varphi(2x)$ і $\varphi(0)$.
6. $f(\alpha)=\mathrm{tg}\alpha$. Перевірити рівність $f(2\alpha)=2f(\alpha)/\{1-[f(\alpha)]^2$.
7. $f(x)=lgx$; $\varphi(x)=x^3$. Написати вираз: а) $f[\varphi(2)]$. б) $f[\varphi(a)]$. в) $\varphi[f(a)]$.
8. Знайти природну область визначення функції $y=2x^2+1$.
Побудувати графіки функцій:
9. $y=-3x+5$. 10. $y=0,5x^2+1$. 11. $y=3-2x^2$. 12. $y=x^2+2x-1$.
13. $y=1/(x-1)$. 14. $y=\sin 2x$. 15. $y=\cos 3x$. 16. $y=x^2-4x+6$

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О. М. Мулява, В. П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.
2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В. В.Листопад, О. А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.
3. Дубовик В. П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.
4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 5.Диференціальне числення функції однієї змінної.

Форми контролю: розв’язування задач.
Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Похідна функції y =f(x) в точці x_0 :
A) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$;
B) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
C).$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
D)$\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

Якщо функції u (x) і v (x) диференційовні, то (uv)′ обчислюються за формулами:
A) (uv)′= uv′-(uv)′;
B) (uv)′= u′v+uv′;
C).(uv)′ = uv′ ·u′v;
D) (uv)′=u′v′.

Якщо функцію задано параметричними рівняннями y = y (t), x = x(t), то похідна $\frac{dy}{dx}$ обчислюється за формулою:
A) $\frac{dy}{dt}$;
B) $\frac{y'(t)}{x'(t)}$;
C).$\frac{dx}{dt}$;
D)$\frac{x'(t)}{y'(t)}$.

Знайти рівняння дотичної, проведеної до гіперболи $y=\frac{2}{x}$ **в точці** $M(1;2)$.
A). y=-2x+4 ;
B). y=2x+4 ;
C). y=2x-4 ;
D). y=-2x-4.

Знайти похідну функції $y=\sin(2x)\cdot tg(4x)$ **в точці** $x_0=\frac{\pi}{4}$
A). π;
B). 4 ;
C). 2 ;
D). 0.

Якщо точка x = a така, що f′(a) = 0 , тоді ця точка буде точкою мінімуму, якщо:

A).$f''(a) = 0$;

B). $f''(a) > 0$;

C). $f''(a) < 0$;

D).$f''(a) \neq 0$;.

Достатня умова зростання функції f(x) на (a; b,) :

A).$f''(a) = 0$;

B). $f'(a) > 0$;

C). $f'(a) < 0$;

D).$f'(a) = 0$;.

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти границі, використовуючи правило Лопіталя: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-4x}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5}{2x^2+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\,x-\sec x)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,x}$

2. Знайти похідні від неявних функцій: а) $xy=\sin y$; б) $y=x+arctg\,y$; в) $\ln x=\sin y$

3. Знайти похідні від параметрично заданих функцій: а) $\begin{cases} x=1-t \\ y=t-t^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=tg\,t \end{cases}$.

4. Знайти дотичну проведену до кривої $y=2x^5-5x^2$ в точці , абсциса якої дорівнює -1.

5. Точка рухається прямолінійно за законом $s=3t^4-4t^3$. Обчислити швидкість і прискорення точки через 2 секунди після початку руху.

6. Для функції $y=\frac{x}{x^2-4}$ знайти всі асимптоти.

7. Для функції $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ знайти похилі асимптоти.

8. Для функції $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ визначити зростає чи спадає задана функція в точках *x = -5, x = 2, x = 7.*

9. Знайти екстремуми функції $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$.

10. Дослідити функцію $y=x^3+3x^2$ на опуклість, угнутість і перегин.

11.Знайти диференціал функції: $f(x)=\sin(\ln(2x^3))$.

12. Знайти диференціал функції $f(x)=4^{\sin 2x}$.

13. Знайти похідну функції: а) $y=\ln x^3$; b) $y=\sin x+5e^x$; c) $y=\ln\left(\frac{tgx}{1-2x}\right)$;

d) $y=e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x}-1)$; e) $y=x^3\ln x$; f) $y=-\ln x\cdot\arccos 5x$

14.Дослідити функцію і побудувати її графік: а) $y=\frac{x^2}{2+x}$; b) $y=x^3+4x$;

c) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$; d) $y=\frac{2x^3}{x^2-1}$.

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.

2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В. В.Листопад, О. А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.

3. Дубовик В. П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.

4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 6.Інтегральне числення

Форми контролю: розв’язування задач.

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Функція F(x) називається первісною функції f(x) у проміжку (a;b) , якщо

A).$f'(x) = F(x), (a < x < b)$;

B). $F'(x) = f(x) + c,\ (a < x < b)$

C). $f'(x) = F(x) + c,\ (a < x < b)$

D).$F'(x) = f(x),\ (a < x < b)$

Метод інтегрування частинами

A).$\int udv = uv + \int vdu$

B).$\int udv = u'v + uv'$

C).$\int udv = uv - \int vdu$

D).$\int udv = uv \cdot \int vdu$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі $\int \boldsymbol{f(x)dx},\ (\boldsymbol{a} < x < b)$при x =φ(t), (α<t <β , φ (α) = a, φ(β)= b здійснюється за формулою

A).$\int f(\varphi(t))dt$;

B).$\int f(\varphi(t))t'dt$;

C). $\int f(\varphi(t)) f'(t)dt$;

D). $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$.

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює

A). $\int_b^a f(x)dx$

B). $-\int_b^{-a} f(x)dx$

C). $-\int_b^a f(x)dx$

D). $-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

Серед поданих інтегралів вибрати невласний першого роду (функція f(x) – неперервна на інтервалі інтегрування):

A). $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

B). $\int_b^b f(x)dx$

C). $\int_0^b f(x)dx$

D). $\int_a^0 f(x)dx$

Формула Ньютона-Лейбница для функції f(x) з первісною F(x) :

A). $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$;

B). $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$;

C). $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$;

D). $\int_a^b f(x)dx = F(b) \cdot F(a)$.

Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x}{x^2+2}dx$

A). $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$

B). $\frac{1}{4} tg^2 2x + C$

C). $-\frac{2}{3}\sqrt{3-x^3} + C$

D). $\frac{1}{2}\ln(2+x^2) + C$

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1.Представити неправильний дріб $\frac{x^3+3x-5}{(x-1)(x+2)}$ у вигляді суми многочлена та елементарних раціональних дробів.

2.. Обчислити невизначений інтеграл:a) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-3x^2}}$; b); $\int ctg\, 2x dx$;

c) $\int \sin^2 x \cos x dx$; d) $\int \sin^5 x\, dx$;e) $\int \frac{x^2}{x^4-16}dx$; f) $\int \sin(7x+3)dx$; h) $\int xe^{x^2+1}dx$.

3.Обчислити визначений інтеграл:a) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$;b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x\, dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

4. Обчислити невласний інтеграл: a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^4}$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

a) $y = x^2$, $y = -2x+3$, $y = 0$; b) $y = x^2+1$, $y = 1-x$, $x = 2$;

6. Знайти об'єм та поверхню тіла, утвореного обертанням кривої $y = 2x$, обмеженої лініями $x = 0$ і $x = 3$.

7.Обчислити довжину дуги кривої$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, абсциси кінців якої $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{8}$.

8. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$м/с. Знайти шлях, пройдений точкою за перші три секунди від початку руху.

9. Обчислити роботу, яку необхідно затратити, щоб розтягнути пружину на 10см , якщо відомо, що для подовження її на 1 см необхідно прикласти силу у 1кН.

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О.М.Мулява, В.П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.

2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В. В.Листопад, О. А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.

3. Дубовик В. П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.

4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Тема 7.Функції декількох змінних

Форми контролю: розв'язування задач

Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв’яжіть тестові завдання.

Оберіть справедливі твердження:

.A). існування частинних похідних є достатньою умовою диференційовності функції;

B). існування частинних похідних є необхідною умовою диференційовності функції;

C). неперервність частинних похідних є достатньою умовою диференційовності функції;

D). існування частинних похідних є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції.

Якщо кожній точці M певної області D у площині (просторі) ставиться у відповідність за відомим законом деяке число U , то область D є:

A) областю визначення функції U = f(M);

B) областю значень функції U = f(M);

C). областю відображення функції U = f(M);

D). областю підмножини.

Лінією рівня функції z= f(x;y) називається

A) множина всіх точок M(x;y) координатної площини xOy , які задовольняють нерівність $f(x;y) > 0$;

B) множина всіх точок M(x;y) координатної площини xOy, які задовольняють нерівність $f(x;y) < 0$;

C). множина всіх точок M(x;y) координатної площини xOy , які задовольняють рівняння $f(x;y) = \text{c}$

D).множина всіх точок M(x;y) координатної площини xOy , які задовольняють рівняння $f(x;\text{c}) = 0$

Чому дорівнює частина похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$функції $z = arctg\frac{y}{x}$ в точціM(1;1):

A).-0,5;

B). 1;

C). -1 ;

D). 2.

Чому дорівнює частина похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$функції $z = arctg\frac{y}{x}$ в точціM(2;1):

A).-0,8;

B). 0,2;

C). -0,4 ;

D). -0,(6).

Чому дорівнює частина похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$функції $z = arcsin\frac{y^2}{x^2}$ в точціM(1;2):

A). $-\frac{1}{\sqrt{15}}$;

B). $-\frac{2}{\sqrt{15}}$;

C). $\frac{3}{\sqrt{15}}$;

D).$\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Чому дорівнює частина похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$функції $z = arcsin\frac{y^2}{x^2}$ в точціМ(1;2):

A). $-\frac{1}{\sqrt{15}}$;

B). $-\frac{2}{\sqrt{15}}$;

C). $\frac{3}{\sqrt{15}}$;

D).$\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Чому дорівнює частина похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$функції $z = arcsin\frac{y^2}{x^2}$ в точціМ(1;2):

A). $-\frac{1}{\sqrt{15}}$;

B). $-\frac{2}{\sqrt{15}}$;

C). $\frac{3}{\sqrt{15}}$;

D).$\frac{2}{\sqrt{15}}$.

3. Задачі для самостійного розв’язування.

1.Знайти область визначення функції: a) $z = \sqrt{9 - y^2 - x^2}$b) $z = \arcsin(x - y)$

2.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ від заданої функції двох змінних:

a) $z = \ln(4 - x^2 + y^2)$; b) $z = \ln x + \ln\cos y$; c) $z = \ln^2(3x^2 - y^3)$

3. Дослідити на екстремум функцію: a)$z = x^3+8y^3-6xy+5$; b) $z = 2xy-2x^2-4y^2$;

4. Перевірити, чи задовольняє даному рівнянню задана функція:

a)$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2z,$де $z = (x^2 + y^2) \cdot tg\frac{x}{y}$

b) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}$, де $u = \sqrt{2xy + y^2}$

5.Методом найменших квадратів знайти лінійну функцію, яка найкращим чином наближає емпіричні дані:

x	2	3	4	5
y	2,7	3,5	4	4,5

Рекомендована література:

1. Вища математика . [Електронний ресурс] : навчальний підручник для студентів освітнього ступеня "бакалавр" технологічних спец. з.ф.н./ О. М. Мулява, В. П. Шоха – К. : НУХТ, 2017.Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.28 – 26.05.2017.

2. Вища математика для технічних спеціальностей [Електронний ресурс] : навчальний підручник / М. А. Мартиненко, О. П. Зінькевич, В. В.Листопад, О. А. Ніколаєва – К. : НУХТ, 2017. Реєстраційний номер електронного підручника у НМУ 52.20 – 25.06.2017.

3. Дубовик В. П. Вища математика: навч.посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вузів./В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К., Вища школа , 1993. – 648с.

4. Фортуна В. В. Вища та прикладна математика / В. В. Фортуна, О. І. Бескровний. – Л.: Магнолія 2006, 2013. – 647 с.

Навчальне видання

Копайгора Ольга Костянтинівна,

Ляшенко Ольга Сергіївна

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ
ВИЩА МАТЕМАТИКА

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет
економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського
50042, Дніпропетровська обл.,
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.
Свідоцтво суб’єкта видавничої
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.