

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Донецький національний університет економіки і  
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Л. О. Цвіркун, О. В. Омельченко

## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**Методичні рекомендації для вивчення дисципліни**

Ступінь: бакалавр

**Кривий Ріг  
2019**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Донецький національний університет економіки і  
торгівлі імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

Л. О. Цвіркун, О. В. Омельченко

## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**Методичні рекомендації для вивчення дисципліни**

Ступінь: бакалавр

Затверджено на засіданні  
кафедри загальноінженерних дисциплін  
та обладнання  
Протокол №1  
від «28» серпня 2019 р.

Схвалено навчально-методичною  
радою  
ДонНУЕТ  
Протокол №1  
від «29» серпня 2019 р

**Кривий Ріг  
2019**

УДК 531/534.01(076)

Ц 28

**Цвіркун Л.О., Омельченко О.В.**

**Ц 28** Теоретична механіка [Текст] : метод. рук. до вивч. дисц. / Л.О. Цвіркун, О.В. Омельченко; Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. загальноінженерних дисциплін та обладнання. – Кривий Ріг : ДонНУЕТ, 2019. – 100 с.

Методичні рекомендації призначені для студентів всіх форм навчання і покликані допомогти студентам організувати вивчення дисципліни «Теоретична механіка» завдяки інформації щодо змісту модулів та тем дисципліни, планів практичних занять, завдань для самостійного вивчення та розподілу балів за видами робіт, що виконуються студентами протягом вивчення дисципліни. Методичні рекомендації містять перелік питань для підготовки до підсумкового контролю та перелік основної та додаткової літератури.

**УДК 531/534.01(076)**

©, Цвіркун Л.О., Омельченко О.В. 2019

© Донецький національний університет економіки і торгівлі імені Михайла Туган-Барановського, 2019

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	5
<b>ЧАСТИНА 1. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»</b> .....	6
<b>ЧАСТИНА 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ</b> .....	15
Змістовий модуль 1. Статика твердого тіла .....	16
Змістовий модуль 2. Кінематика точки і твердого тіла. Динаміка точки і системи.....	49
<b>ЧАСТИНА 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ</b> .....	70
Змістовий модуль 1. Статика твердого тіла .....	71
Змістовий модуль 2. Кінематика точки і твердого тіла. Динаміка точки і системи.....	88

## ВСТУП

Основною метою вивчення дисципліни є формування системи знань основних положень і принципів механіки, практичних навичок у процесі розв'язування задач теоретичної механіки й побудови розрахункових схем.

Головне завдання навчальної дисципліни полягає в ознайомленні студентів з методами вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об'єктів, які моделюються у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; навчити студентів застосовувати знання основних понять та законів механік; довести майбутнім спеціалістам галузі важливість способів визначення кінематичних та динамічних характеристик механічних систем, твердих тіл та окремих точок тощо.

Предмет: вивчення основних положень і принципів теоретичної механіки.

**ЧАСТИНА 1.**  
**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ВИВЧЕННЯ**  
**ДИСЦИПЛІНИ**

## 1. Опис дисципліни

Найменування показників	Характеристика дисципліни
Обов'язкова (для студентів спеціальності "назва спеціальності") / вибіркова дисципліна	<b>Обов'язкова для студентів спеціальності 142 «Енергетичне машинобудування»</b>
Семестр (осінній / весняний)	<b>осінній</b>
Кількість кредитів	<b>5</b>
Загальна кількість годин	<b>150</b>
Кількість модулів	<b>1</b>
Лекції, годин	<b>39</b>
Практичні / семінарські, годин	<b>26</b>
Лабораторні, годин	<b>-</b>
Самостійна робота, годин	<b>85</b>
Тижневих годин для денної форми навчання:	
аудиторних	<b>5</b>
самостійної роботи студента	<b>6,5</b>
Вид контролю	<b>екзамен</b>

## 2. Програма дисципліни

**Ціль** – формування системи знань основних положень і принципів механіки, практичних навичок у процесі розв'язування задач теоретичної механіки й побудови розрахункових схем.

**Завдання:** ознайомити студентів з методами вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об'єктів, які моделюються у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; навчити студентів застосовувати знання основних понять та законів механік; довести майбутнім спеціалістам галузі важливість способів визначення кінематичних та динамічних характеристик механічних систем, твердих тіл та окремих точок тощо.

**Предмет:** вивчення основних положень і принципів теоретичної механіки.

### **Зміст дисципліни розкривається в темах:**

1. Сили та операції з силами.
2. Основні поняття і аксіоми статички.
3. Теорія пар сил.
4. Умови рівноваги систем сил.
5. Рівновага системи тіл.
6. Тертя.
7. Центр ваги.
8. Кінематика точки.
9. Поступальний і обертальний рух твердого тіла.
10. Плоскопаралельний рух твердого тіла.

11. Динаміка матеріальної точки.
12. Механічна система і сили, що діють на її складові.
13. Принцип Даламбера.

### 3. Структура дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин (денна форма навчання)				
	усього	у тому числі			
		лекц.	пр./сем.	лаб.	СРС
1	2	3	4	5	6
<b>Змістовий модуль 1. Статика твердого тіла</b>					
Тема 1. Сили та операції з силами	10	2	2	-	6
Тема 2. Основні поняття і аксіоми статички	11	2	2	-	7
Тема 3. Теорія пар сил	10	2	2	-	6
Тема 4. Умови рівноваги систем сил	12	4	2		6
Тема 5. Рівновага системи тіл	10	2	2	-	6
Тема 6. Тертя	12	4	2	-	6
Тема 7. Центр ваги	14	4	2	-	8
<b>Разом за змістовим модулем 1</b>	<b>79</b>	<b>20</b>	<b>14</b>	<b>-</b>	<b>45</b>
<b>Змістовий модуль 2. Кінематика точки і твердого тіла. Динаміка точки і системи</b>					
Тема 8. Кінематика точки	10	2	2	-	6
Тема 9. Поступальний і обертальний рух твердого тіла	12	4	2	-	6
Тема 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла	14	4	2	-	8
Тема 11. Динаміка матеріальної точки	10	2	2	-	6
Тема 12. Механічна система і сили, що діють на її складові	14	4	2	-	8
Тема 13. Принцип Даламбера	11	3	2		6
<b>Разом за змістовим модулем 2</b>	<b>71</b>	<b>19</b>	<b>12</b>	<b>-</b>	<b>40</b>
<b>Усього годин</b>	<b>150</b>	<b>39</b>	<b>26</b>	<b>-</b>	<b>85</b>



#### 4. Теми семінарських/практичних/лабораторних занять

№ з/п	Тема практичного заняття	Кількість годин
1	Практичне заняття 1. Застосування аксіом статички. Проектування сил в площині.	2
2	Практичне заняття 2. Визначення сил реакції опор балки.	2
3	Практичне заняття 3. Визначення реакції опор плоскої рами.	2
4	Практичне заняття 4. Визначення рівноваги складеної конструкції.	2
5	Практичне заняття 5. Задачі на рівновагу просторової системи довільно розташованих сил.	2
6	Практичне заняття 6. Рівновага тіла при наявності тертя.	2
7	Практичне заняття 7. Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу.	2
8	Практичне заняття 8. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху	2
9	Практичне заняття 9. Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі.	2
10	Практичне заняття 10. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки	2
11	Практичне заняття 11. Застосування теореми про рух центра мас механічної системи.	2
12	Практичне заняття 12. Застосування теореми про зміну кількості руху точки.	2
13	Практичне заняття 13. Дослідження теореми про зміну кінетичної енергії точки і механічної системи.	2
<b>Всього</b>		<b>26</b>

#### 5. Індивідуальні завдання

Не заплановані навчальним планом.

#### 6. Обсяги, зміст та засоби діагностики самостійної роботи

Вид та тема семінарських занять	Кількість годин самостійної роботи	Зміст самостійної роботи	Засоби діагностики
<b>Змістовий модуль 1. Статика твердого тіла</b>			
1. Застосування аксіом статички. Проектування сил в площині	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (система збіжних сил, довільна плоска система сил, довільна просторова система сил, принцип приєднання та виключення еквівалентної нулю системи сил, правило паралелограма, геометричне додавання та розкладання сил, додавання двох сил, додавання системи сил), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2, 3]. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему: “Застосування аксіом статички. Проектування сил в площині”.	Опитування, перевірка задач

2. Визначення сил реакції опор балки	7	<p>1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (в'язі та їх реакції, поняття реакції в'язі, активні сили, види в'язей та їх реакції, момент сили, момент сили відносно центра, властивості моменту сили, теорема про момент рівнодіючої системи збіжних сил (теорема Варіньона), момент сили відносно осі), необхідного для розв'язування задач.</p> <p>2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2, 3, 4, 5].</p> <p>3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему "Визначення сил реакції опор балки".</p>	Опитування, перевірка задач
3. Визначення реакції опор плоскої рами	6	<p>1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (пара сил та момент пари, теорема про моменти сил пари, теорема про еквівалентність пар, що лежать в одній площині, теорема про еквівалентність пар у просторі, додавання пар сил, умови рівноваги пар в площині та в просторі), необхідного для розв'язування задач.</p> <p>2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [4, 5].</p> <p>3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему "Визначення реакції опор плоскої рами".</p>	Опитування, перевірка задач
4. Визначення рівноваги складеної конструкції	6	<p>1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (окремі випадки рівноваги системи сил, умови рівноваги просторової системи паралельних сил, умови рівноваги просторової системи збіжних сил, умови рівноваги довільної плоскої системи сил, умови рівноваги плоскої системи збіжних сил, умови рівноваги плоскої системи паралельних сил), необхідного для розв'язування задач.</p> <p>2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [4, 5, 6].</p> <p>3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему "Визначення рівноваги складеної конструкції".</p>	Опитування, перевірка задач
5. Задачі на рівновагу просторової системи довільно розташованих сил	6	<p>1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (рівновага системи тіл, нерухома опора - жорстке кріплення, системи статично визначені та невизначені, рівновага складеної конструкції (системи тіл), необхідного для розв'язування задач</p> <p>2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2, 3].</p> <p>3. Підготовка до практичного завдання на тему "Задачі на рівновагу просторової системи</p>	Опитування, перевірка задач

		довільно розташованих сил”.	
6. Рівновага тіла при наявності тертя	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (закони тертя ковзання Кулона, реакція шорсткої в'язі, кут та конус тертя, тертя кочення), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [2, 3, 6]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему “Рівновага тіла при наявності тертя”.	Опитування, перевірка задач
7. Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу	8	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (центр паралельних сил, центр ваги твердого тіла, координати центрів ваги однорідних тіл, способи визначення координат центрів ваги тіл, центри ваги простіших фігур), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2]. 3. Підготовка до виконання практичного завдання на тему “Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу”.	Опитування, перевірка задач
<b>Разом змістовий модуль 1</b>	<b>45</b>		
<b>Змістовий модуль 2. Кінематика точки і твердого тіла. Динаміка точки і системи</b>			
8. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (координатний спосіб завдання руху точки, векторний спосіб завдання руху точки, природний спосіб завдання руху, швидкість точки, вектор швидкості точки, швидкість точки при координатному способі завдання руху, швидкість точки при природному способі завдання руху), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2, 3, 4, 5]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему “Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху”.	Опитування, перевірка задач
9. Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (поступальний рух твердого тіла, обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, закон обертального руху, кутова швидкість та кутове прискорення, рівномірне і рівнозмінне обертання, швидкості і прискорення точок тіла, що обертається), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [3, 4, 5]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему	Опитування, перевірка задач

		“Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі”.	
10. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки	8	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (визначення плоскопаралельного руху, розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний, рівняння плоского руху тіла та його точок, визначення траєкторій точок при плоскопаралельному русі, визначення швидкостей точок при плоскопаралельному русі, теорема про проекції швидкостей точок тіла, визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центру швидкостей), необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [5, 6]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему “Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки”.	Опитування, перевірка задач
11. Застосування теореми про рух центра мас механічної системи	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (аксіоми механіки Ньютона, диференціальні рівняння руху точки, диференціальні рівняння руху точки в векторній формі, диференціальні рівняння руху точки у натуральній формі), необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 3, 6]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему “Застосування теореми про рух центра мас механічної системи”.	Опитування, перевірка задач
12. Застосування теореми про зміну кількості руху точки	8	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (визначення механічної системи, сили, що діють на механічну систему, маса системи та центр мас системи, момент інерції твердого тіла відносно осі, теорема про моменти інерції відносно паралельних осей, обчислення моментів інерції твердих тіл, центробіжні моменти інерції), необхідного для розв’язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [3, 4, 5]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему “Застосування теореми про зміну кількості руху точки”.	Опитування, перевірка задач
13. Дослідження теореми про зміну кінетичної енергії точки і механічної системи	6	1. Опрацювання конспекту лекцій та дотичного до нього матеріалу (принцип Даламбера для матеріальної точки, дотична та нормальна сили інерції, принцип Даламбера для механічної системи, зведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого виду,	Опитування, перевірка задач

		поступальний рух, плоский рух, обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла), необхідного для розв'язування задач. 2. Опрацювання рекомендованої літератури. Джерела [1, 2, 5, 6]. 3. Підготовка до практичного завдання на тему "Дослідження теореми про зміну кінетичної енергії точки і механічної системи".	
<b>Разом змістовий модуль 2</b>	<b>40</b>		
<b>Разом</b>	<b>85</b>		

### 7. Матриця зв'язку між дисципліною/ змістовим модулем, результатами навчання та компетентностями

Результати навчання	Компетентності							
	Інтегральна	Загальні		Спеціальні				
	ІК-1	ЗК 4	ЗК 8	ФК 1	ФК 2	ФК 4	ФК 6	ФК 7
1. Знання і розуміння інженерних наук на рівні, необхідному для досягнення інших результатів освітньої програми, в тому числі певна обізнаність в останніх досягненнях.	+	+	+					
2. Розуміння широкого міждисциплінарного контексту спеціальності 142 «Енергетичне машинобудування».		+	+	+				
3. Розуміння застосовуваних методик проектування і досліджень у сфері енергетичного машинобудування, а також їх обмежень.				+				
4. Застосовувати практичні навички вирішення завдань, що передбачають реалізацію інженерних проектів і проведення досліджень	+				+	+		
5. Застосовувати норми інженерної практики у сфері енергетичного машинобудування						+	+	+

### 8. Методи викладання

Лекції, практичні заняття, самостійна робота (розв'язування задач).

### 9. Методи оцінювання

Екзамен.

## 10. Розподіл балів, які отримують студенти

Відповідно до системи оцінювання знань студентів ДонНУЕТ, рівень сформованості компетентностей студента оцінюються у випадку проведення екзамену: впродовж семестру (50 балів) та при проведенні підсумкового контролю - екзамену (50 балів).

### Оцінювання студентів протягом семестру

№ теми практичного заняття	Вид роботи/бали					
	Тестові завдання	Ситуаційні завдання, задачі	Обговорення теоретичних та практичних питань теми	Індивіду- альне завдання	ПМК	Сума балів
<b>Змістовий модуль 1</b>						
Тема 1			1	1		2
Тема 2			1	2		3
Тема 3			2	1		3
Тема 4			2	1		3
Тема 5			1	2		3
Тема 6			2	1		3
Тема 7			1	2	5	8
Разом змістовий модуль 1			10	10	5	<b>25</b>
<b>Змістовий модуль 2</b>						
Тема 1			2	2		4
Тема 2			1	1		2
Тема 3			2	2		4
Тема 4			1	2		3
Тема 5			2	1		3
Тема 6			2	2	5	9
Разом змістовий модуль 2			10	10	5	<b>25</b>
Разом						<b>50</b>

### Загальне оцінювання результатів вивчення дисципліни

Для виставлення підсумкової оцінки визначається сума балів, отриманих за результатами екзамену та за результатами складання змістових модулів. Оцінювання здійснюється за допомогою шкали оцінювання загальних результатів вивчення дисципліни (модулю).

<b>Оцінка</b>		
<b>100-бальна шкала</b>	<b>Шкала ECTS</b>	<b>Національна шкала</b>
90-100	A	5, «відмінно»
80-89	B	4, «добре»
75-79	C	
70-74	D	3, «задовільно»
60-69	E	
35-59	FX	2, «незадовільно»
0-34	F	

## **11. Методичне забезпечення**

Електронний конспект лекцій, методичні вказівки з вивчення дисципліни, навчальна та наукова література.

## **12. Рекомендована література**

### **Основна**

1. Черниш О. М., В. Яременко М.Г. Теоретична механіка. – К.: Центр навчальної літератури, 2018. – 760 с.
2. Гайдайчук В.В., Гонтарь М.Г. Теоретична механіка. Загальні принципи механіки. – К.: КНУБА, 2018. – 260 с.
3. Дмитриченко М.Ф., Гончар М.О. Теоретична механіка. – К.: НТУ, 2018. – 364 с.
3. Булгаков В.М. Теоретична механіка. – К.: Центр навчальної літератури, 2017. – 640 с.
4. Кузьо І.В., Шпачук В. П., Цідило І. В. Теоретична механіка. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
5. Зінько Я. А., Кузьо І. В. Збірник задач з теоретичної механіки. Частина І: Статика. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2015. – 88 с.
6. Векерик В., Кузьо І., Левчук К. Теоретична механіка. Статика: підручник. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2014. – 325 с.

### **Допоміжна**

1. Березін Л.М., Кошель С.О. Теоретична механіка. К.: Центр навчальної літератури, 2018. – 218 с.
2. Бережницький, Б. С. Теоретична механіка : метод. вказівки / Б. С. Бережницький. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 31 с.
3. Апостолюк О.С., Воробйов М.В. Теоретична механіка: Збірник задач. – К.: Техніка, 2011. – 400 с.

**ЧАСТИНА 2.  
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ПІДГОТОВКИ  
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**



# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

## Тема 1. Застосування аксіом статички. Проектування сил в площині.

*1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Що таке матеріальна точка?
2. Що таке абсолютно тверде тіло?
3. Які величини називаються векторними і скалярними?
4. Що таке сила і яка її розмірність?
5. Що називається реакціями зв'язків?
6. Що таке статично еквівалентна система сил?
7. Сформулюйте основні аксіоми статички?
8. Наведіть визначення поняття «сила».
9. Якими приладами вимірюють чисельне значення сили?
10. Якими одиницями вимірюється сила в Міжнародній системі (СІ)?
11. Перерахуйте ознаки, що характеризують силу.
12. Що називається системою сил?

*2. Індивідуальне тестування.*

*3. Практичні завдання.*

Умови рівноваги системи збіжних сил можна сформулювати в аналітичному або геометричному вигляді. Відповідно завдання на рівновагу тіла під дією системи збіжних сил можна вирішувати двома способами: аналітичним і геометричним.

### Аналітичний спосіб

1. Виділити тіло (вузол, шарнір, стрижень тощо), рівновагу якого необхідно розглянути для визначення невідомих величин.
2. Зробити креслення і зобразити на ньому всі активні сили, прикладені до заданого тіла.
3. Звільнити тіло від накладених на нього зв'язків, замінивши їх дію відповідними реакціями зв'язків. Нанести на креслення сили реакції зв'язків.
4. Записати аналітичну умову рівноваги отриманої системи збіжних сил.
5. Переконайтеся, що дана задача є статично визначною, тобто число невідомих сил реакції в площині не більше двох, а для збіжності сил в просторі - не більше трьох.
6. Вибрати осі координат. Завдання вирішиться простіше, якщо одна або кілька сил будуть спрямовані уздовж координатних осей, або будуть перпендикулярні обраним осям.

7. Скласти рівняння рівноваги тіла в проекціях на осі координат.

8. Вирішити отриману систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини. Якщо числове значення будь-якої з невідомих сил виявиться негативним, то це означає, що в дійсності напрямок сили протилежно тому, яке було вказано на рисунку.

### **Геометричний спосіб**

Геометричний спосіб визначення невідомих величин при дії на тіло системи збіжних сил зазвичай застосовується для вирішення плоских задач статички.

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник, побудований для цієї системи, був замкнутий. Для його побудови необхідно:

1. Виділити тіло (вузол, шарнір, стрижень тощо) рівновагу якого потрібно розглянути для визначення невідомих величин.

2. Зробити креслення і зобразити на ньому всі активні сили, прикладені до заданої тілу.

3. Звільнити тіло від накладених на нього зв'язків, замінивши їх дію відповідними реакціями зв'язків. Нанести на креслення сили реакції зв'язків.

4. Побудова силового багатокутника проводиться поруч з розрахунковою схемою завдання і починається з зображення відомої по модулю і напрямку сили.

Під час зміни порядку креслення векторів в багатокутнику змінюється вид фігури. На результат порядку виконання креслення це не впливає.

Якщо напрямок вектора (реакції зв'язку) на заданій схемі та в силовому багатокутнику сил не співпало, значить, реакція на схемі повинна бути спрямована в протилежному напрямку.

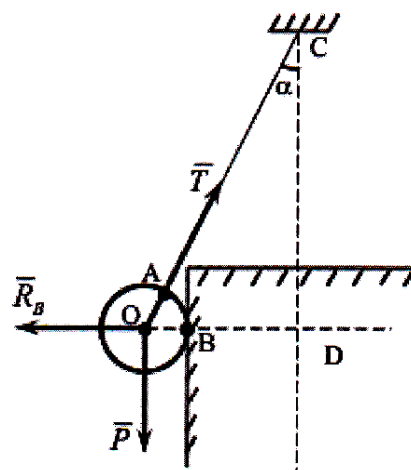
5. Геометрично вирішити силовий багатокутник і визначити шукані величини. Якщо в задачі задані лінійні розміри частин конструкції, то при вирішенні силового багатокутника зручно використовувати подібну трикутників. Якщо задані кути, то доцільно застосовувати тригонометричні формули.

Геометричним способом найзручніше вирішувати завдання, в яких тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох збіжних сил, тоді задача зводиться до побудови і вирішення силового трикутника.

У цьому випадку від довільної точки в обраному масштабі відкладається відома сила. Через початок і кінець цієї сили проводяться прямі лінії, паралельні лініям дії двох інших сил. Точка перетину цих прямих дасть третю вершину замкнутого силового трикутника. Сторони отриманого силового трикутника в обраному масштабі рівні шуканим силам. Напрямок сил визначається правилом побудови силового багатокутника.

## Приклади розв'язування задач.

**Приклад 1.** Однорідна куля радіусом  $r=0,2$  м і вагою  $P=120$  Н, що дотикається у точці В до гладенької вертикальної дошки (рис. 1) утримується в рівновазі мотузкою АС завдовжки 0,8 м. Визначити натяг мотузки та тиск кулі на стінку, якщо відстань від точки В до вертикалі СБ дорівнює 0,4 м.



### Розв'язання

Сила  $P$  відома з умови, відповідно, на неї діють: мотузка, стінка і сила ваги, в'язами для кулі є стінка і мотузка АС. Сили  $P$ ,  $T$ ,  $R_B$  складають плоску систему збіжних сил, для якої складемо два рівняння рівноваги відносно вибраної системи координат:

$$\Sigma F_x = R_B - T \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma F_y = T \cos \alpha - P = 0.$$

Оскільки стінка гладенька, то реакція  $R_B$  буде перпендикулярною до стінки. Реакція мотузки  $T$  напрямлена по ній.

Із рівняння (2) визначимо силу  $T$ :

$$T = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{120}{\sqrt{0,6}} = 122 \text{ Н.}$$

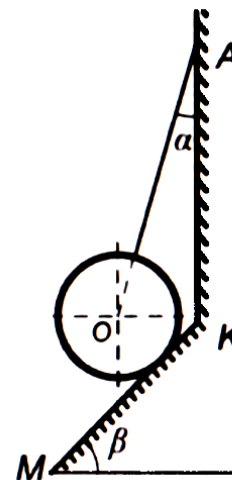
Де  $\cos \alpha$  знаходимо з рівняння  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$

Знаючи  $T$  із рівняння (1), визначимо реакцію  $R_B$ :

$$R_B = T \sin \alpha = 122 \cdot 0,2 = 24,4 \text{ Н.}$$

**Відповідь:** куля тисне на стінку з силою  $R_B = 24,4$  Н і розтягує мотузку з силою:  $T = 122$  Н.

**Приклад 2.** Циліндр вагою  $G=200$  Н утримується ниткою  $OA$  на ідеальній гладкій похилій площині  $MK$ , під кутом до горизонту  $\beta = 45^\circ$  та здійснює на площину тиск  $Q = 60$  Н. Визначити кут  $\alpha$  й силу натягу нитки  $T$ .



**Дано:**

$$G=200 \text{ Н};$$

$$Q = 60 \text{ Н};$$

$$\beta = 45^\circ.$$

**Знайти:**  $\alpha$ ,  $T$ .

### Розв'язання

На тверде тіло (циліндр) діють наступні сили: вага тіла  $G$ , реакція похилій площині  $N$  і натяг нитки  $T$ . Ці сили утворюють систему сходяться сил. Сила реакції похилій площині  $N$  дорівнює за величиною тиску циліндра  $Q$  на площину, тобто  $N = Q$ . Сили реакції  $N$  і тиску  $Q$  спрямовані в протидії - протилежні:  $N = -Q$  (аксіома дії і протидії). тиск  $Q$  докладено до опори, сила реакції  $N$  прикладена до циліндра.

Вирішимо задачу двома способами.

#### 1-й спосіб (аналітичний)

Аналітичні рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил мають вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

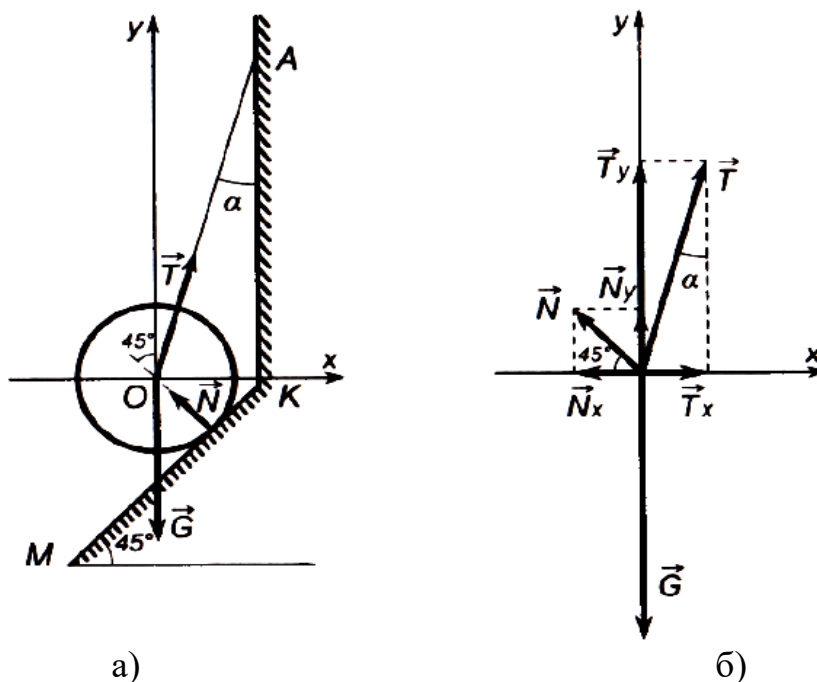


Рисунок 1

Виконаємо розрахункову схему (рис. 1 а і 1 б). Складемо рівняння рівноваги для заданої системи сил:

$$\begin{cases} T \cdot \sin \alpha - N \cdot \sin 45^\circ = 0; \\ T \cdot \cos \alpha + N \cdot \cos 45^\circ - G = 0. \end{cases}$$

З рівняння (1) висловимо значення сили:

$$T = N \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin \alpha}$$

і підставимо його в рівняння (2). Тоді

$$N \cdot \sin 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha + N \cdot \cos 45^\circ - G = 0.$$

Отримаємо

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{G - N \cdot \cos 45^\circ}{N \cdot \sin 45^\circ} = \frac{200 - 60 \cdot 0,7}{60 \cdot 0,7} \approx 3,8;$$

$$\alpha = \operatorname{arcctg} 3,8 = 15^\circ.$$

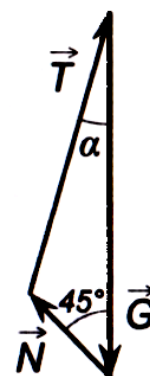
Отже, натяг нитки дорівнюватиме:

$$T = 60 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 60 \cdot \frac{0,7}{0,26} \approx 163 \text{ Н.}$$

### 2-й спосіб (графічний)

Зобразимо в масштабі відомий за величиною і напрямком вектор сили  $G$ .

З його кінця під кутом  $45^\circ$  відкладемо в тому ж масштабі вектор  $N$ . Відрізок, що з'єднує кінець вектора  $N$  і початок вектора  $G$ , і буде шуканої величиною вектора  $T$ . Вимірявши довжину цього відрізка і помноживши її на масштаб, знайдемо чисельне значення сили  $T$ .



Це ж значення можна знайти і по теоремі косинусів:

$$T = \sqrt{G^2 + N^2 - 2 \cdot G \cdot N \cdot \cos 45^\circ} \approx 163 \text{ Н.}$$

Кут  $\alpha$  визначимо або прямим вимірюванням на кресленні, або по теоремі синусів

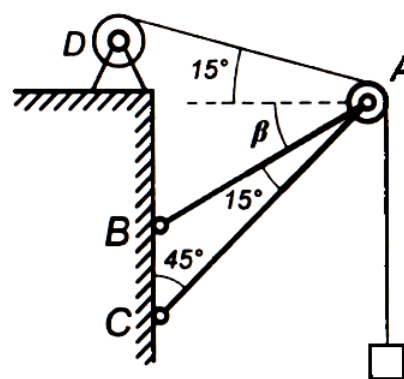
$$\frac{N}{\sin \alpha} = \frac{T}{\sin 45^\circ}$$

отримаємо

$$\sin \alpha = N \cdot \frac{\sin 45^\circ}{T} = \frac{60 \cdot 0,7}{163} = 0,26.$$

Кут  $\alpha$  дорівнює:  $\alpha = \arcsin 0,26$ ;  $\alpha = 15^\circ$ .

**Приклад 3.** Вантаж вагою  $G = 3000$  Н підвішений за допомогою каната, перекинутого через блок А і намотаного на лебідку D. Визначити зусилля в стержнях АВ і АС. Кути вказані на малюнку. Розмірами блоків знехтувати.



**Дано:**

$$G = 3000 \text{ Н.}$$

**Знайти:**  $S_1, S_2$

### Розв'язання

Застосувавши принцип звільнення від зв'язків, покажемо сили, що діють на блок А. Це натяг ниток ( $T$  і  $G$ ) і зусилля в стержнях АВ і АС і  $S_2$ ). Ці сили утворюють систему сходяться сил. Позначимо на малюнку кути  $\alpha$  і  $\beta$ , і визначимо їх з геометричних міркувань:  $\alpha = 75^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

### 1-й спосіб (аналітичний)

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0. \end{cases}$$

З урахуванням того, що  $T = G$  (сили натягу нитки по обидві сторони блоку чисельно рівні), рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\begin{cases} -T \cdot \sin 75^\circ - S_1 \cdot \cos 30^\circ - S_2 \cdot \sin 45^\circ = 0; \\ T \cdot \cos 75^\circ - S_1 \cdot \sin 30^\circ - S_2 \cdot \cos 45^\circ - G = 0. \end{cases}$$

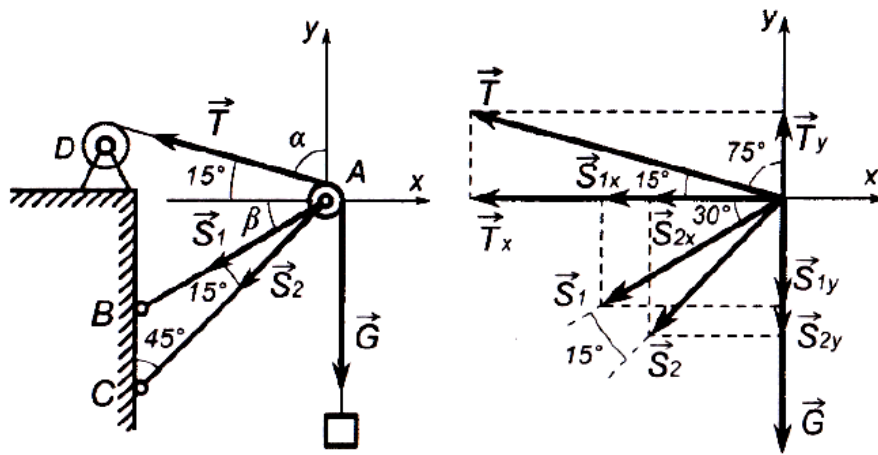


Рисунок 2

Вирішивши систему рівнянь (1), (2), знайдемо

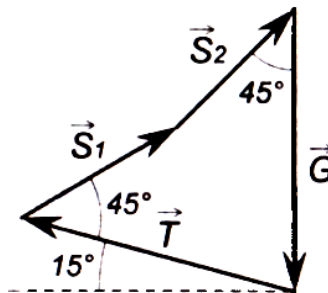
$$S_1 = -1840 \text{ Н},$$

$$S_2 = -1840 \text{ Н}.$$

Знак мінус означає, що показанні на рис. 2 сили  $S_1$  і  $S_2$  спрямовані в протилежну сторону, тобто стрижні АВ і АС стиснуті.

### 2-й спосіб (графічний)

Побудова силового багатокутника почнемо з зображення в масштабі відомого за величиною і напрямком вектора сили  $G$ .

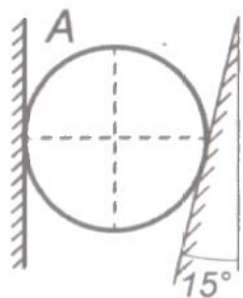


З його кінця під кутом  $15^\circ (90^\circ - \alpha)$  до горизонту відкладемо в тому ж масштабі вектор  $T$ . З початку вектора  $G$  і кінця вектора  $T$  проведемо прямі, паралельні  $AC$  і  $AB$  відповідно. Точка їх перетину відсіче на прямих відрізки, пропорційні величинам шуканих векторів. Вимірявши довжини відрізків і помноживши їх на масштаб, знайдемо чисельні значення  $S_1$  і  $S_2$ .

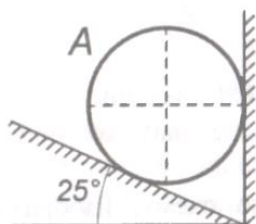
$$S_1 = 1840 \text{ Н}, S_2 = 1840 \text{ Н}.$$

Завдання. Однорідний шар А вагою  $G=12$  кН утримується опорами в рівновазі. Визначити сили реакції опор для заданих геометричних параметрів механічних систем. Вирішити задачу аналітично і геометрично.

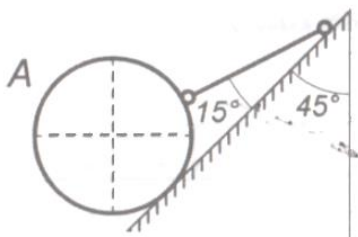
Варіант №1, 5



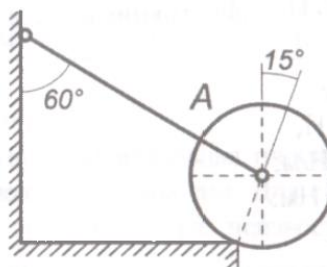
Варіант №3, 7



Варіант №2, 6



Варіант №4, 8



## Тема 2. Визначення сил реакції опор балки.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Наведіть приклади зосереджених і розподілених сил.
2. Що називається рівнодіючої системи сил?
3. Яка сила називається врівноважує?
4. Дайте визначення зовнішньої і внутрішньої сили.
5. Сформулюйте аксіому про рівновагу двох сил.
6. Що таке система сил?
7. Які системи сил називаються еквівалентними?
8. Що таке рівнодіюча і урівноважує сила?
9. Які системи сил називаються статично еквівалентними?
10. У чому подібність між рівнодіючої і врівноважує сил і чим вони один від одного відрізняються?
11. Сформулюйте першу, другу, третю і четверту аксіому статички.

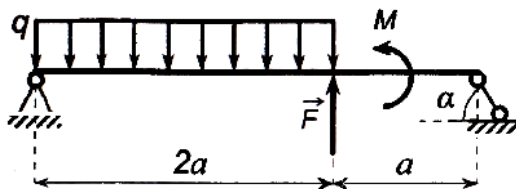
2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Визначення сил реакції опор балки. Невагома балка закріплена так, як показано на кресленні. Визначити сили реакції опор, якщо на балку діють зосереджена сила  $F=60$  Н, рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $q = 15$  Н/м і пара сил з моментом  $M = 40$  Нм; відстань  $a = 1$  м.





**Дано:**

$$F=60 \text{ Н};$$

$$q = 15 \text{ Н/м};$$

$$M= 40 \text{ Нм};$$

$$a= 1 \text{ м}.$$

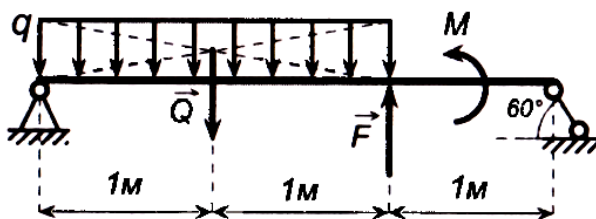
**Знайти:** (не заповнюється!)

### Розв'язання

Розглянемо рівновагу навантаженої і закріпленої балки.

Виконаємо розрахункову схему, зобразивши на ній задані активні навантаження (сила  $F$ , розподілені сили інтенсивністю  $q$  і пара сил з моментом  $M$ ).

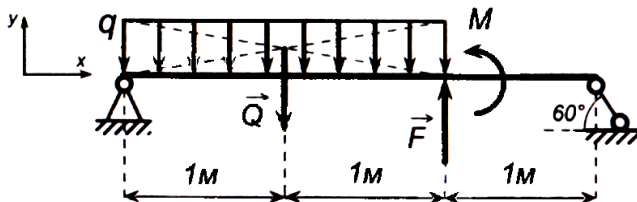
Замінімо розподілене навантаження зосередженою силою  $Q$ , зобразивши її в центрі фігури, і підрахуємо її модуль.



Модуль зосередженої сили  $Q$  дорівнює:

$$Q = q \cdot l, Q = 15 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 2 \text{ м} = 30 \text{ Н}.$$

Виберемо осі координат  $x, y$ , розташувавши їх найбільш зручним способом. Виявимо зв'язку, які утримують балку, замінимо їх силами реакції зв'язків і зобразимо їх.



У точці А балка кріпиться за допомогою нерухомого шарніра, в точці В – з допомогою невагомого стержня. Шарнірно-нерухому опору А замінимо

двома силами реакції:  $R_{Ax}$  і  $R_{Ay}$ , спрямованими по координатним осях. Невагомий стержень В замінимо силою реакції  $R_B$ , спрямованої уздовж стрижня.

Заповнимо графу «Знайти».

**Дано:**

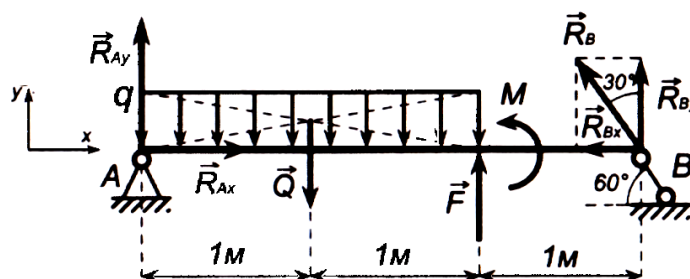
$$F=60 \text{ Н};$$

$$q = 15 \text{ Н/м};$$

$$M= 40 \text{ Нм};$$

$$a= 1 \text{ м}.$$

**Знайти:**  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$



Встановимо вид системи сил, що діють на балку.

З розрахункової схеми видно, що на балку діє довільна плоска система сил. Запишемо умови рівноваги довільної плоскої системи сил. Для складання рівняння моментів виберемо точку А, в якій прикладено дві невідомі сили реакції:  $R_{Ax}$  і  $R_{Ay}$ .

Умови рівноваги балки під дією довільної плоскої системи сил мають вид:

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} = 0; \\ R_y = \sum F_{iy} = 0; \\ M_A = \sum m_A(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Встановимо, чи є завдання статично визначної.

У задачі потрібно визначити три невідомих опорних реакції:  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$ . Умови рівноваги довільної плоскої системи сил містять три незалежних рівняння рівноваги. Завдання є статично визначної, так як число невідомих опорних зусиль дорівнює числу рівнянь рівноваги.

Складемо рівняння рівноваги балки під дією довільної плоскої системи сил, що складається із заданих активних сили і невідомих сил реакції зв'язків.

Алгебраїчні моменти сил беремо зі знаком плюс, якщо вони спрямовані проти ходу годинникової стрілки і зі знаком мінус, якщо вони спрямовані по ходу годинникової стрілки. При обчисленні моменту сили реакції  $R_B$  застосуємо теорему Варіньона:

$$m_A(\vec{R}_B) = m_A(\vec{R}_{Bx}) + m_A(\vec{R}_{By}).$$

Рівняння рівноваги балки з урахуванням даних завдання мають вигляд:

$$\begin{cases} R_{Ax} - R_B \cdot \sin 30^\circ = 0; \\ R_{Ay} + R_B \cdot \cos 30^\circ - Q + F = 0; \\ M - Q \cdot 1 + F \cdot 2 + R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Вирішуємо отриману систему рівнянь і визначаємо з них шукані опорні реакції  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$ . З рівняння (3) отримуємо:

$$R_B = \frac{-M + Q \cdot 1 - F \cdot 2}{3 \cdot \cos 30^\circ}.$$

Підставами числові значення і обчислимо значення  $R_B$ :

$$R_B = \frac{-40 + 30 \cdot 1 - 60 \cdot 2}{3 \cdot 0,866} = \frac{-130}{2,598} = -50,038 = -50,0 \text{ Н.}$$

З рівняння (1) знаходимо:

$$R_{Ax} = R_B \cdot \sin 30^\circ.$$

Підставами числові значення і обчислимо  $R_{Ax}$ :

$$R_{Ax} = -50 \cdot 0,5 = -25 \text{ Н.}$$

З рівняння (2) визначаємо:

$$R_{Ay} = -R_B \cdot \cos 30^\circ + Q - F.$$

Підставами числові значення і обчислимо  $R_{Ay}$ :

$$R_{Ay} = -(-50,0) \cdot 0,866 + 30 - 60 = 13,3 \text{ Н.}$$

### Перевірка рішення

Складемо додаткове рівняння рівноваги моментів щодо центру В і виконаємо перевірку отриманих результатів.

$$\begin{aligned} M_B = \sum m_B(\vec{F}_i) &= 0; \\ M - R_{Ay} \cdot 3 + Q \cdot 2 - F \cdot 1 &= 0. \end{aligned}$$

Підставами числові значення всіх відомих і обчислених сил з отриманими знаками:

$$40 - 13.3 \cdot 3 + 30 \cdot 2 - 60 \cdot 1 = 0, \text{ то єсть, } 40 - 39,9 \approx 0.$$

**Висновок:** шукані сили реакції визначені вірно.

Запишемо відповідь.

**Відповідь:**  $R_{AX} = -25 \text{ Н}$ ,  $R_{AY} = 13,3 \text{ Н}$ ,  $R_B = -50,0 \text{ Н}$ .

Сила реакції  $R_{AX}$ , що має позитивне значення, спрямована так, як показано на кресленні.

Сили реакції  $R_{AY}$  і  $R_B$ , отримані зі знаком мінус, мають напрямки, протилежні тим, які показані на кресленні.

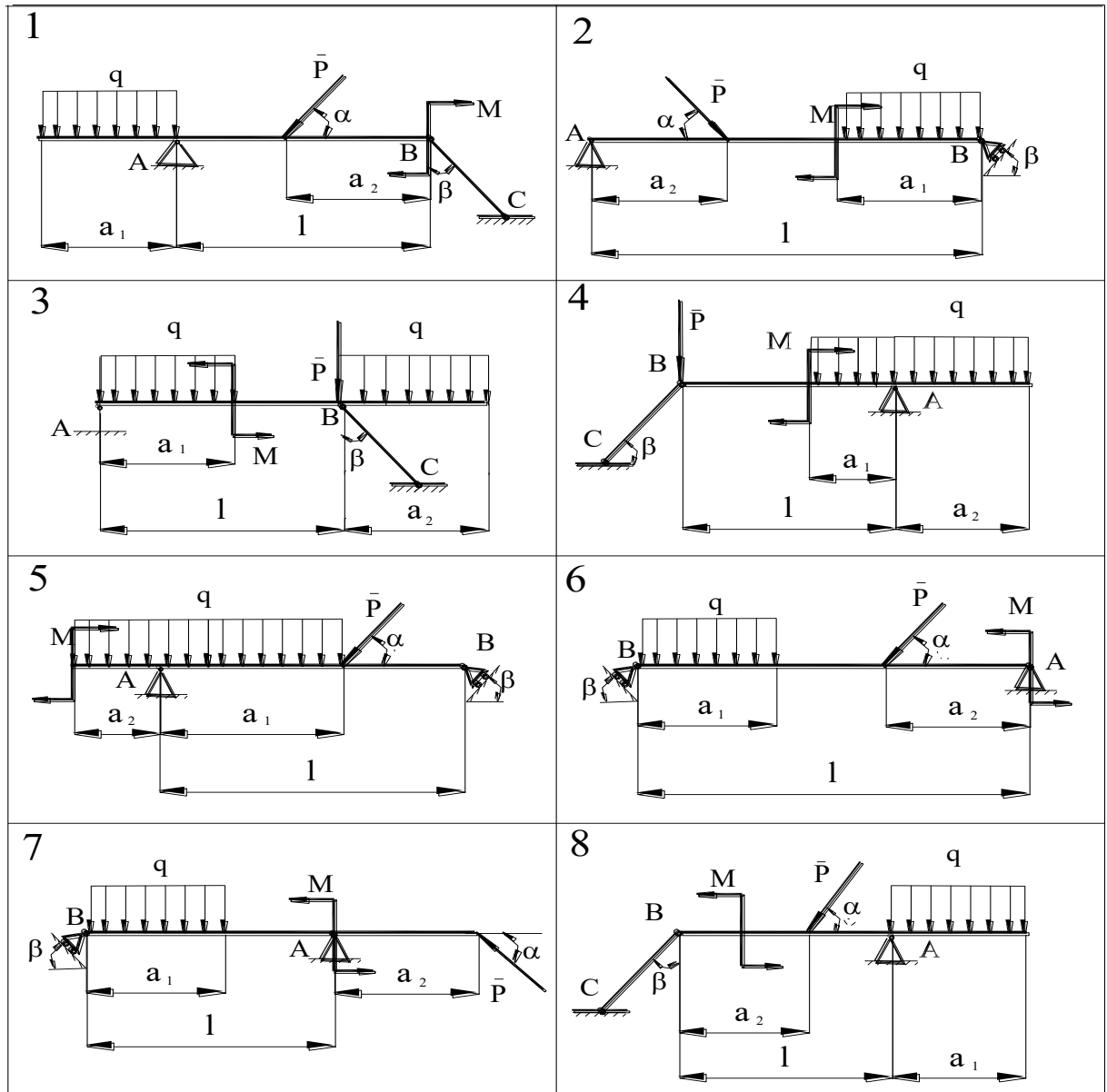
**Завдання.** Проаналізувати умови роботи балок, наведених на рисунку 1: активні сили, типи в'язів та їхні реакції, визначити яка система сил діють у даній конструкції та умови її рівноваги. Нехтуючи вагою елементів конструкції, визначити реакції в'язів. Замінити в'язь у точці В іншою опорою та визначити, як зміняться числові значення реакцій в'язів.

Чисельні значення до задачі наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Чисельні значення

Номер рисунок	$l,$ $м$	$l/a_1$	$l/a_2$	Кути, град.		$P,$ $кН$	$q,$ $кН/м$	$m,$ $кНм$
				$\alpha$	$\beta$			
1	2	10	2	30	30	1	2	1
2	4	8	4	45	45	2	4	2
3	6	6	6	60	60	3	6	3
4	8	4	8	90	30	4	8	4
5	10	2	10	120	45	5	10	5
6	2	10	2	135	60	6	2	6
7	4	8	4	150	30	7	4	7



### Тема 3. Визначення реакції опор плоскої рами.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Що називається силою реакції в'язів?
2. Сформулюйте принцип звільнення від в'язів.
3. До якого об'єкту прикладені сили реакцій?
4. Перелічіть основні види зв'язків, для яких заздалегідь відомо напрямки сили реакції.
5. Назвіть зв'язку, для яких заздалегідь відомо точка докладання реакції, але не її напрямки.

6. У чому сутність принципу звільнення від в'язів?

7. Як спрямована реакція опорного шарніра, якщо тверде тіло пов'язане з опорою за допомогою стрижня, що має на кінцях шарніри?

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Визначити сили реакції зв'язків рами.

Невагома рама навантажена і закріплена так, як показано на кресленні. Визначити сили реакції зв'язків.

Запишемо коротку умову завдання  
(Графу «Знайти» поки не заповнюємо).

**Дано:**

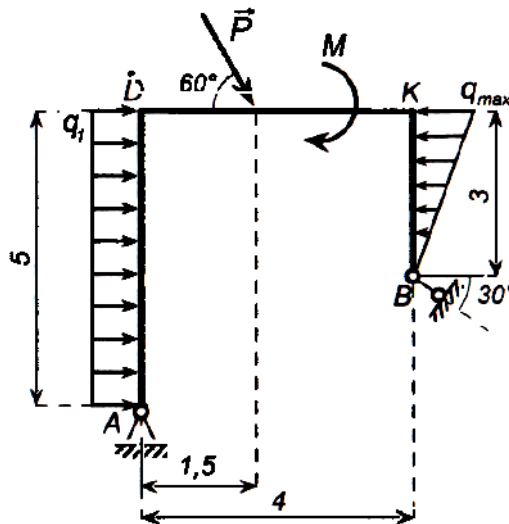
$$P=10\text{кН};$$

$$q_1=1\text{кН/м};$$

$$q_{\max}=2\text{кН/м};$$

$$M = 5\text{кН м};$$

**Знайти:**



### Розв'язання

Розглянемо рівновагу рами. Складемо розрахункову схему рами з діючими на неї навантаженнями і накладеними зв'язками.

На раму діють наступні активні сили: зосереджена сила  $P$ , рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $q_1$ , розподілене навантаження, змінюється за законом трикутника з максимальною інтенсивністю  $q_{\max}$ , а також пара сил з моментом  $M$ .

Розподілені сили замінимо їх рівнодійними, обчислимо їх величини і

зробимо ці сили на розрахунковій схемі. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $q_i$  замінимо силою  $Q_1$ , яка додається в центрі прямокутника.

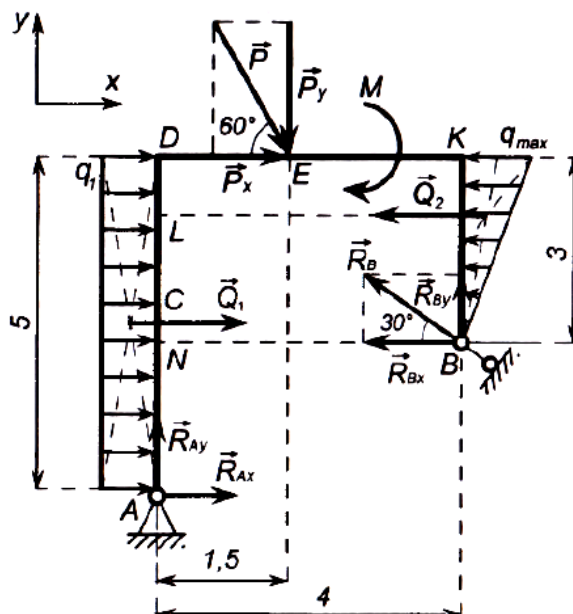
Величина цієї сили дорівнює:

$$Q_1 = q_1 \cdot AD = 1 \cdot 5 = 5 \text{ кН.}$$

Розподілене навантаження, що змінюється за законом трикутника, замінюємо рівнодіюча  $Q_2$ . Вона прикладена в точці перетину медіан. Чисельне значення сили одно:

$$Q_2 = \frac{1}{2} q_{max} \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ кН.}$$

Виберемо декартову систему координат.



Зобразимо сили реакції зв'язків. Реакцію невагомому стержню  $R_B$  направляємо вздовж стержня. Для нерухомого шарніра вказуємо дві складові - горизонтальну  $R_{Ax}$  і вертикальну  $R_{Ay}$ . Заповнимо графу «Знайти».

Сили, що діють на раму, утворюють довільну плоску систему сил. Для вирішення задачі використовуємо аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Зауваження

Як моментної обрана точка А, так як через неї проходять лінії дії невідомих сил і їх моменти щодо цієї точки дорівнюють нулю.

Для обчислення моментів сил  $R_B$  і  $P$  розкладемо їх на складові по осях координат  $P_x$  і  $P_y$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$  і скористаємося теоремою Варіньона, згідно з якою моменти сил  $R_B$  і  $P$  визначаються як алгебраїчні суми моментів їх складових, враховуючи, що вирази складових сил  $P$  і  $R_B$  рівні:

$$P_x = P \cdot \cos 60^\circ; P_y = P \cdot \cos 30^\circ; R_{Bx} = R_B \cdot \cos 30^\circ; R_{By} = R_B \cdot \cos 60^\circ.$$

Складемо три рівняння рівноваги рами:

$$\begin{cases} R_{Ax} + Q_1 + P \cdot \cos 60^\circ - Q_2 - R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \\ R_{Ay} - P \cdot \cos 30^\circ + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0; \\ -Q_1 \cdot AC - P_x \cdot AD - P_y \cdot DE - M + Q_2 \cdot AL + R_{Bx} \cdot AN + R_{By} \cdot NB = 0. \end{cases}$$

Вирішуючи отриману систему рівнянь, знаходимо невідомі реакції зв'язків.

З рівняння (3) знаходимо:

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{Q_1 \cdot 2,5 + P \cos 60^\circ \cdot 5 + P \cdot \cos 30^\circ \cdot 1,5 + M - Q_2 \cdot 4}{\cos 60^\circ \cdot 4 + \cos 30^\circ \cdot 2} = \\ &= \frac{5 \cdot 2,5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 5 - 3 \cdot 4}{0,5 \cdot 4 + 0,866 \cdot 2} = 11,65 \text{ кН}. \end{aligned}$$

З рівняння (2) отримуємо:

$$R_{Ay} = P \cdot \cos 30^\circ - R_B \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,866 - 11,65 \cdot 0,5 = 2,83 \text{ кН}.$$

З рівняння (1) визначаємо:

$$R_{Ax} = -Q_1 - P \cdot \cos 60^\circ + Q_2 + R_B \cdot \cos 30^\circ = -5 - 10 \cdot 0,5 + 3 + 11,65 \cdot 0,866 = 3,09 \text{ кН}.$$

Для перевірки правильності рішення задачі складемо рівняння моментів щодо точки  $E$ , через яку не проходять лінії дії шуканих сил:

$$Q_1 \cdot 2,5 - M - Q_2 \cdot 1 - R_{Bx} \cdot 3 + R_{By} \cdot 2,5 + R_{Ax} \cdot 5 - R_{Ay} \cdot 1,5 = 0.$$

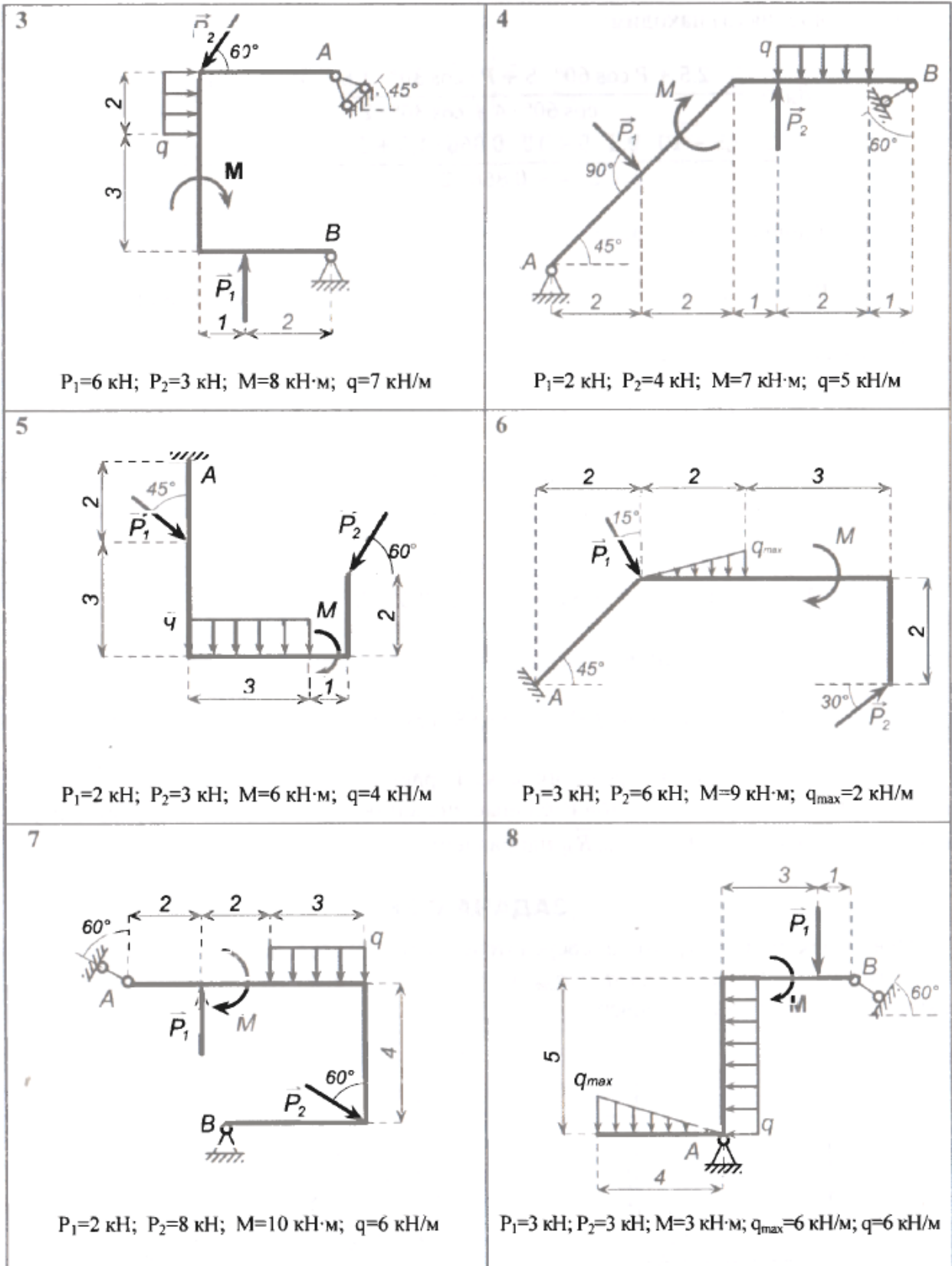
Підставами числові значення:

$$5 \cdot 2,5 - 5 - 3 \cdot 1 - 11,65 \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 + 11,65 \cdot \cos 60^\circ \cdot 2,5 + 3,09 \cdot 5 - 2,83 \cdot 1,5 = 0.$$

**Відповідь:** Величини сил реакції зв'язків рівні:  $R_{Ax} = 3,09$  кН,  $R_{Ay} = 2,83$  кН,  $R_B = 11,65$  кН. Отримані позитивні значення всіх шуканих сил реакції вказує на те, що сили  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_B$  спрямовані так, як показано на кресленні.



Завдання. Невагома рама навантажена зосередженими силами  $P_1$  і  $P_2$  розподіленими навантаженнями з інтенсивностями  $q$  і  $q_{\max}$  і парою сил з моментом  $M$ . Визначити сили реакції зв'язків. Виконати перевірку.



## Тема 4. Визначення рівноваги складеної конструкції.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Сформулюйте умови рівноваги системи тіл.

2. Які системи тіл є статично визначені, а які - статично визначити неможливо?

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

Рішення задач статички на рівновагу складеної конструкції можливо двома способами, вибір який обумовлений цілями завдання.

### Перший спосіб

Якщо в задачі необхідно визначити всі внутрішні зусилля в зв'язках, утримують частини складеної конструкції, то рішення задачі доцільно проводити в наступній послідовності.

1. Виділити механічну систему (складову конструкцію), рівновагу якої розглядається.

2. Прикласти до системи тіл активні сили, замінивши розподілені навантаження зосередженими силами.

3. Вибрати систему координат.

4. Відкинути зовнішні зв'язки, а їх дія замінити відповідними силами реакції зв'язків.

5. Розчленувати складову конструкцію по внутрішнім зв'язкам, замінивши при цьому внутрішні зв'язки силами реакції цих зв'язків. Важливо пам'ятати, що в місцях з'єднання тел системи реакції внутрішніх зв'язків попарно рівні за модулем і протилежні за напрямку.

6. Записати умови рівноваги кожного тіла системи як вільного, що знаходиться під дією активних сил і сил реакцій зовнішніх і внутрішніх зв'язків.

7. Встановити статичну визначеність завдання. Якщо число невідомих сил не перевищує числа рівнянь рівноваги, то задача статично визначна.

8. Отриману систему рівнянь вирішити в найбільш зручною послідовності і знайти невідомі реакції зовнішніх і внутрішніх зв'язків. За знаком отриманої кожної сили реакції встановити її напрямок.

### Другий спосіб

У тому випадку, коли основна мета завдання полягає у визначенні реакцій зовнішніх зв'язків, рішення задачі буде простіше, якщо спочатку розглянути систему тел як єдине ціле, вважаючи її абсолютно твердим тілом, і

записати рівняння рівноваги доданих до неї активних сил і сил реакції зовнішніх зв'язків. При це внутрішні сили взаємодії тіл системи в рівняння не ввійдуть, оскільки вони врівноважені.

Потім систему, що складається з  $n$  тел, потрібно розчленувати на частини і додатково розглянути рівновагу  $(i-1)$  тіла.

Переконайтеся в статичній визначності завдання і з отриманих рівнянь рівноваги визначити шукані сили реакції зв'язків.

При будь-якому способі рішення задачі на тему «Рівновага системи тіл» при визначенні шуканих величин, як правило, використовуються в повному обсязі рівняння рівноваги, складені для механічної системи в цілому і для кожного з тіл окремо.

Решта рівняння використовують для перевірки отриманих результатів.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Невагома складова рама, частини якої з'єднані шарніром в точці  $C$ , знаходиться в рівновазі під дією заданих навантажень. визначити опорні реакції зовнішніх зв'язків і зусилля в проміжному шарнірі  $C$ .

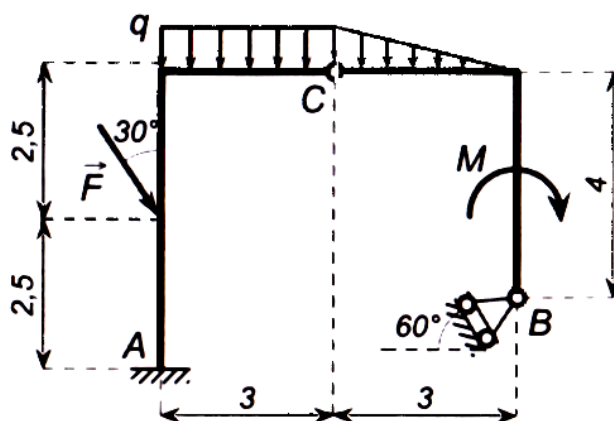
*Дано:*

$$F = 5 \text{ кН};$$

$$q = 2 \text{ кН/м};$$

$$M = 8 \text{ кНм}.$$

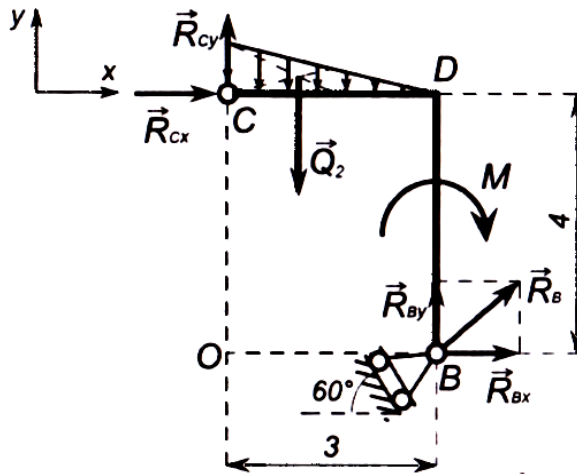
*Знайти:*  $R_{Ax}, R_{Ay}, m_A, R_{Cx}, R_{Cy}, R_B$ .



### Розв'язання

Розділимо раму на дві частини по проміжному шарніру  $C$ , вважаючи, що проміжний шарнір  $C$  одночасно належить кожній з частин.

Розглянемо рівновагу правої частини рами.



Складемо розрахункову схему правій частині рами. На неї діє активна пара сил з моментом  $M$ . Розподілене навантаження, що змінюється за лінійним законом, замінюємо рівнодіюча силою  $Q_2$ , яку прикладаємо в точці перетину медіан трикутника, тобто на відстані  $- CD/3$  від точки  $C$ , її чисельне значення одно:

$$Q_2 = q \cdot \frac{CD}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ кН.}$$

Зображені сили реакцій зовнішніх і внутрішніх зв'язків. Реакцію рухомого шарніра  $R_B$  направляємо перпендикулярно поверхні. Для нерухомого проміжного шарніру  $C$  вказуємо дві складові реакції – горизонтальну  $R_{Cx}$  і вертикальну  $R_{Cy}$ .

Виберемо систему відліку: вісь  $Ox$  спрямовуємо горизонтально, вісь  $Oy$  - вертикально.

Сили, що діють на праву частину конструкції, утворюють довільну плоску систему сил, умова рівноваги якої має вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{ci} = 0. \end{cases}$$

Складемо три рівняння рівноваги правої частини рами:

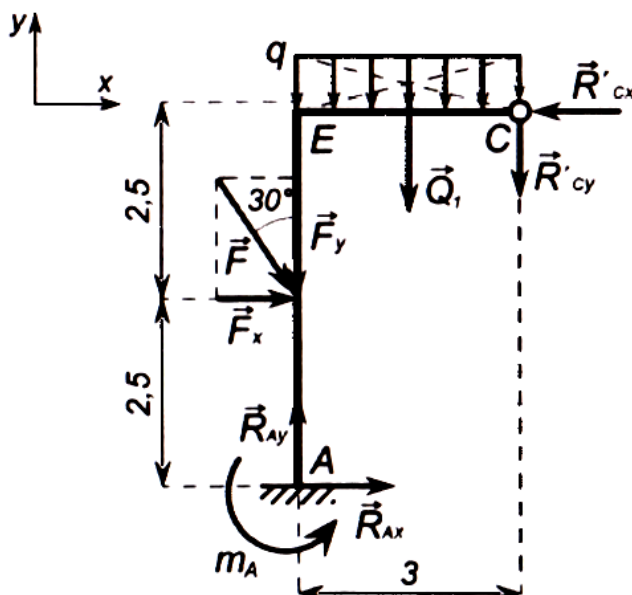
$$\begin{cases} R_B \cdot \cos 30^\circ + R_{Cx} = 0; \\ R_B \cdot \cos 60^\circ + R_{Cy} - Q_2 = 0; \\ R_B \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 + R_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 - M - Q_2 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Момент сили  $R_B$  знайдений з використанням теореми Варіньона, враховуючи, що проекції сили  $R_B$  на осі координат дорівнюють:

$$R_{Bx} = R_B \cdot \cos 30^\circ, R_{By} = R_B \cdot \cos 60^\circ.$$

Розглянемо рівновагу лівої частини конструкції і складемо для неї розрахункову схему. На ліву частину рами діють активна сила  $F$  і рівномірно розподілене навантаження  $q$ , яку замінюємо зосередженої силою  $Q_1$  з чисельним значенням

$$Q_1 = q \cdot CE = 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$



Зв'язки в точках А і С замінюємо силами реакції зв'язків. У закладенні в точці А вказуємо дві складові реакції - горизонтальну  $R_{Ax}$  і вертикальну  $R_{Ay}$  і реактивний момент закладення  $m_A$ . Реакція шарніра С включає дві складові  $R'_{Cx}$  і  $R'_{Cy}$ . Відповідно до аксіомою про дію та протидію вони рівні по значенням і протилежні за напрямками силам  $R_{Cx}$  і  $R_{Cy}$ :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{Cx} &= -\bar{R}'_{Cx}; \\ \bar{R}_{Cy} &= -\bar{R}'_{Cy}. \end{aligned}$$

На ліву частину складеної конструкції діє також довільна плоска система сил, тому для неї складемо три рівняння рівноваги у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{Ai} = 0. \end{cases}$$

З урахуванням даних завдання отримуємо:

$$\begin{cases} R_{Ax} + F \cdot \cos 60^\circ - R'_{Cx} = 0; \\ R_{Ay} - F \cdot \cos 30^\circ - Q_1 - R'_{Cy} = 0; \\ -F \cdot \cos 60^\circ \cdot 2,5 + m_A - Q_1 \cdot 1,5 + R'_{Cx} \cdot 5 - R'_{Cy} \cdot 3 = 0. \end{cases}$$

Зауваження. Тут відразу враховано, що  $R'_{Cx} = R_{Cx}$ ;  $R'_{Cy} = R_{Cy}$ .

Вирішуючи отриману систему рівнянь (1)-(6), знаходимо невідомі реакції зв'язків.

З рівнянь (3), (1), (2) послідовно отримуємо значення шуканих опорних реакцій:

$$R_B = \frac{M + Q_2}{3 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot \cos 30^\circ} = \frac{11}{3 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,866} = 2,22 \text{ кН};$$

$$R_{Cx} = -R_B \cdot \cos 30^\circ = -2,22 \cdot 0,866 = -1,92 \text{ кН};$$

$$R_{Cy} = Q_2 - R_B \cdot \cos 60^\circ = 3 - 2,22 \cdot 0,5 = 1,89 \text{ кН}.$$

З рівняння (4) маємо:

$$R_{Ax} = R'_{Cx} - F \cdot \cos 60^\circ = -1,92 - 5 \cdot 0,5 = -4,42 \text{ кН}.$$

З рівняння (5):

$$R_{Ay} = F \cdot \cos 30^\circ + Q_1 + R'_{Cy} = 5 \cdot 0,866 + 6 + 1,89 = 12,22 \text{ кН}.$$

З рівняння (6) знаходимо:

$$\begin{aligned} m_A &= F \cdot \cos 60^\circ \cdot 2,5 + Q_1 \cdot 1,5 - R'_{Cx} \cdot 5 + R'_{Cy} \cdot 3 = \\ &= 5 \cdot 0,5 \cdot 2,5 + 6 \cdot 1,5 + 1,92 \cdot 5 + 1,89 \cdot 3 = 30,52 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для перевірки правильності рішення розглянемо рівновагу рами в цілому.

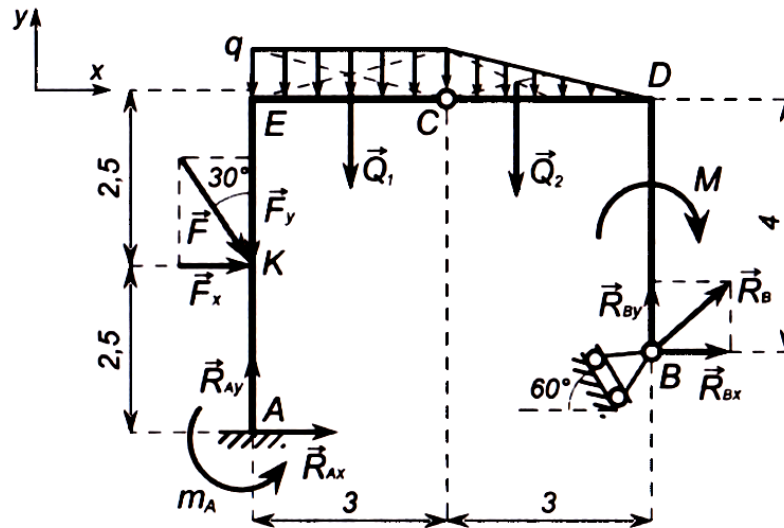
Складемо розрахункову схему рами, зобразивши на ній всі активні сили і сили реакції зовнішніх зв'язків в точках А і В. Внутрішні сили в точці С компенсують один одного і тому на схемі не зображуються.

Умова рівноваги рами має вигляд:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_{Ki} = 0. \end{cases}$$

Складемо три рівняння рівноваги рами в цілому:

$$\begin{cases} R_{Ax} + F \cdot \cos 60^\circ + R_B \cdot \cos 30^\circ = 0; \\ R_{Ay} - F \cdot \cos 30^\circ - Q_1 - Q_2 + R_B \cdot \cos 60^\circ = 0; \\ m_A + R_{Ax} \cdot 2,5 - Q_1 \cdot 1,5 - Q_2 \cdot 4 - M + R_{Bx} \cdot 1,5 + R_{By} \cdot 6 = 0. \end{cases}$$



Підставляючи чисельні значення величин, заданих в умові завдання, і знайдені значення опорних реакції з отриманими знаками, переконаємося, що всі сили реакції і реактивний момент в закладенні визначені вірно:

$$\begin{cases} -4,42 + 5 \cdot 0,5 + 2,22 \cdot 0,866 = 0; \\ 12,22 - 5 \cdot 0,866 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1,5 + 2,22 \cdot 0,5 = 0; \\ 30,52 - 4,42 \cdot 2,5 - 6 \cdot 1,5 - 3 \cdot 4 - 8 + 2,22 \cdot 0,866 \cdot 1,5 + 2,22 \cdot 0,5 \cdot 6 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. Сили реакції зв'язків рівні:  $R_{Ax} = -4,42$  кН;  $R_{Ay} = 12,22$  кН;  $m_A = 30,52$  кН · м;  $R_B = 2,22$  кН;  $R_{Cx} = -1,92$  кН;  $R_{Cy} = 1,89$  кН. Знаки реакцій вказують, що зусилля  $R_{Ay}$ ,  $m_A$ ,  $R_{Cy}$ ,  $R_B$ . Спрямовані так, як показано на кресленні, а сили  $R_{Ax}$ ,  $R_{Cx}$  спрямовані в сторони, протилежні тим, які показані на кресленні.

### Тема 5. Задачі на рівновагу просторової системи довільно розташованих сил.

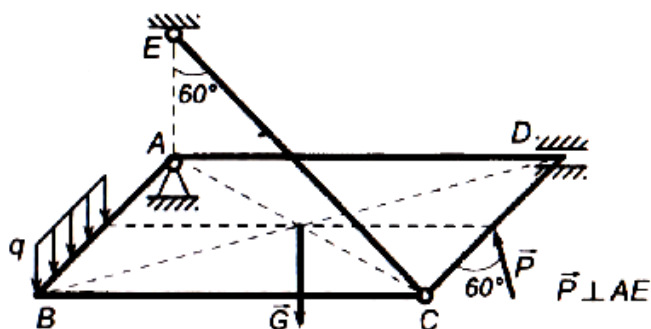
1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Рівняння рівноваги просторової паралельної системи сил.
2. Залежність між головними моментами щодо різних центрів приведення.
3. Рівновага складових тіл.
4. Центр паралельних сил, центр ваги тіла. Визначення його положення.
5. Момент сили щодо осі.
6. Моменти сили щодо координатних осей.
7. Тертя.
  2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

## Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Важка однорідна плита ABCD перебуває в рівновазі під дією сили тяжіння  $G$ , зосередженої сили  $P$  і рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q$ . Визначити сили реакції зв'язків.



**Дано:**

$$AB = 1 \text{ м};$$

$$BC = 2 \text{ м}$$

$$q = 12 \text{ Н/м};$$

$$P = 9 \text{ кН};$$

$$G = 10 \text{ кН}.$$

**Знайти:**  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{Dx}$ ,  $R_{Dy}$

### Розв'язання

Запишемо короткий умову задачі.

Графу «Знайти» заповнимо після зображення шуканих сил реакції зв'язків на розрахунковій схемі. Складаємо розрахункову схему закріплення і навантаженої плити в масштабі. Силу тяжіння однорідної плити  $G$  прикладаємо до центру тяжкості (геометричному центру однорідної фігури). Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою.

$$Q = q \frac{AB}{2} = 6 \text{ кН}.$$

Силу  $Q$  прикладаємо в центрі розподілу навантаження.

Реакцію невагомий стержня  $EC$  -  $S$ , направляємо уздовж стержня. Реакцію сферичного шарніра  $A$  розкладаємо на три складові:  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ . Реакцію циліндричного шарніра  $D$  розкладаємо на дві складові:  $R_{Dx}$ ,  $R_{Dy}$ . Заповнюємо графу «Знайти».

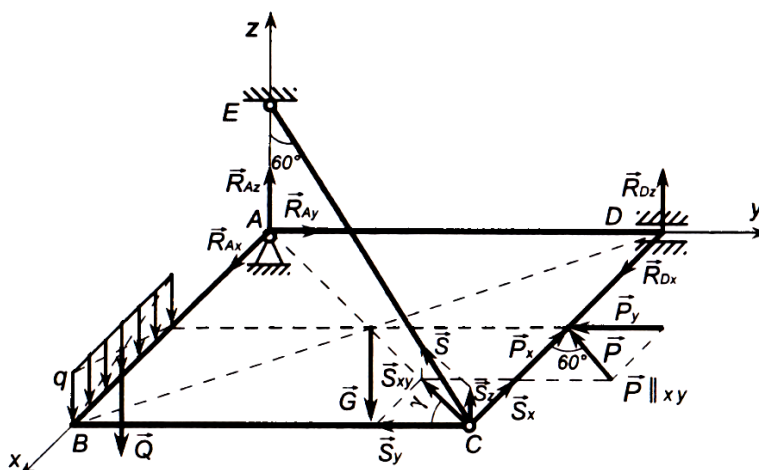
Вибираємо систему координат, початок якої поміщаємо в точку  $A$ , так як в ній сходяться лінії дії трьох з шести невідомих сил.

На плиту діє довільна просторова система сил, під дією якої плита знаходиться в рівновазі. Аналітичні умови рівноваги довільної просторової



СИСТЕМИ СИЛ МАЮТЬ ВИГЛЯД:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0; \\ \sum m_{Ax}(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum m_{Ay}(\vec{F}_i) &= 0; \\ \sum m_{Az}(\vec{F}_i) &= 0. \end{aligned}$$



Складаємо рівняння рівноваги плити.

$$R_{Ax} + R_{Dx} - P \cdot \cos 60^\circ - S \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$R_{Ay} - P \cdot \sin 60^\circ - S \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$R_{Az} + R_{Dz} - G - Q + S \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$R_{Dz} \cdot AD + S \cdot \cos 60^\circ \cdot AD - G \cdot \frac{AD}{2} = 0; \quad (4)$$

$$-S \cdot \cos 60^\circ \cdot AB + G \cdot \frac{AB}{2} + Q \cdot \frac{3}{4} AB = 0; \quad (5)$$

$$-R_{Dx} \cdot AD - P \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{AB}{2} + P \cdot \cos 60^\circ \cdot BC = 0. \quad (6)$$

З розрахункової схеми видно, що  $\gamma$  - це кут між проекцією сили  $S$  на площина  $xy$  і віссю  $y$ . З трикутника  $ABC$  знаходимо:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894, \quad \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447.$$

При визначенні моменту сили  $P$  відносно осі  $z$  застосовуємо теорему

Варіньона.

Зауваження. Для складання рівнянь рівноваги можна зображувати креслення пластини в проекціях на координатні площини. Тоді для проекції на площину  $zAy$  можна скласти рівняння (рисунок 3 а):

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum m_{Ax}(\vec{F}_i) &= 0.\end{aligned}$$

Для проекцій на площину  $xAz$  (рисунок 3 б):

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iz} &= 0; \\ \sum m_{Ay}(\vec{F}_i) &= 0;\end{aligned}$$

і на площину  $xДУ$  (рисунок 3 в):

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum m_{Az}(\vec{F}_i) &= 0.\end{aligned}$$

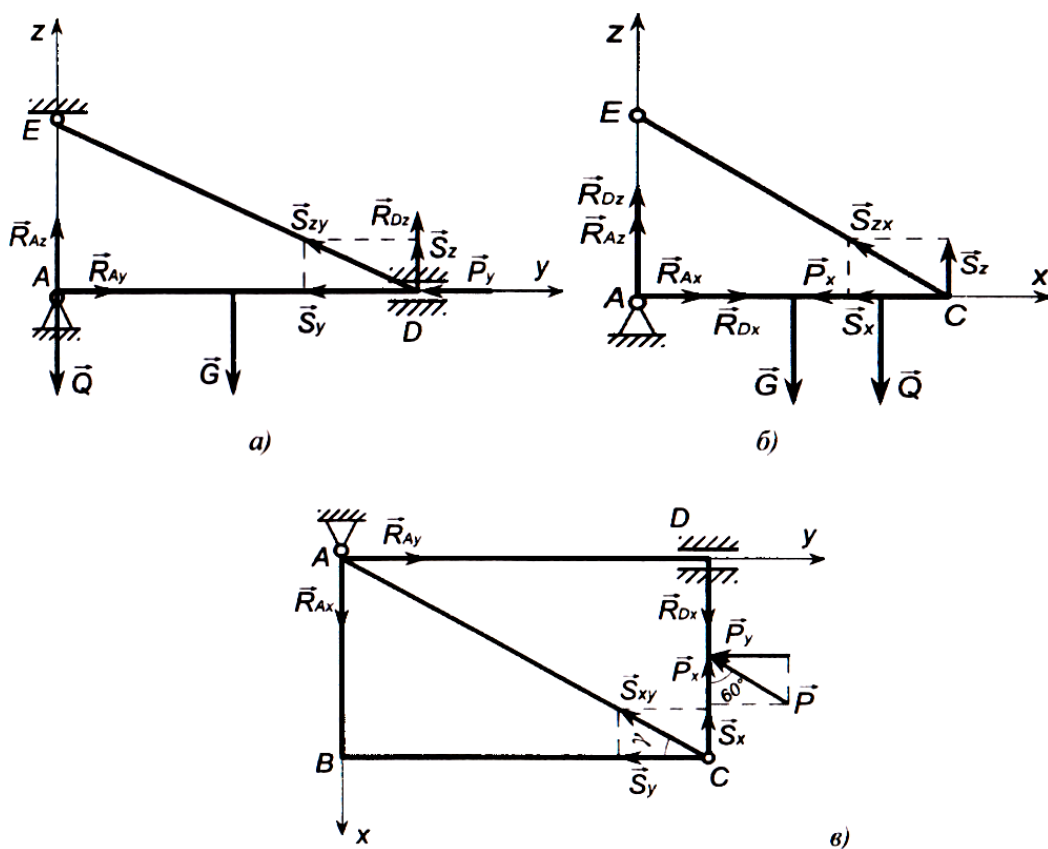


Рисунок 3

З рис. 3 а, 3 б і 3 в видно, що значення проекцій сил рівні:

$$\begin{aligned}
S_z &= S \cdot \cos 60^\circ; \quad \bar{S}_{xy} = S \cdot \sin 60^\circ; \\
S_x &= \bar{S}_{xy} \cdot \sin \gamma = S \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin \gamma; \\
S_y &= \bar{S}_{xy} \cdot \cos \gamma = S \cdot \sin 60^\circ \cos \gamma; \\
P_x &= P \cdot \cos 60^\circ; \quad P_y = P \cdot \sin 60^\circ.
\end{aligned}$$

Вирішуємо отриману систему рівнянь (1) – (6). З рівняння (5) знаходимо:

$$S = \frac{0,5 \cdot G + 0,75 \cdot Q}{\cos 60^\circ} = \frac{0,5 \cdot 10 + 0,75 \cdot 6}{0,5} = 19,00 \text{ кН.}$$

З рівняння (6) отримуємо:

$$R_{Dx} = \frac{1}{2} \cdot [P \cdot (2 \cdot \cos 60^\circ - 0,5 \cdot \sin 60^\circ)] = \frac{1}{2} [9 \cdot (2 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,866)] = 2,55 \text{ кН.}$$

З рівняння (4) визначаємо:

$$R_{Dz} = \frac{G}{2} - S \cdot \cos 60^\circ = \frac{10}{2} - 19 \cdot 0,5 = -4,50 \text{ кН.}$$

З рівнянь (3), (2). (1) відповідно знаходимо інші невідомі:

$$\begin{aligned}
R_{Az} &= G + Q - S \cdot \cos 60^\circ - R_{Dz} = 10 + 6 - 19 \cdot 0,5 + 4,5 = 11,00 \text{ кН;} \\
R_{Ay} &= S \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos \gamma + P \cdot \sin 60^\circ = 19 \cdot 0,866 \cdot 0,894 + 9 \cdot 0,866 = 22,50 \text{ кН;} \\
R_{Ax} &= P \cdot \cos 60^\circ + S \cdot \sin 60^\circ \sin \gamma - R_{Dx} = 9 \cdot 0,5 + 19 \cdot 0,866 \cdot 0,447 - 2,551 = 9,30 \text{ кН.}
\end{aligned}$$

**Відповідь:** Шукані сили реакції зв'язків чисельно рівні:  $R_{Ax} = 9,30$  кН;  $R_{Ay} = 22,50$  кН;  $R_{Az} = 11,00$  кН;  $R_{Dx} = 2,55$  кН;  $R_{Dz} = -4,50$  кН;  $S = 19,00$  кН.

Знак «плюс» показує, що сили  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ;  $R_{Az}$ ,  $R_{Dx}$  і  $S$  спрямовані так, як показано на розрахунковій схемі. Знак «мінус», що вийшов при розрахунку реакції  $R_{Dz}$  показує, що дійсне напрямом сили протилежно напрямку, зображеному на кресленні.

## Тема 6. Рівновага тіла при наявності тертя.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Де прикладена і як спрямована сила тертя ковзання при спокої?
2. Сформулюйте закони тертя ковзання спокою.
3. Як визначається статичний коефіцієнт тертя, які його властивості?
4. Чому дорівнює і як спрямована сила тертя ковзання при русі?
5. Як визначається динамічний коефіцієнт тертя, які його властивості?
6. Де прикладена, як спрямована і чому дорівнює сила тертя кочення?
7. Як визначається коефіцієнт тертя кочення? Вкажіть його розмірність.
8. Чому дорівнює момент тертя кочення?

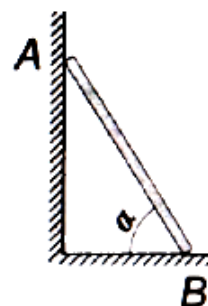
2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Сходи вагою  $G = 100$  Н спирається на горизонтальну підлогу і вертикальну стіну. Стіна гладка, коефіцієнт тертя сходи об підлогу  $f = 0,4$ .

Під яким кутом  $\alpha$  потрібно поставити драбину, щоб по ній міг піднятися наверх людина вагою  $G_1 = 800$  Н ?



**Дано:**

$G=100$ Н;

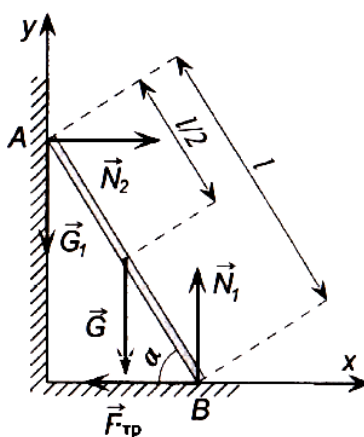
$f = 0,4$ ;

$G_1 = 800$  Н.

**Знайти:**  $\alpha$

Складемо розрахункову схему. Покажемо на схемі сили, діючі на сходи з людиною: сила тяжіння сходів  $G$ , сила тяжіння людини  $G_1$ , нормальні реакції  $N_1$  і  $N_2$  в точках А і В і сила тертя  $F_{\text{тр}}$ , спрямована в бік протилежний можливого руху сходів.

### Розв'язання



Сили, що діють на сходи, утворюють довільну плоску систему сил, рівновагу якої можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0. \end{cases}$$

Позначимо довжину драбини  $l$  і складемо рівняння рівноваги.

$$\begin{cases} N_2 - F_{\text{тр}} = 0; & (1) \\ N_1 - G - G_1 = 0; & (2) \\ G_1 \cdot l \cdot \cos \alpha + G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - N_2 \cdot l \cdot \sin \alpha = 0. & (3) \end{cases}$$

Рівняння (3) розділимо  $l \cdot \cos \alpha$ , і воно набуде вигляду:

$$G_1 + 0,5 \cdot G - N_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad (4)$$

Для граничного стану рівноваги, відповідного мінімального значення кута  $\alpha$ , сили тертя відповідно до закону Кулона дорівнює:

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{max тр}} = f \cdot N_1.$$

З рівнянь (1), (2) і (4) отримаємо:

$$N_2 = F_{\text{тр}} = f(G + G_1),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot G_1 + G}{2 \cdot f \cdot (G_1 + G)}.$$

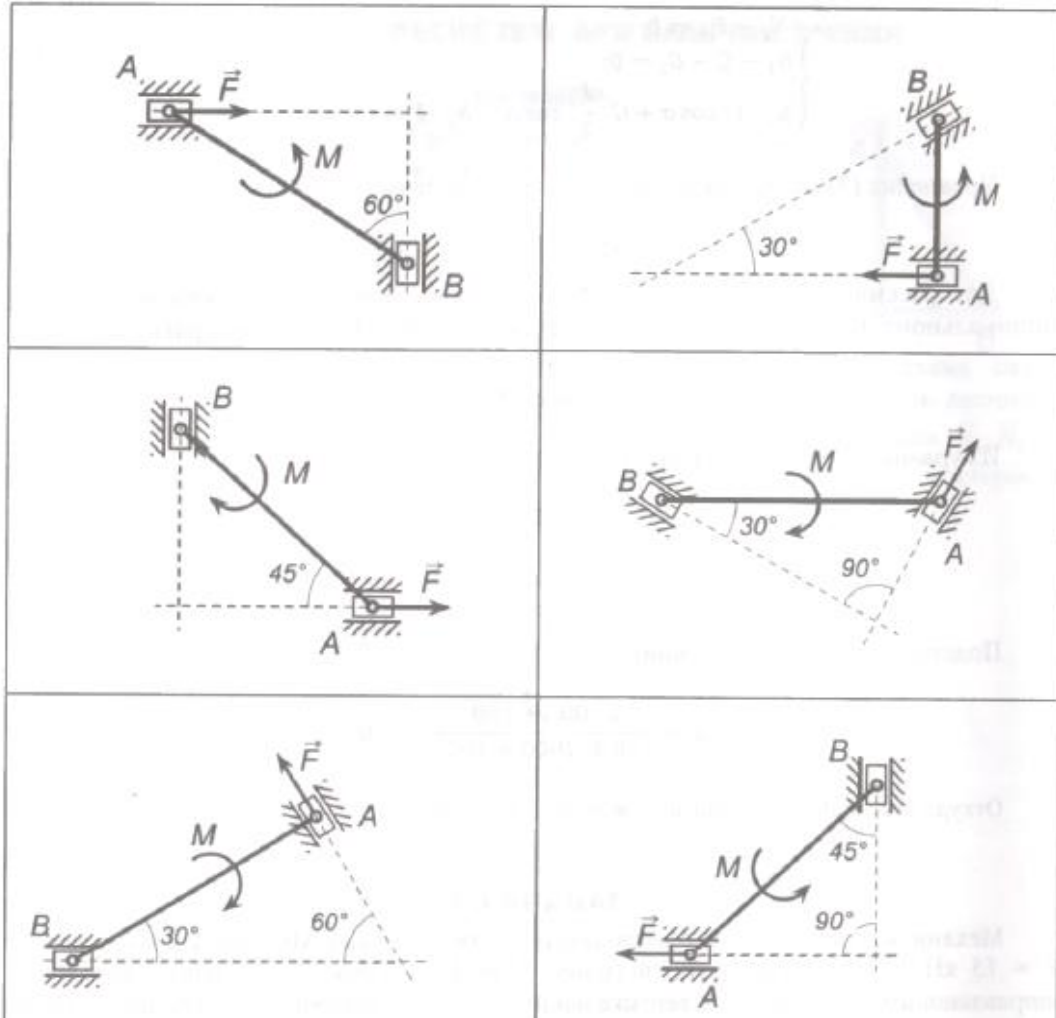
Підставами числові значення:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot 800 + 100}{2 \cdot 0,4 \cdot (800 + 100)} \approx 2,36.$$

Звідки шуканий кут  $\alpha$  дорівнює:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2,36 \approx 67^\circ.$$

Завдання. Механізм, що складається з однорідного тонкого стрижня АВ довжиною  $l = 4$  м, вагою  $G = 15$  кН і двох невагомих плазунів А і В, які можуть переміщатися по напрямних, розташований у вертикальній площині. Коефіцієнт тертя повзуна А по направляючої становить  $f = 0,4$ , тертя у повзуна В відсутня. на стрижень АВ діє пара сил з моментом  $M = 20$  кН м. Визначити значення сили  $F$ , при якій механізм буде перебувати в рівновазі.



## Тема 7. Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Що називається центром ваги твердого тіла?
2. Як обчислюється повна реакція шорсткою поверхні?
3. Як спрямований вектор повної реакції шорсткою поверхні?
4. Чому дорівнює кут тертя?
5. Яка залежність між кутом тертя і коефіцієнтом тертя?
6. Що таке конус тертя?
7. Сформулюйте умови рівноваги тіла при наявності тертя.

2. Практичні завдання.

Алгоритм визначення центру ваги твердого тіла:

1. Виконати розрахункову схему.
2. Вибрати осі координат.
3. Розбити тіло на частини простий (елементарної) геометричної форми, положення центрів тяжкості яких відомі.
4. Визначити координати центрів ваги кожної з частин тіла в обраній

системі координат.

5. Знайти значення сил тяжкості (довжин, площ або обсягів) кожної частини

тіла. Сили тяжіння (площі, об'єми) вирізів (порожнин) вважаються від'ємними.

6. Обчислити загальну силу тяжіння (довжину, площу або обсяг) твердого тіла.

7. Обчислити координати центру ваги всього тіла.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад.** Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу, який має вертикальну вісь симетрії. Розміри плоскої фігури задай в метрах.

**Знайти:**  $X_c$ ,  $Y_c$ .

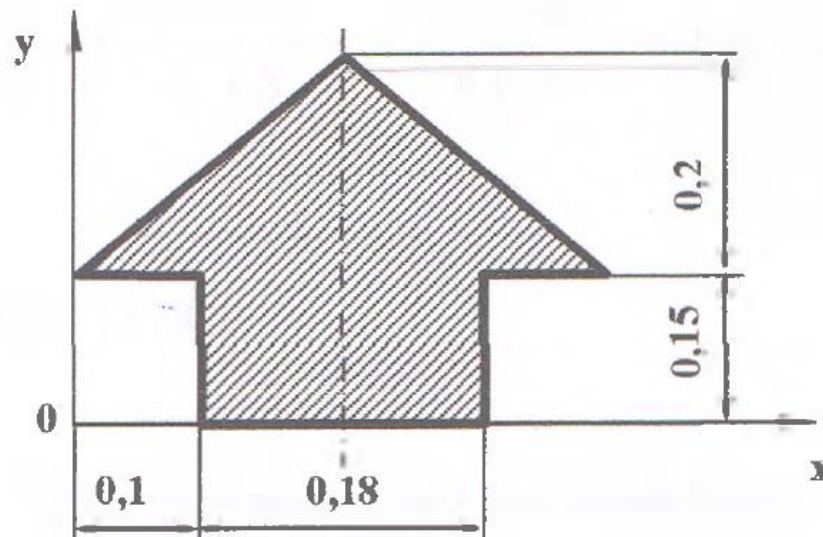


Рисунок 1

### Розв'язання

Координати центра ваги площини:

$$X_c = \frac{\sum F_i X_i}{F};$$

$$Y_c = \frac{\sum F_i Y_i}{F}.$$

Визначимо площу фігури, яка складена з трикутника  $F_1$  і прямокутника  $F_2$ :

$$S_1 = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot 0,38 = 0,038 \text{ м}^2 - \text{площа трикутника};$$

$$S_2 = 0,18 \cdot 0,15 = 0,027 \text{ м}^2 - \text{площа прямокутника}.$$

Центри ваги фігур:

трикутника  $X_1 = 0,190 \text{ м}$ ,  $Y_1 = 0,2167 \text{ м}$

прямокутника  $X_2 = 0,19 \text{ м}$ ,  $Y_2 = 0,075 \text{ м}$ .

$$X_c = \frac{S_1 X_1 + S_2 X_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,01235}{0,065} = 0,190 \text{ м};$$

$$Y_c = \frac{S_1 Y_1 + S_2 Y_2}{S_1 + S_2} = \frac{0,0102596}{0,065} = 0,1578 \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $X_c = 0,19 \text{ м}$ ;  $Y_c = 0,1578 \text{ м}$ .

Завдання. Визначити положення центра ваги площі фігури. Розміри подано в сантиметрах.

Варіант № 1, 4, 7.

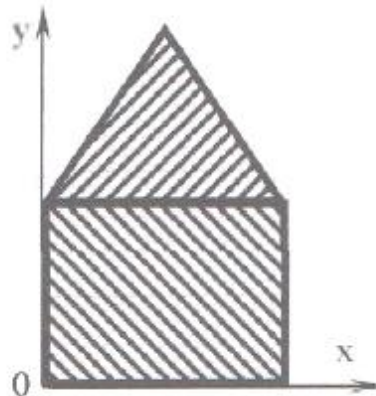


Рис. 1

Варіант № 2, 5, 8.

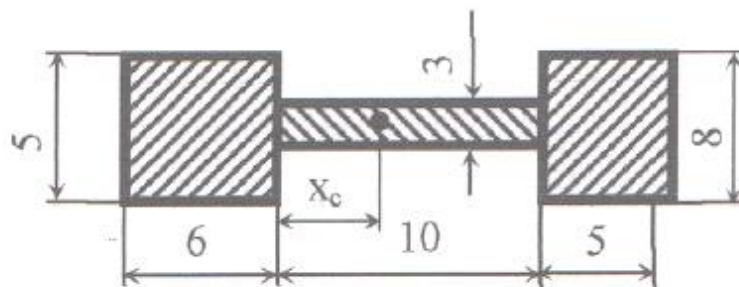


Рис. 2



Варіант № 3, 6, 9.

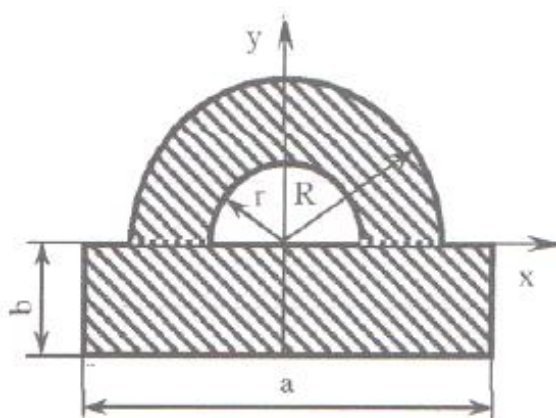


Рис. 3

Вихідні дані:  $a = 14$  см,  $b = 3$  см,  $R = 6$  см,  $r = 4$  см.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА. ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ

### Тема 8. Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Основні задачі кінематики.
2. Векторний спосіб завдання руху точки (траєкторія руху, вектори швидкості і прискорення).
3. Координатний та природний способи завдання руху.
4. Поступальний рух.
5. Кутова швидкість, кутове прискорення. Швидкість і прискорення точки тіла, що обертається.

2. Індивідуальне тестування.

#### Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Нехай рух точки у площині  $Oxy$  заданий рівняннями:

$$x = 2t; \quad y = 12t^2.$$

Знайти траєкторію руху точки та векторне рівняння.

#### *Розв'язання*

1) Траєкторію можна знайти, задаючи різні моменти часу та зображуючи координати  $x$ ,  $y$  точки на графіку;

2) Траєкторію можна також знайти, виключивши  $t$  із рівнянь руху. З першого рівняння  $t = x/2$ . Тоді, після підстановки в друге рівняння  $y = 3t^2$ . Векторне рівняння запишеться таким чином:

$$\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + 12t^2 \cdot \vec{j}.$$

**Приклад 2.** За рівняннями руху точки  $x = 3 \sin t$ ;  $y = 3 \cos t$  ( $x$  і  $y$  – в см,  $t$  – в сек). Знайти рівняння її траєкторії.

**Розв'язання**

Рівняння траєкторії дістанемо, вилучивши час  $t$  з рівнянь руху:

$$\sin t = x/3; \quad \cos t = y/3.$$

Підносячи до квадрата і додаючи окремо ліві і праві частини, матимемо:

$$1 = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2}, \text{ або } x^2 + y^2 = 3.$$

Отже, рівняння траєкторії буде рівнянням кола радіусом  $R = 3$  см.

**Приклад 3.** Палець кривошипа парової машини рухається відповідно до рівнянь:  $X = 50 \cos 3\pi t$ ;  $y = 50 \sin 3\pi t$  ( $x$  і  $y$  – в см,  $t$  – в сек).

Визначити швидкість пальця.

**Розв'язання**

Визначимо проєкції швидкості пальця на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -150\pi \sin 3\pi t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 150\pi \cos 3\pi t.$$

Модуль швидкості пальця  $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 150\pi$ .

**Приклад 4.** Точка на ободі маховика в період розгону рухається згідно з рівнянням  $S = 0,1t^3$  ( $t$  – в сек,  $S$  – в м).

Радіус маховика дорівнює  $R = 0,5$  м. Визначиш дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість  $V = 30$  м/с.

**Розв'язання**

Рівняння руху точки задане природним способом, тому швидкість точки визначаємо за формулою:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,1t^3) = 0,3t^2.$$

Підставляючи числове значення швидкості (з умови) визначаємо момент часу, для якого треба знайти прискорення:

$$30 = 0,3t^2, \quad \text{звідки } t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10\text{с.}$$

Дотичне прискорення дорівнює:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3t^2) = 0,6t = 6\text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(0,3t^2)^2}{0,5} = 180\text{ м/с}^2.$$

Знак "+" перед дотичним прискоренням означає, що маховик дійсно знаходиться в стані розгону.

### **Тема 9. Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі**

*1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Основні властивості плоско-паралельного руху твердого тіла.
2. Теорема про проекціях швидкостей двох точок плоскої фігури.
4. Миттєвий центр швидкостей.
5. Миттєвий центр прискорень. Наведіть приклади.

*2. Індивідуальне тестування.*

#### **Приклад розв'язування задач.**

**Приклад 1.** Барабан починає обертатись з стану спокою з кутовим прискоренням  $\varepsilon = 7,5$  рад/с<sup>2</sup>. Знайти кутову швидкість барабана до кінця п'ятнадцятої секунди. Визначити, скільки обертів зробив барабан за 15 секунд.

#### **Розв'язання**

Оскільки кутове прискорення барабана стало додатне, то його обертання буде рівноприскореним. Кутова швидкість і кут повороту визначають за формулами:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки барабан починає обертатись із стану спокою, то його початкова кутова швидкість і початковий кут повороту дорівнюють нулю:

$\omega_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = 0$ . Тому кутова швидкість до кінця п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t = 7.5 \cdot 15 = 112,5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Кут повороту за 15 секунд дорівнює:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7.5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{рад}.$$

Щоб знайти загальне число обертів, скористаємось формулою:

$$\varphi = N_{\text{заг}} \cdot 2\pi.$$

Звідси число обертів барабана за 15 с дорівнює:

$$N_{\text{заг}} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} \cong 134 \text{об}.$$

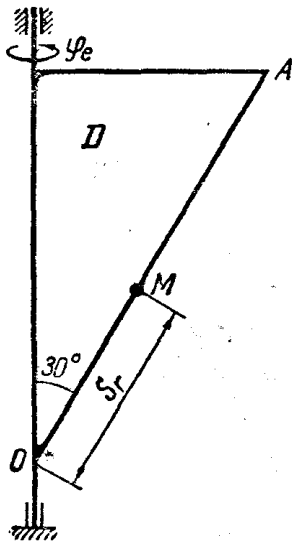
### **Тема 10. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки**

*1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Складне рух точки. Абсолютна і відносна рух точки. Переносний рух.
2. Теорема про складання швидкостей. Теорема Коріоліса про складання прискорень.
3. Визначення прискорення Коріоліса. Правило Жуковського.
4. Складне рух твердого тіла. Обертання навколо паралельних осей. Формула Вілліса.
5. Обертання навколо пересічних осей.

*2. Індивідуальне тестування.*

**Приклад.** Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки



$$s_r = OM = 16 - 8 \cos 3\pi t \text{ cm}; \quad \varphi_e = 0,9t^2 - 9t^2 \text{ рад}; \quad t_1 = 2/9 \text{ с.}$$

### Розв'язання

Будемо вважати, що положення точки М на тілі D визначається відстанню  $s_r = OM$ .

При  $t = 2/9 \text{ с}$

$$s_r = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot 2/9) = 20,0 \text{ см.}$$

Рисунок 1,а. Рух точки М відносно тіла D

Абсолютну швидкість точки М знайдемо як геометричну суму відносної та переносної швидкостей:

$$\vec{v} = v_r + v_e.$$

Модуль відносної швидкості  $v_r = |\vec{v}_r|$ ,

де  $v_r = ds_r / dt = 24\pi \sin 3\pi t$ .

При  $t = 2/9 \text{ с}$

$$\tilde{v}_r = 65,2 \text{ см/с}; \quad v_r = 65,2 \text{ см/с.}$$

Знак "+" у  $\tilde{v}_r$  показує, що вектор  $\tilde{v}_r$  спрямований у напрямі зростання  $s_r$ .

Модуль переносної швидкості тіла:  $v_e = R\omega_e$ ,

де  $R$  – радіус кола  $L$ , яке описує та точка тіла, з якою у цей час співпадає точка М,  $R = s_r \sin 30^\circ = 10,0$ ;  $\omega_e$  – модуль кутової швидкості тіла:

$$\omega_e = |\tilde{\omega}_e|; \quad \tilde{\omega}_e = d\varphi / dt = 1,8t - 27t^2.$$

При  $t = 2/9 \text{ с}$

$$\omega_e = -0,93 \text{ рад/с}; \quad \omega_e = 0,93 \text{ рад/с.}$$

Знак "-" у величині  $\tilde{\omega}_e$  показує, що обертання трикутника відбувається навколо вісі  $Oz$  у бік, зворотній напрямленню відлику кута  $\varphi$ . Тому вектор  $\tilde{\omega}_e$  направлений по вісі  $Oz$  вниз (рисунок 16.4,б).

Модуль переносної швидкості, за формулою (1),

$$v_e = 9,3 \text{ см/с.}$$

Вектор  $\vec{v}_e$  направлений по дотичній до кола L у бік обертання тіла. Бо  $\vec{v}_e$  та  $\vec{v}_r$  взаємно перпендикулярні, модуль абсолютної швидкості точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2},$$

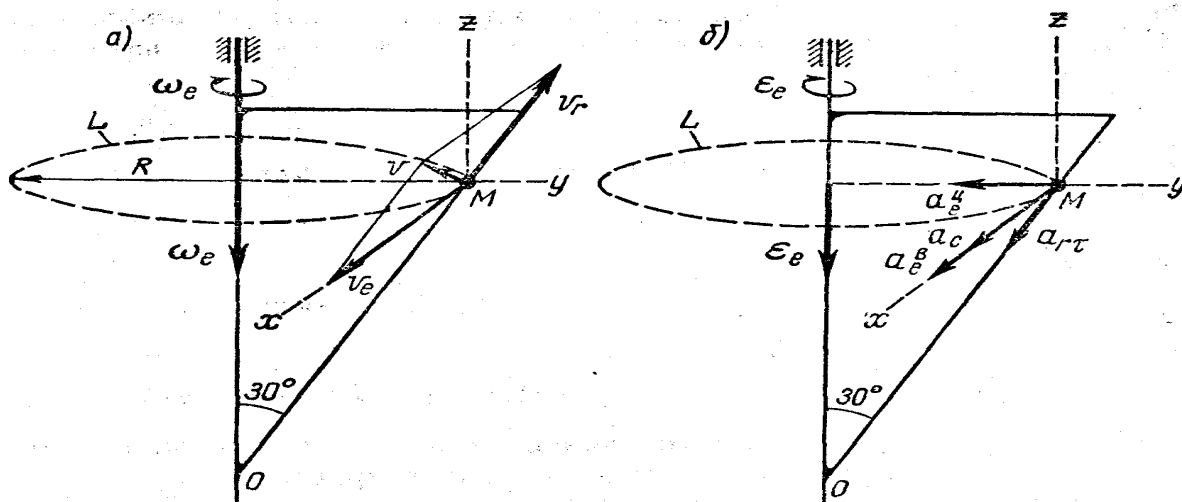


Рис. 2,б. Кінематичні характеристики руху

або

$$v = 65,9 \text{ см/с.}$$

Абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі відносного, переносного та коріолісова прискорень:  $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ ,

або в розгорнутому вигляді

$$\vec{a} = \vec{a}_{r\tau} + \vec{a}_{rm} + \vec{a}_e^B + \vec{a}_e^y + \vec{a}_c.$$

Модуль відносного дотичного прискорення:

$$a_{r\tau} = |\tilde{a}_{r\tau}|,$$

де

$$\tilde{a}_{r\tau} = d^2 s_r / dt^2 = 72\pi^2 \cos 3\pi t.$$

При  $t = 2/9$  с

$$\tilde{a}_{r\tau} = -355 \text{ см/с}^2; \quad a_{r\tau} = 355 \text{ см/с}^2.$$

Знак “-“ при  $\tilde{a}_{r\tau}$  показує, що вектор  $\vec{a}_{r\tau}$  спрямований у бік негативних значень  $s_r$ . Знаки  $\tilde{v}_r$  та  $\tilde{a}_{r\tau}$  однакові; отже, відносний рух точки М прискорений.

Відносне нормальне прискорення:

$$a_{rn} = v_r^2 / \rho = 0,$$

так як траєкторія відносного руху – пряма ( $\rho = \infty$ ).

Модуль переносного обертального прискорення:

$$a_e^B = R \varepsilon_e,$$

де  $\varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|$  – модуль кутового прискорення тіла D:

$$\tilde{\varepsilon}_e = d^2 \varphi_e / dt^2 = 1,8 - 54t.$$

При  $t = 2/9$  с

$$\tilde{\varepsilon}_e = -10,2 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_e = 10,2 \text{ рад/с}^2.$$

Знаки  $\tilde{\varepsilon}_e$  и  $\tilde{\omega}_e$  однакові; отже, обертання трикутника D прискорене, напрямлення векторів  $\tilde{\omega}_e$  та  $\tilde{\varepsilon}_e$  співпадають (рисунок 16.4, а, б).

$$a_e^B = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{a}_e^B$  спрямований у той же бік, що і  $\vec{v}_e$ .

Модуль переносного доцентрового прискорення:

$$a_e^y = R \omega_e^2 \text{ або } a_e^y = 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $a_e^y$  спрямований до центру кола L.

Коріолісово прискорення:  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ .

Модуль коріолісова прискорення  $a_c = 2\omega_e v_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r)$ ,

де  $\sin(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = \sin 150^\circ = 0,5$ .

З врахуванням знайдених вище значень  $\omega_e$  та  $v_r$  одержуємо:

$$a_c = 61 \text{ см/с}^2.$$

Вектор  $\vec{a}_c$  направлений згідно правилу векторного добутку (рис. 2, б).

Модуль абсолютного прискорення точки М знаходимо способом проєкцій:

$$a_x = a_e^B + a_c; \quad a_y = -a_e^y - a_{r\tau} \cos 60^0;$$

$$a_z = -a_{r\tau} \cos 30^0; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Результати розрахунку зведені в табл. 1.

Таблиця 1 Результати розрахунку

$\tilde{\omega}_e$ рад/с	Швидкість, см/с			$\tilde{\varepsilon}_e$ рад/с <sup>2</sup>	Прискорення, см/с <sup>2</sup>								
	$v_e$	$\tilde{v}_r$	$v$		$a_e^y$	$a_y^b$	$a_{rn}$	$\tilde{a}_{r\tau}$	$a_c$	$a_x$	$a_y$	$a_z$	$a$
-0,93	9,3	65,2	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	163	-186	308	395

### Тема 11. Застосування теореми про рух центра мас механічної системи.

1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:

1. Закони класичної механіки.
2. Інерційна система відліку.
3. Завдання динаміки.
4. Основні задачі динаміки точки.
6. Вирішення другого завдання динаміки точки.

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

#### Приклад розв'язування задач.

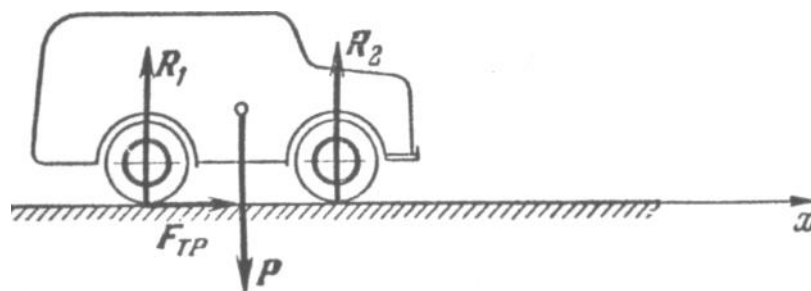
**Приклад 1.** При польоті снаряда у безповітряному просторі центр мас снаряда описує параболу. Чи зміниться траєкторія центра мас, якщо снаряд під час польоту розірветься на кілька осколків?

#### Розв'язання

Розрив снаряда відбувається під дією внутрішніх сил, що безпосередньо не впливають на рух центра мас системи. Отже, осколки снаряда повинні переміщатися так, щоб центр мас снаряда, що розірвався, рухався по тій же траєкторії, тобто по параболі.



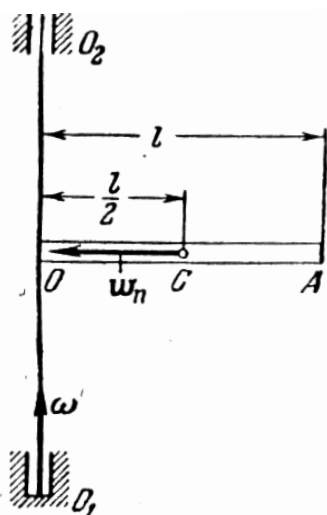
**Приклад 2.** Яка сила надає руху центру мас автомашини, яка рухається по негладкій горизонтальній дорозі?



### Розв'язання

Часто помилково думають, що центр мас автомашини безпосередньо приводиться в рух силою тиску газів у циліндрах двигуна. Ця сила, будучи внутрішньою, на рух центра мас автомашини прямо не впливає. Під дією цієї сили виникають обертаючі моменти, прикладені до ведучих коліс. У результаті з'являються сили тертя  $F_{тр}$  між покриттями ведучих коліс автомашини та землею, спрямовані по горизонталі у бік руху автомашини (силами тертя між покриттями ведених коліс та землею зневажаємо).

Сила тертя, будучи зовнішньою стосовно автомашини, надає руху її центру мас  $C$ . Дійсно, записавши теорему про рух центра мас системи у проекції на вісь  $x$ , одержимо  $Mx''_c = F_{тр}$  (зовнішні сили  $P$ ,  $R_1$ , і  $R_2$  перпендикулярні до осі  $x$ , і їхні проекції на цю вісь дорівнюють нулю), тобто  $x_c > 0$ ; якщо в початковий момент центр мас  $C$  був у спокої, тоді він буде переміщатися прискорено по горизонталі праворуч.



**Приклад 3.** Тонкий однорідний стрижень  $OA$  довжиною  $l$  і вагою  $P$  обертається навколо вертикальної осі  $O_1O_2$  з сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Визначити головний вектор зовнішніх сил. Масою осі  $O_1O_2$  зневажити.

### Розв'язання

Відповідно до теореми про рух центра мас системи матеріальних точок  $M\omega_c = \sum_{k=1}^n F_k^e$ , для визначення  $k = 1$  головного вектора зовнішніх

сил системи  $V^e = \sum_{k=1}^n F_k^e$  досить знайти  $M\omega_c$ . Тому що центр мас стрижня знаходиться у точці  $C$  на відстані  $l/2$  від осі обертання і має, у силу сталості вектора  $\omega$ , тільки доцентрове прискорення  $\omega_n = OC\omega^2 = l/2\omega^2$ , яке спрямовано уздовж стрижня від  $C$  до  $O$ , тоді головний вектор зовнішніх сил системи  $V^e$

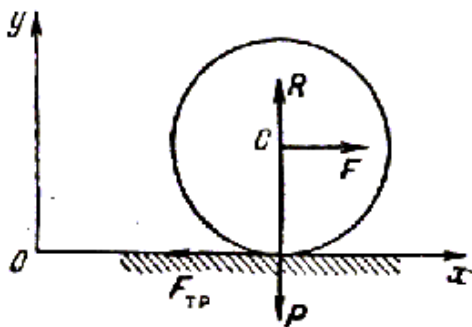
має той же напрямок і дорівнює за модулем:  $V^e = M\omega_c = \frac{P}{g} \frac{l}{2} \omega^2$ .

У даному випадку головний вектор зовнішніх сил є векторною сумою ваги стрижня і реакцій опор  $O_1$  та  $O_2$ .

**Приклад 4.** Колесо вагою  $P$  котиться з ковзанням по прямолінійній горизонтальній рейці під дією сталої сили  $F$ , прикладеної до його центра ваги  $C$ .

Знайти швидкість центра мас  $C$  колеса, якщо в початковий момент воно знаходилося в спокої. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

### Розв'язання



До колеса прикладені зовнішні сили:  $P$  - його вага,  $F$  - рушійна сила,  $R$  - нормальна реакція рейки,  $F_{тр}$  - сила тертя ковзання, спрямована уздовж рейки у бік, протилежний силі  $F$ .

Застосуємо теорему про рух центра мас у проекціях на осі  $x$  та  $y$ .

$$Mx_c = F - F_{тр}$$

$$My_c = R - P.$$

При русі колеса  $y_c = r = \text{const}$ . Тому

$$y_c = 0 \text{ і } R = P.$$

Так як при коченні колеса з ковзанням сила тертя досягає свого найбільшого значення, тоді  $F_{тр} = fR$ . Отже  $F_{тр} = fP$ .

Одержуємо:

$$\ddot{x}_c = g \frac{F - fP}{P}.$$

Перший інтеграл диференціального рівняння має вид:

$$\dot{x}_c = g \frac{F - fP}{P} t + C_1.$$

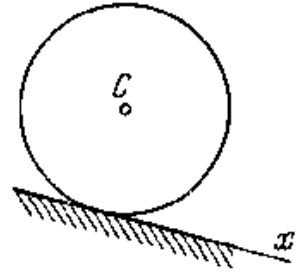
З початкової умови  $t = 0$ ,  $x_c = 0$  (колесо в початковий момент знаходилося в спокої)  $C_1 = 0$ . Одержимо шуканий закон зміни проекції швидкості центра мас  $C$  колеса:

$$\dot{x}_c = g \frac{F - fP}{P} t.$$

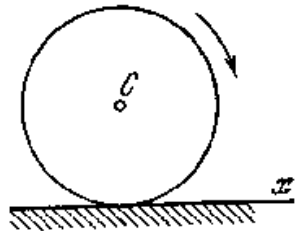
Рух колеса можливий при наявності нерівності  $F > fP$ .

### Завдання.

Варіант №1, 4. Визначити головний вектор зовнішніх сил, що діють на колесо маси  $M$ , яке скочується з похилої площини вниз, якщо його центр мас  $C$  рухається за законом  $x_c = \frac{at^2}{2}$ .

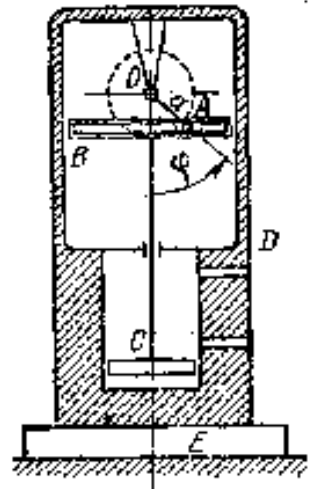


Варіант №2, 5. Колесо котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією прикладеного до нього обертаючого моменту. Знайти закон руху центра мас  $C$  колеса, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ . У початковий момент колесо знаходилося у стані спокою.



Варіант № 2, 6. Визначити силу тиску на ґрунт насоса для відкачки води при його роботі вхолосту, якщо маса нерухомих частин корпусу  $O$  і фундаменту  $E$  дорівнює  $M_1$ , маса кривошипа  $OA = a$  дорівнює  $M_2$ , маса куліси  $B$  і поршня  $C$  дорівнює  $M_3$ .

Кривошип  $OA$ , що обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$ , вважати однорідним стрижнем.



### **Тема 12. Застосування теореми про зміну кількості руху точки.**

1. *Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Збереження моменту кількості руху точки в разі центральної сили.
2. Робота сил тяжіння, пружності, тяжіння на кінцевому переміщенні.
3. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.
4. Поняття про силове поле.
5. Потенційна енергія.
6. Маса, центр мас системи і його визначення.
7. Класифікація сил (внутрішні та зовнішні сили).
8. Момент інерції системи (твердого тіла щодо осі, радіус інерції).

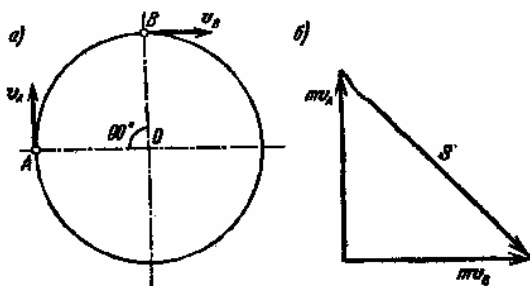
## 9. Теорема Гюйгенса.

2. Індивідуальне тестування.

3. Практичні завдання.

### Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Матеріальна точка маси  $m$  рухається рівномірно по окружності зі швидкістю  $v$  під дією деякої системи сил.



Визначити імпульс рівнодіючої цієї системи сил при переміщенні матеріальної точки по дузі чверті окружності з точки  $A$  в точку  $B$ .

Рішення: Застосовуємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки:

$$m\mathcal{Q}_2 - m\mathcal{Q}_1 = S.$$

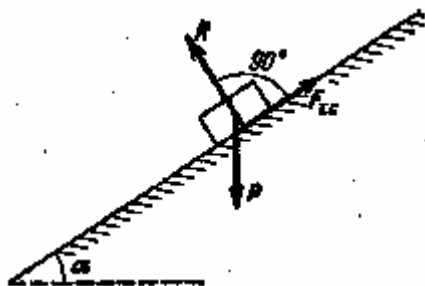
$$m\mathcal{Q}_2 = m\mathcal{Q}_B, \text{ а } m\mathcal{Q}_1 = m\mathcal{Q}_A, \text{ тоді } S = m\mathcal{Q}_B - m\mathcal{Q}_A.$$

Побудувавши вектори кількостей руху  $mv_B$  і  $mv_A$  з однієї точки, знаходимо їхню різницю, яка дорівнює імпульсу рівнодіючої сили  $S$ . Так як точка рухається рівномірно, тоді  $|v_B| = |v_A| = v$ , тобто  $|S| = mv\sqrt{2}$ .

**Приклад 2.** Вантаж спускається вниз по шорсткій похилій площині, яка розташована під кутом  $\alpha$  до обр'їу;  $f$  — коефіцієнт тертя ковзання вантажу об похилу площину. У початковий момент часу швидкість вантажу дорівнювала  $v$ . Через який проміжок часу швидкість вантажу подвоїться?

#### Розв'язання

Зобразимо сили, прикладені до вантажу:  $P$  — вага вантажу,  $R$  — нормальна реакція площини,  $F_{\text{тс}}$  — сила тертя ковзання вантажу об площину, причому  $F_{\text{тс}} = fN = fP \cos \alpha$ .



Спрямуємо вісь  $x$  уздовж похилої площини вниз.

Запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в проекції на вісь  $x$ :

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}.$$

Відповідно до умови задачі,  $v_{1x} = v$ ,  $v_{2x} = 2v$ .

Тому, що всі сили, прикладені до

вантаж, сталі, тоді

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k) = \sum_{k=1}^n F_{kx} \Delta t = (P \sin \alpha - F_{mp}) \Delta t = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

де  $\Delta t$  -шуканий проміжок часу.

Отже,

$$2mv - mv = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Delta t,$$

відкіля:

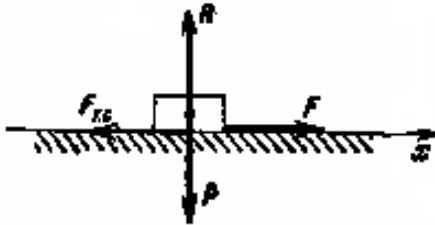
$$\Delta t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

**Приклад 3.** Тверде тіло вагою  $P$  починає рухатися зі стану спокою по шорсткій горизонтальній площині під дією сили  $F$ , пропорційної часу:  $F=at$ , де  $a$ -постійна.

Яку швидкість придбає тіло через  $t$  секунд після початку руху, якщо коефіцієнт тертя ковзання тіла об горизонтальну площину дорівнює  $f$ ?

Рішення. Зобразимо сили, прикладені до тіла:  $P$  — вага тіла,  $F$  - рухома сила, яка дорівнює за модулем  $F=at$ ,  $R$ -нормальна реакція горизонтальної площини,  $F_{тр}$ - сила тертя ковзання тіла об горизонтальну площину, причому  $F_{mp} = fP$ .

Спрямуємо вісь  $x$  по горизонталі праворуч. Запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в проекції на вісь  $x$ :



$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum_{k=1}^n S_x(F_k).$$

За умовою  $v_{1x}=0$ , тому, що в початковий момент тіло знаходилося в спокої;  $v_{2x}=v_x$ , де  $v_x$  - проекція шуканої швидкості на вісь  $x$ . Сума проекцій імпульсів усіх сил на вісь  $x$  дорівнює:

$$\sum_{k=1}^n S_x(F_k) = \int_0^t F dt - F \cdot t = \int_0^t at dt - fPt = \frac{at^2}{2} - fPt.$$

Отже:

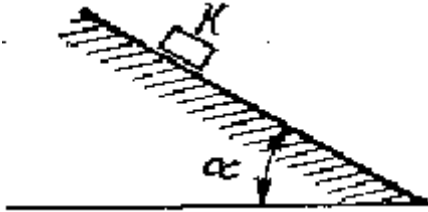
$$\frac{P}{g} v_x = \frac{at^2}{2} - fPt,$$

Отже

$$v_x = gt \left( \frac{at}{2P} - f \right).$$

### Завдання.

Варіант № 1, 8. Тіло К знаходиться на шорсткій похилій площині в спокої. Кут нахилу площини до обрію  $\alpha$  і  $f_0 > \operatorname{tg} \alpha$ , де  $f_0$  — коефіцієнт тертя спокою. У деякий момент часу тілу додана початкова швидкість  $V_0$ , спрямована уздовж площини вниз. Визначити шлях  $s$ , пройдений тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя при русі дорівнює  $f$ .



Варіант № 2, 5. Снаряд маси 24 кг вилітає зі стовбура знаряддя зі швидкістю 500 м/с. Довжина стовбура знаряддя 2 м. Яке середнє значення тиску газів на снаряд?

Варіант № 3, 6. Матеріальна точка маси 3 кг рухалася по горизонтальній прямій ліворуч зі швидкістю 5 м/с. До точки приклали сталу силу, спрямовану праворуч. Дія сили припинилася через 30 с, і тоді швидкість точки виявилася рівною 55 м/с і спрямованою праворуч. Знайти величину цієї сили і зроблену нею роботу.

Варіант № 4, 7. Залізничний потяг рухається по горизонтальній і прямолінійній ділянці шляху. При гальмуванні розвивається сила опору, яка дорівнює 0,1 ваги потяга. У момент початку гальмування швидкість потяга дорівнює 20 м/с. Знайти час гальмування і гальмовий шлях.

### **Тема 13. Дослідження теореми про зміну кінетичної енергії точки і механічної системи**

*1. Обговорення основних положень теми та питань самостійного вивчення:*

1. Теорема про рух центру мас.
2. Теорема про зміну кількості руху.
3. Наведіть приклад щодо зміни кінетичного моменту механічної системи.
4. Теорема про зміну кінетичної енергії системи.
5. Диференціальні рівняння руху твердого тіла:
6. Принцип Даламбера.

*2. Індивідуальне тестування.*

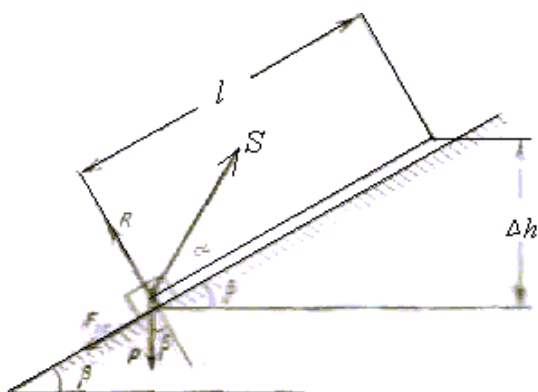
*3. Практичні завдання.*

## Приклад розв'язування задач.

**Приклад 1.** Вантаж вагою  $P=20\text{ Н}$  за допомогою троса піднімається по похилій площині, розташованій під кутом  $\alpha=30^\circ$  до площини. Похила площина утворює кут  $\beta=30^\circ$  з обрієм. Натяг троса  $S=15\text{ Н}$ . У початковому положенні вантаж знаходиться в спокої.

Знайти величину переміщення  $l$  вантажу уздовж похилої площини в момент, коли вантаж має швидкість  $v = 2\text{ м/сек}$ . Коефіцієнт тертя ковзання вантажу об похилу площину  $f$  дорівнює  $0,2$ .

Рішення. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:



$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k).$$

До вантажу прикладена:  $P$  - вага вантажу,  $S$  - реакція троса,  $R$  - нормальна реакція похилої площини,  $F_{т.с}$  - сила тертя ковзання вантажу об похилу площину, причому  $F_{т.с} = f(P \cos \beta - S \sin \alpha)$ .

Обчислимо суму робіт цих сил на переміщенні вантажу, яке дорівнює  $l$ :

$$\Sigma A(F_k) = A(P) + A(S) + A(R) + A(F_{т.с})$$

Робота сили ваги негативна, тому що вантаж піднімається на гору:

$$A(P) = -P\Delta h = -Pl \sin \beta.$$

Робота реакції троса  $S$  дорівнює

$$A(S) = Sl \cos \alpha$$

Робота нормальної реакції  $R$  похилої площини дорівнює нулю, тому що сила  $R$  перпендикулярна до переміщення  $l$ :

$$A(R) = 0$$

Робота сили тертя ковзання  $F_{т.с}$  негативна, тому що кут між напрямками сили  $F_{т.с}$  і переміщенням  $l$  дорівнює  $180^\circ$ :

$$A(F_{т.с}) = -F_{т.с} l = -f(P \cos \beta - S \sin \alpha)l$$

Після підстановки значень  $A(P)$ ,  $A(S)$ ,  $(R)$ ,  $A(F_{т.с})$  з формул (3), (4), (5) і (6) у (2) знаходимо суму всіх сил, прикладених до вантажу, на переміщенні  $l$ :

$$\Sigma A(F_k) = [S(\cos\alpha + f \sin\alpha) - P(\sin\beta + f \cos\beta)]l$$

Переходимо до обчислення зміни кінетичної енергії вантажу на його переміщенні  $l$ . У початковому положенні вантаж знаходився в спокої, отже,  $T_1 = 0$ . У кінцевому положенні вантаж придбав швидкість  $v$ , тобто

$$T_2 = \frac{1}{2} P g^2.$$

Отже,

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} P g^2.$$

Підставивши значення  $\Sigma A(F_k)$  і  $T_2 - T_1$  визначимо шукане переміщення:

$$l = \frac{P g^2}{2g|S(\cos\alpha + f \sin\alpha) - P(\sin\beta + f \cos\beta)|}.$$

Після підстановки чисельних даних знаходимо, що  $l = 3,92$  м.

**Приклад 2.** Вантаж вагою  $P$  робить вільні коливання на підвішеній до стелі пружині, коефіцієнт пружності (твердості) якої дорівнює  $c$ . Вантажу, що знаходився в положенні статичної рівноваги, повідомлена за допомогою поштовху швидкість  $v$ .

Визначити швидкість вантажу  $v$  у залежності від його зсуву з положення статичної рівноваги й амплітуду коливань вантажу.

#### **Розв'язання**

Застосовуємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі:

$$\frac{1}{2} m g_2^2 - \frac{1}{2} m g_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k).$$

Вісь  $x$  направляємо уздовж осі пружини вниз, вибравши початок відліку в положенні статичної рівноваги вантажу, тобто коли пружина має статичне подовження:

$$\Delta_{c1} = \frac{P}{c}.$$

Зображуємо вантаж у положенні, зміщеному з початку відліку на  $x$ . До вантажу прикладена:  $P$  — вага вантажу,  $f$  — сила пружності пружини,  $f = c|\Delta|$ . Тому що подовження пружини при даному положенні вантажу дорівнює

$$\Delta = \Delta_{ст} + x$$

тоді



$$F_x = -c(\Delta_{ст} + x).$$

Обчислимо суму робіт сил, прикладених до вантажу на його переміщенні, яке дорівнює  $x$

$$\sum A(F_k) = A(P) + A(F).$$

Робота сили ваги при переміщенні вантажу з нуля вниз на  $x$  дорівнює

$$A(P) = P x$$

Як відомо з теорії коливань матеріальної точки,  $cg/P = k^2$ , де  $k$  - кругова частота коливань вантажу. Отже, остаточно

$$v = \sqrt{(v_o^2 - k^2 x^2)}$$

Амплітуда  $a$  вільних коливань вантажу легко визначається тому що при відхиленні вантажу в крайні положення  $x = \pm a$  його швидкість звертається в нуль.

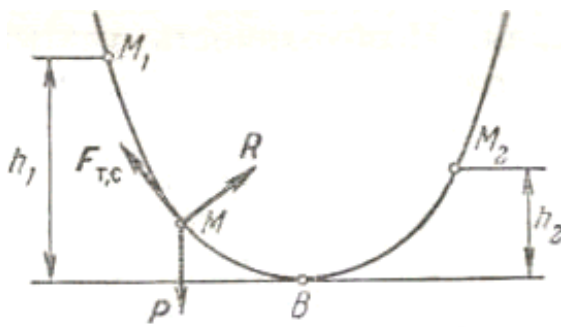
Отримаємо

$$a = \frac{g_o}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{cg}{P}}.$$

**Приклад 3.** Кільце вагою  $P$ , надягнуте на дріт, починає ковзати зі стану спокою з висоти  $h_1$ . Пройшовши нижчу точку  $B$  кільце піднімається по дроті нагору на висоту  $h_2$ , причому  $h_2 < h_1$ .

Обчислити роботу сили тертя ковзання при переміщенні кільця з положення  $M_1$  у  $M_2$ .

### Розв'язання



Безпосереднє обчислення шуканої роботи сили тертя ковзання неможливо, тому що сила тертя пропорційна нормальній реакції дроту, що у свою чергу залежить від перемінної швидкості кільця. Для визначення швидкості кільця довелося б скласти диференціальне рівняння руху в проекціях на натуральні осі. Разом з тим дана задача вирішується

надзвичайно просто за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки:

$$\frac{1}{2} m g_2^2 - \frac{1}{2} m g_1^2 = \sum_{k=1}^n A(F_k).$$

У нашому випадку початкова і кінцева швидкості кільця дорівнюють нулю, тобто

$$v_1 = v_2 = 0$$

До кільця прикладені три сили:  $P$  - вага кільця,  $R$  - нормальна реакція,  $F_{T.C}$  - сила тертя ковзання. Тому

$$\sum A(F_k) = A(P) + A(R) + A(F_{T.C}) = P(h_1 - h_2) + A(F_{T.C}).$$

Знайдемо шукану роботу сили тертя

$$A(F_{T.C}) = -P(h_1 - h_2).$$

**Приклад 4.** Застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі, вивести диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

#### *Розв'язання*

Звичайно в курсах теоретичної механіки диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі виводиться за допомогою теореми про зміну головного моменту кількостей руху. Разом з тим можна, минаючи цю теорему, одержати шукане рівняння за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі:

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_k$$

У даному випадку кінетична енергія дорівнює

$$T = \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}^2,$$

де  $I_z$  — момент інерції твердого тіла відносно його осі обертання  $z$ , а

$$\varphi = \omega_z,$$

де  $\omega$  — кутова швидкість твердого тіла.

Як відомо, елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $z$ , обчислюється за формулою

$$\delta A = m_z^e d\varphi = \left[ \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) \right] d\varphi,$$

де  $d\varphi$  — елементарне кутове переміщення твердого тіла (нагадаємо, що сума робіт внутрішніх сил у твердому тілі дорівнює нулю).

Знайдемо:

$$I_z \dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \left[ \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e) \right] d\varphi.$$

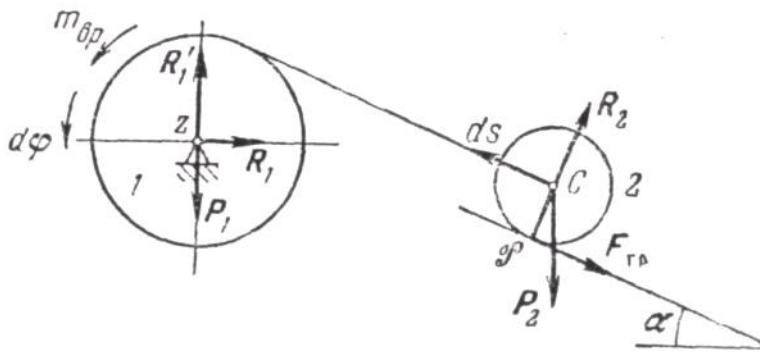
Помітивши, що  $\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} d\varphi = \ddot{\varphi} d\varphi$ ,

Одержимо шукане диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

**Приклад 5.** Обертаючий момент  $m_{\text{op}}$  надає рух барабану  $I$  вагою  $P$  і радіуса  $r_1$  навколо нерухомої осі  $z$ , перпендикулярної до площини рисунка. На бічну

поверхню барабана намотується нитка, що надає руху ковзанці 2 вагою  $P_2$ . Ковзанка котиться без ковзання нагору по похилій площині, розташованій під кутом  $\alpha$  до обрію.



Застосувавши теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі, визначити кутове прискорення барабана. Ковзанку і барабан вважати однорідними круглими циліндрами. Тертям зневажити.

Рішення. Для застосування теореми про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі обчислимо кінетичну енергію  $T$  даної системи, виразивши її в залежності від кутової швидкості барабана  $\dot{\varphi}_1$ .

$$dT = \sum_{k=1}^n \delta A_k$$

Маємо:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)}$$

де  $T^{(1)}$  і  $T^{(2)}$  — відповідно кінетична енергія барабана 1 і ковзанки 2.

Барабан 1 обертається навколо нерухомої осі  $z$ , тому  $T^{(1)} = (1/2)I_{1z}\dot{\varphi}_1^2$

Прийнявши в увагу, що

$$I_{1z} = \frac{P_1 r_1^2}{2g},$$

запишемо:

$$T^{(1)} = \frac{P_1 r_1^2}{4g} \dot{\varphi}_1^2.$$

Колесо 2 робить плоский рух, тому

$$T^{(2)} = (1/2)P_2/g v_c^2 + 1/2 I_{2z}\omega_2^2.$$

Врахувавши, що

$$v_c = r_1 \dot{\varphi}_1, \omega_2 = \frac{v_c}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1, I_{2z} = \frac{P_2 r_2^2}{2g},$$

маємо:

$$T^{(2)} = \frac{3}{4} \frac{P_2}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Підставивши значення (3) і (4) у формулу (2), одержимо:

$$T = \frac{P_1 + 3P_2}{4g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Переходимо до обчислення суми елементарних робіт  $\sum_{k=1}^n \delta A_k$  зовнішніх сил даної системи.

Зобразимо зовнішні сили і моменти:  $m_{\text{вп}}$  — обертаючий момент,  $P_1$  — вага барабана,  $P_2$  — вага ковзанки,  $R_1$  і  $R'_1$  — складові реакції нерухомої осі  $z$ ,  $R_2$  — реакція похилої площини,  $F_{\text{тр}}$  — сила тертя ковзанки об похилу площину.

Дамо барабану елементарне кутове переміщення  $d\varphi_1$ . При цьому центр ваги  $S$  ковзанки переміститься на  $ds = r_1 d\varphi_1$ . Елементарна робота зовнішніх сил дорівнює  $\Sigma \delta A_k = m_{\text{вп}} d\varphi_1 - P_2 ds \sin \alpha$ , тобто

$$\Sigma \delta A_k = (m_{\text{вп}} - P_2 r_1 \sin \alpha) d\varphi_1$$

Нагадаємо, що при каченні без ковзання елементарна робота сили тертя  $F_{\text{тр}}$  дорівнює нулю.

Підставивши  $T$  і  $\Sigma \delta A_k$  з формул (5) і (6) у рівняння (1), знайдемо:

$$\frac{P_1 + 3P_2}{2g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 d\varphi_1 = (m_{\text{вп}} - P_2 r_1 \sin \alpha) d\varphi_1.$$

Прийнявши в увагу, що

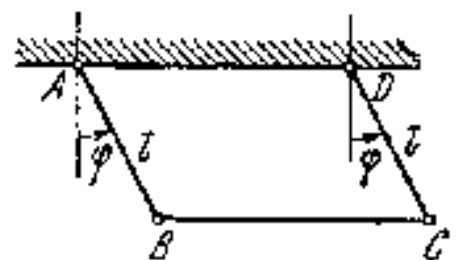
$$\dot{\varphi}_1 d\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} d\varphi_1 = \ddot{\varphi}_1 d\varphi_1,$$

Одержимо

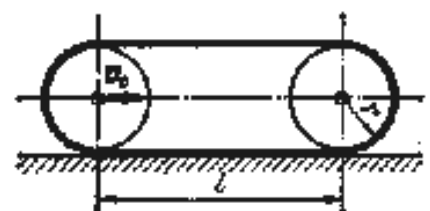
$$\ddot{\varphi}_1 = 2g \frac{m_{\text{вп}} - P_2 r_1 \sin \alpha}{(P_1 + 3P_2) r_1^2}.$$

### Завдання.

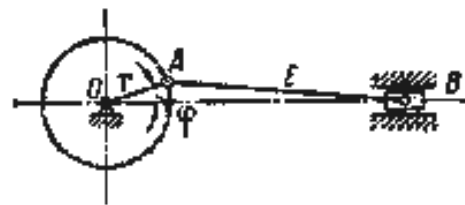
Варіант №1, 4, 7. Обчислити кінетичну енергію плоского механізму, що складається з трьох стрижнів  $AB$ ,  $BP$  і  $CD$ , прикріплених циліндричними шарнірами  $A$  і  $D$  до стелі і з'єднаних між собою шарнірами  $B$  і  $C$ . Маса кожного зі стрижнів  $AB$  і  $CD$  довжини  $l$  дорівнює  $M_1$ , маса стрижня  $BP$  дорівнює  $M_2$ , причому  $BP=AD$ . Стрижні  $AB$  і  $DC$  обертаються з кутовою швидкістю  $\omega$ .



Варіант №2, 5, 8. Обчислити кінетичну енергію гусениці трактора, що рухається зі швидкістю  $v_0$ . Відстань між осями коліс дорівнює  $l$ , радіуси коліс дорівнюють  $r$ , маса одного метра ланцюга дорівнює  $\gamma$ .



Варіант №3, 6, 9. Обчислити кінетичну енергію кривошипно-ползунного механізму, якщо маса кривошипа  $m_1$  довжина кривошипа  $r$ , маса повзуна  $m_2$ , довжина шатуна  $l$ . Масою шатуна зневажити. Кривошип вважати однорідним стрижнем. Кутова швидкість обертання кривошипа  $\omega$ .



**ЧАСТИНА 3.**  
**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ З ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ**  
**РОБОТИ СТУДЕНТІВ**

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

**Тема 1.** Застосування аксіом статички. Проектування сил в площині.

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Що вивчає теоретична механіка**

- A. загальні закони механічного руху макроскопічних матеріальних тіл
- B. найбільш загальні закони і теорії електричної взаємодії
- C. найбільш загальні закони руху та взаємодії планет, а також явища природи
- D. рівновагу твердих тіл, про взаємодію пружних тіл

**Теоретична механіка – наука про**

- A. найбільш загальні закони механічного руху та взаємодії матеріальних тіл
- B. рівновагу твердих тіл, про взаємодію пружних тіл
- C. взаємодію пружних тіл, про рух небесних тіл
- D. властивості сил, умови рівноваги абсолютно твердого тіла

**З деяких розділів складається теоретична механіка**

- A. статика, динаміка, оптика
- B. механіка, динаміка, теоретика
- C. статика, кінематика, динаміка
- D. механіка, оптика, теоретика

**Статика є розділом теоретичної механіки, в якому розглядається**

- A. властивості сил, умови рівноваги абсолютно твердого тіла
- B. умови не рівноваги абсолютно твердого тіла
- C. умови рівноваги абсолютно м'якого тіла
- D. найбільш загальні закони і теорії електричної взаємодії

**Сила**

- A. числове значення
- B. кількісна міра взаємодії матеріальних тіл, що визначає інтенсивність та напрям цієї взаємодії
- C. сукупність сил, що діють на тіло
- D. рух макроскопічних матеріальних тіл

**Сила визначається**

- A. числовим значенням
- B. напрямом дії та точкою прикладання
- C. усі відповіді вірні
- D. статичним значення

**Пряма, за якою напрямлений вектор сили, називається**

- A. прямою сили
- B. перпендикуляром сили
- C. лінією однієї сили
- D. розрядженою силою

**Одиницею сили в системі СІ є**

- A. ампер [А]
- B. ньютон [Н]
- C. вольт [В]

**Сили, які прикладаються до тіла у будь-якій його точці, називаються**

- A. зосередженими силами
- B. розрядженими силами
- C. правильними силами
- D. просторовими силами

**Як називається система сил, коли лінії дії всіх сил перетинаються в одній точці**

- A. плоска
- B. просторова
- C. збіжна
- D. розряджена

**Рекомендована література:**

1. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. –К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1981. – 280 с.

**Тема 2. Визначення сил реакції опор балки.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.



## 2. Розв'яжіть тестові завдання.

### **Система сил**

- A. числове значення
- B. сукупність сил, що діють на тіло
- C. кількісна міра взаємодії матеріальних тіл
- D. матриця сил

### **Кількісна міра взаємодії матеріальних тіл, що визначає інтенсивність та напрям цієї взаємодії**

- A. сила
- B. система сил
- C. матриця сил
- D. комплекс сил

### **Сили, які входять до складу даної системи, називаються**

- A. складовими системи сил
- B. діючими сил
- C. направляючими сили
- D. простими силами

### **Сукупність сил, що діють на матеріальну точку або тіло, утворюють**

- A. систему сил
- B. матрицю сил
- C. площину сил
- D. сітку сил

### **Системи сил бувають**

- A. розбіжними
- B. збіжними
- C. непаралельними
- D. просторовими

### **Плоска система сил – це коли лінії дії всіх сил системи**

- A. лежать в одній площині
- B. розташовані в просторі
- C. перетинаються в одній точці
- D. перетинаються в двох точках

### **Просторова система сил – це коли лінії дії всіх сил системи**

- A. лежать в одній площині
- B. розташовані в просторі
- C. перетинаються в одній точці
- D. перетинаються в двох точках

**Збіжна система сил – це коли лінії дії всіх сил системи**

- A. лежать в одній площині
- B. розташовані в просторі
- C. перетинаються в одній точці
- D. перетинаються в двох точках

**Як називається система сил, коли лінії дії всіх сил системи лежать в одній площині**

- A. плоска
- B. просторова
- C. збіжна
- D. збіжна

**Як називається система сил, коли лінії дії всіх сил розташовані в просторі**

- A. плоска
- B. просторова
- C. збіжна
- D. проста

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. До консольної частини  $AC$  горизонтальної балки  $BC$  прикладено рівномірно розподілене навантаження (рис. 1). Вага навантаження дорівнює  $0,5 \text{ Т}$ . Під кутом  $60^\circ$  до балки прикладено силу  $P = 2\text{Т}$ . Нехтуючи вагою балки, визначити реакції опор.

*Відповідь:*  $R_A = 1,6 \text{ Т}$ ;  $X_B = 1 \text{ Т}$ ;  $Y_B = 0,732 \text{ Т}$ .

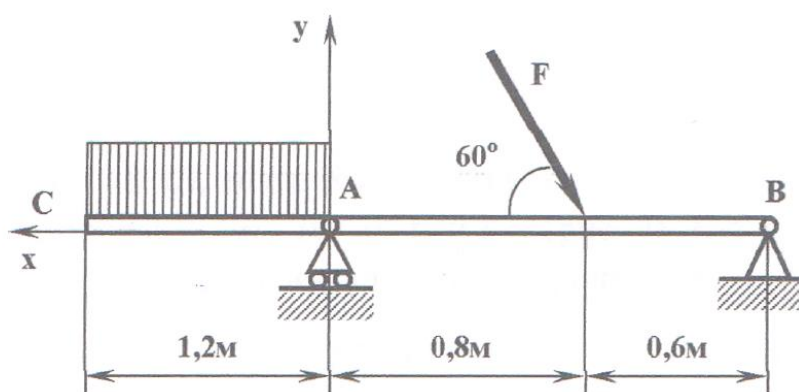


Рис. 1

2. На балку  $CB$  діють сили  $P_1=120 \text{ кН}$ ,  $P_2=80 \text{ кН}$  і пара з моментом за модулем  $M = 60 \text{ кНм}$  (рис. 2). Нехтуючи вагою балки і тертям, визначити реакції опор.

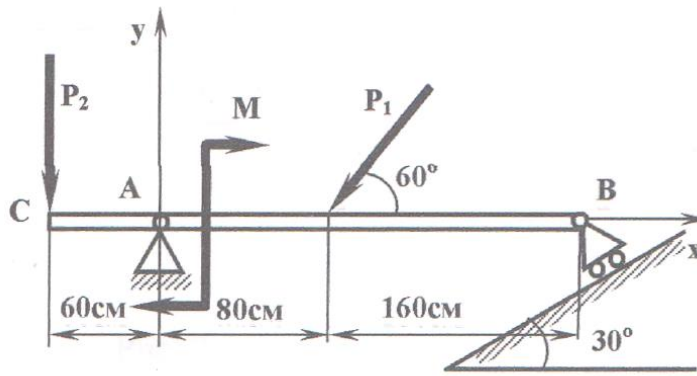


Рис. 2

Відповідь:  $X_A = 82,9$  кН;  $Y_A = 144,3$  кН.

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Ф., Курс теоретической механики, т.1, 2 М., 1979.
3. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1989.

**Тема 3. Визначення реакції опор плоскої рами.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Тіло, не зв'язане з іншими тілами і якому можна надати будь-яке переміщення у просторі називається**

- A. вільним
- B. невільним
- C. комбінованим
- D. простими

**Система сил, під дією якої тіло знаходиться в стані рівноваги, називається**

- A. вільною
- B. зрівноваженою
- C. рівнодіючою
- D. просторовою

**Які системи сил називаються еквівалентними**

- A. дві однакові системи сил, що спричиняють різні зміни динамічному стану тіла
- B. дві різні системи сил, що спричиняють однакову зміну кінематичного стану тіла
- C. дві системи сил, якщо рівні їхні головні моменти

**Якщо одна сила замінює дію на тіло цілої системи сил, то ця сила називається**

- A. вільною
- B. зрівноваженою
- C. рівнодіючою
- D. плоскою

**Сила, яка по модулю рівна рівнодіючій, але направлена в протилежний бік і діє по одній і тій же прямій, називається**

- A. зрівноважуючою
- B. еквівалентною нулю
- C. рівнодіючою
- D. дорівнює 0

**Сили бувають**

- A. зовнішніми та внутрішніми
- B. вільними і невольними
- C. простими та складними
- D. комплексними та прямими

**Сили можуть бути**

- A. вільними і невольними
- B. простими та складними
- C. зосередженими і розподіленими
- D. комплексними та прямими

**Сили які діють в одній точці називають**

- A. зосередженими
- B. розподіленими
- C. комплексними
- D. просторовими

**Під рівновагою матеріальної точки або твердого тіла розуміють**

- A. не тільки стан спокою, а й рух за інерцією
- B. рівнодіючу систему
- C. еквівалентну систему
- D. силу, що дорівнює 0

**Якщо певні переміщення тіла неможливі через обмеження, накладені з боку інших тіл, то дане тверде тіло називають**

- A. вільним
- B. невільним
- C. класичним
- D. простими

**Обмеження, накладені на положення і рух твердого тіла, називають**

- A. в'язями
- B. пикселями
- C. шарнирами
- D. зв'язками

**В'язі, що накладаються на тіло**

- A. обмежують його рух
- B. спричиняють протидію
- C. усувають нерівності
- D. утворюють рівновагу системи

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1990.
5. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.

**Тема 4. Визначення рівноваги складеної конструкції.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Сила, з якою в'язь діє на тіло, називається**

- A реакцією в'язі, чи просто реакцією
- B. механічна взаємодія
- C. технічна реакція
- D. технічною взаємодія

**За характером обмежень, що накладають в'язі на тіла, їх можна поділити на два види**

- A. прості та складні
- B. комбіновані різної складності
- C. односторонні і двосторонні
- D. комплексні та просторові

**До гнучких в'язей належать**

- A. нерухомі шарніри
- B. радіальні підшипники
- C. троси, канати, ланцюги тощо
- D. рухомі шарніри

**Двосторонніми в'язі можуть бути**

- A. нерухомі шарніри
- B. радіальні підшипники
- C. троси, канати, ланцюги тощо
- D. рухомі шарніри

**Сили, які характеризуються числовим значенням, напрямом дії та точного прикладання і які при дії на тверде тіло можуть надати йому того чи іншого руху, називається**

- A. активними
- B. пасивними
- C. простими
- D. складними

**Реакції в'язей діючи на тіло не надають йому руху, а навпаки обмежують (унеможлиблюють) рух і на відміну від активних сил їх називають**

- A. активними
- B. пасивними
- C. простими
- D. просторовими

**Сили, які виникають при взаємодії матеріальних точок, твердих тіл або частинок суцільного середовища даної системи з іншими матеріальними точками, твердими тілами або частинами суцільного середовища, що не належать до даної системи, називають**

- A. зовнішніми
- B. внутрішніми
- C. простими
- D. комплексними

**Сили взаємодії між матеріальними точками, твердими тілами, або частинками суцільного середовища, що входять до складу даної системи, рівновага чи рух якої вивчається, називаються**

- A. зовнішніми
- B. внутрішніми
- C. простими
- D. складними

**Гнучкі в'язі працюють тільки на**

- A. зжимання
- B. урівноваження
- C. розтягування
- D. рівновагу системи

**Як називається система сил, коли сили діють уздовж однієї лінії**

- A. просторова
- B. збіжна
- C. лінійна
- D. комбінована

**Як називається система сил, коли лінії дії сил паралельні**

- A. плоска
- B. паралельна
- C. збіжна
- D. зрівноважувальна

**Для рівноваги збіжної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно й достатньо, щоб рівнодіюча цієї системи**

- A. дорівнювала нулю
- B. дорівнювала одиниці
- C. не дорівнювала нулю
- D. еквівалентна  $\cos=0$

**Рекомендована література:**

1. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. –К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1981. – 280 с.

**Тема 5. Задачі на рівновагу просторової системи довільно розташованих сил.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Під рівновагою розуміють**

- A. відстань між двома довільними точками
- B. стан руху
- C. стан спокою
- D. стан пробудження

**Абсолютно твердим тілом називають**

- A. тіло, відстань між трьома довільними точками якого залишається незмінною
- B. таке тіло, відстань між двома довільними точками якого залишається незмінною в будь-який момент часу
- C. тіло, відстань між двома довільними точками якого постійно змінюється
- D. тіло, алгебраїчна сума проєкцій яких не дорівнювали нулю

**Для рівноваги просторової системи сил прикладених до матеріальної точки або твердого тіл, необхідно щоб**

- A. алгебраїчні суми проєкцій були рівними нулю
- B. геометричні суми проєкцій були рівними нулю
- C. алгебраїчні суми проєкцій не дорівнювали нулю
- D. алгебраїчні суми проєкцій дорівнювали  $\cos=0$

**Міру механічної дії сили на тіло, яка викликає обертальний ефект, оцінюють**

- A. моментом сили
- B. плечем сили
- C. моментом руху
- D. плечем руху

**Вектор-моментом сили відносно довільного просторового центра називається**

- A. плече
- B. вектор
- C. модуль



D. рух вектору

**Систему двох рівних за модулем паралельних між собою сил, які напрямлені у протилежні боки вздовж різних прямих, називають**

- A. парою сил
- B. модулем сил
- C. плечем сили
- D. модулем вектору рівноваги

**Найкоротша відстань між лініями дії сил, називається**

- A. площа дії пари сил (площина пари);
- B. плече пари сил
- C. вектор-момент сили
- D. модулем вектору рівноваги

**Плече пари сил**

- A. площина пари
- B. момент сили
- C. найкоротша відстань між лініями дії сил
- D. момент руху

**Моментом сили відносно осі називають**

- A. геометричну величину
- B. алгебраїчну величину
- C. суму добутку
- D. тригонометрична величина

**Момент пари сил**

- A. найкоротша відстань між лініями дії сил
- B. вільний вектор
- C. перпендикуляр
- D. момент руху

**До основних кінематичних понять теоретичної механіки, які характеризують рух матеріальної точки, відносять**

- A. швидкість, прискорення
- B. швидкість, гальмування
- C. гальмування, рух
- D. швидкість, прискорення, іноді гальмування

**Система двох рівних за модулем і протилежно направлених сил складає пару сил, яку називають**

- A. роз'єднаною парою сил
- B. приєднаною парою сил
- C. зосередженою парою сил

Д. комплексною парою сил

**Головним вектором довільної системи сил називають**

- А. суму алгебраїчних моментів усіх сил відносно цього центра
- В. суму геометричних моментів усіх сил відносно цього центра
- С. суму векторних моментів усіх сил відносно цього центра
- Д. суму тригонометричних моментів усіх сил відносно цього центра

**Для рівноваги довільної системи сил, прикладених до твердого тіла, необхідно, щоб**

- А. головний вектор і головний момент цієї системи відносно будь-якого центра зведення були рівними нулю
- В. головний момент цієї системи був рівним нулю
- С. головний вектор відносно будь-якого центра зведення дорівнював нулю
- Д. головний вектор дорівнював сумі геометричних моментів усіх сил відносно цього центра

**Силу, яка виникає в площині стикання тіл, називають**

- А. силою розчеплення
- В. силою зчеплення
- С. з'єднанням
- Д. силою головного вектору

3. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Вантаж, вага якого  $48 \text{ кН}$ , підтримується трьома невагомими стрижнями  $AB$ ,  $AC$  і  $AD$ , довжина яких відповідно  $1,3 \text{ м}$ ,  $0,4 \text{ м}$  і  $0,3 \text{ м}$  (рис. 1). Кут  $CAD = 90^\circ$ . Визначити зусилля в стрижнях, вважаючи кріплення стрижнів шарнірними.

Відповідь:  $S_B = 52 \text{ кН}$ ;  $S_C = -16 \text{ кН}$ ;  $S_D = -12 \text{ кН}$ .

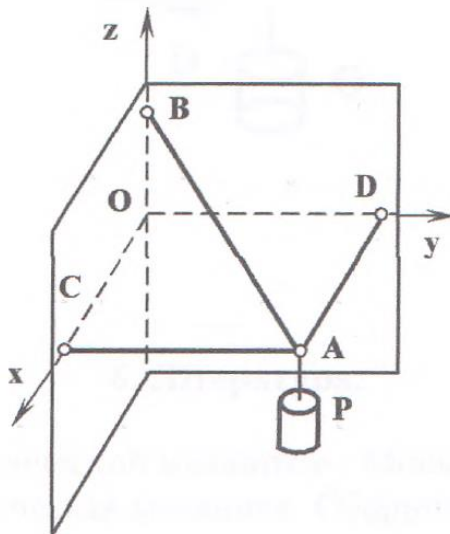


Рис. 1

2. Однорідна кришка ящика, вага якої  $10 \text{ кН}$  (рис. 3), утримується в рівновазі вертикальною мотузкою  $EP$ . Визначити реакцію петель  $A$  і  $B$ , якщо  $CE = 20 \text{ см}$ ,  $ED = 80 \text{ см}$ .

Відповідь:  $R_A = 4 \text{ кН}$ ;  $R_B = \text{кН}$ .

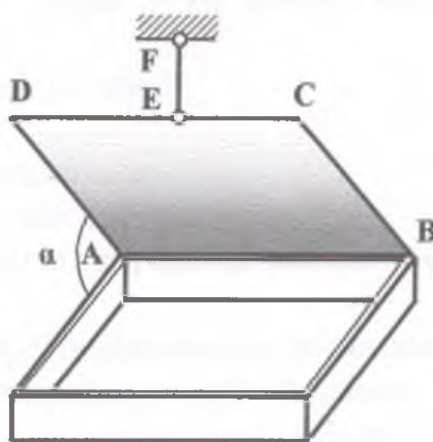


Рис. 2

#### Рекомендована література:

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
4. Мещерский И.В. спарники задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1990.
5. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.

#### Тема 6. Рівновага тіла при наявності тертя.

**Форми контролю:** розв'язування задач.

#### Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

#### Двосторонніми називаються такі в'язі, що

- A. обмежують переміщення тіла, як в одному, так і в прямо пропорційному напрямку
- B. обмежують свободу руху тіла в одному напрямку
- C. не обмежують свободу руху тіла
- D. обмежують свободу руху тіла в двох напрямках

**Операція геометричного складання векторів будь-якого класу (сил, швидкостей тощо) зводиться до побудови**

- A. векторного трикутника
- B. векторного багатокутника
- C. векторної площадки
- D. векторної сітки

**Одним з головних понять теоретичної механіки є поняття**

- A. плече сили
- B. силовий багатокутник
- C. момент сили
- D. векторний момент

**Числове значення вектор-момента дорівнює добутку**

- A. сили на плече сили
- B. площі на плече сили
- C. сили на момент сили
- D. сили на вектор

**Момент пари сил – це вільний вектор, направлений перпендикулярно до площини дії пари в той бік, звідкіля обертання тіла під дією пари сил відбувається**

- A. за рухом годинникової стрілки
- B. проти руху годинникової стрілки
- C. в протилежний бік від дії сили
- D. в протилежні сторони руху головної прикладеної сили

**Дві пари сил еквівалентні одна одній, коли їх**

- A. вектор-моменти рівні
- B. добуток дорівнює нулю
- C. добуток не дорівнює нулю
- D. вектор-моменти дорівнюють 0

**Пара сил, що діє на матеріальний об'єкт, може бути зрівноважена тільки іншою**

- A. парою моментів
- B. парою сил
- C. парою модулів
- D. парою векторів

**Проекція пари сил (момента пари сил) на будь-яку координатну вісь**

- A. дорівнює нулю
- B. не дорівнює нулю
- C. дорівнює сумі числового добутку
- D. не дорівнює сумі числового добутку

**Сила, що діє на абсолютно тверде тіло, є**

- A. числовим вектором
- B. алгебраїчним вектором
- C. ковзним вектором
- D. наскрізним вектором

**Будь-яку довільну систему сил, що діють на абсолютно тверде тіло, в загальному випадку можна звести**

- A. до однієї сили і пари сил
- B. до пари сил
- C. до нуля
- D. до векторного моменту пари сил

**Реакцією в'язі називається**

- A. сила, яка еквівалентна системі сил, прикладених до точок тіла
- B. сила, з якою в'язь діє на тіло
- C. сили, яка дорівнює алгебраїчній сумі всіх сил, що діють на систему

**Якщо одну систему сил, що діє на тіло, можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану твердого тіла, то такі системи називаються**

- A. еквівалентними
- B. рівнодійними
- C. зосередженими
- D. плоскими

**Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається**

- A. еквівалентною
- B. рівнодійною
- C. зосередженою
- D. просторовою

**Зрівноважені системи сил (системи сил еквівалентні нулю) – це такі системи сил, під дією яких матеріальна точка або тверде тіло перебувають у стані**

- A. руху
- B. інерційного не спокою
- C. рівноваги
- D. періодичного руху

**Системи сил називаються еквівалентними, якщо**

- A. одну систему сил, що діє на тіло, можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану твердого тіла
- B. система сил еквівалентна одній силі
- C. алгебраїчний вектор суми дорівнює нулю

D. тригонометричний вектор суми дорівнює нулю

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.

**Тема 7. Визначити положення центру ваги площини плоского перерізу.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти координати центра ваги пластинки (рис. 1), розміри якої подано в сантиметрах.

*Відповідь:*  $x_c=3,7$  см;  $y_c= 7,7$  см.

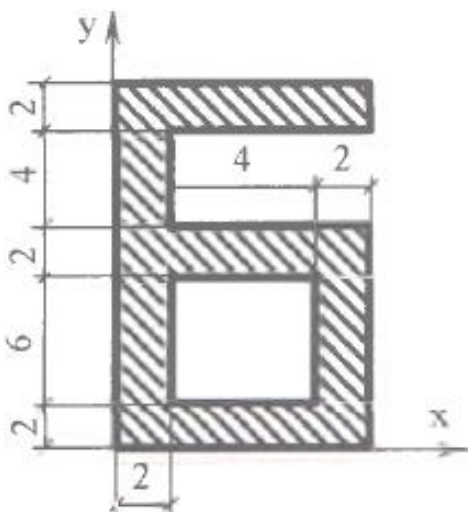


Рис. 1

**Рекомендована література:**

1. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. –К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1981. – 280 с.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА. ДИНАМІКА ТОЧКИ І СИСТЕМИ

**Тема 8.** Визначення швидкості та прискорення точки за заданими рівняннями її руху

**Форми контролю.** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Кінематика є розділом теоретичної механіки, в якому вивчається**

- A. властивості сил, умови рівноваги абсолютно твердого тіла
- B. механічний рух матеріальних об'єктів незалежно від причин, які його викликають
- C. умови не рівноваги абсолютно твердого тіла
- D. умови не рівноваги будь-якого тіла

**При розв'язанні задач кінематики рух матеріальних об'єктів визначається відносно**

- A. певної системи відліку
- B. певної шкали
- C. певного напрямку
- D. певних умов

**В кінематиці відсутні такі фізичні поняття як**

- A. траєкторія руху
- B. швидкість та прискорення
- C. сила та маса
- D. вага

**В кінематиці розглядаються лише геометричні характеристики**

- A. руху
- B. сили
- C. маси
- D. ваги

**У кінематиці всі лінійні величини (координати, довжина шляху тощо) виражаються в**

- A. см

- В. метрах
- С. дюймах
- Д. кг

**Кінематично визначити (задати) рух даного об'єкта означає**

- А. встановити його положення відносно системи відліку у будь-який момент часу
- В. встановити його положення відносно шкали часу
- С. визначити швидкість та прискорення у будь-який момент часу
- Д. дослідити гальмування відносно даної системи відліку

**Предметом дослідження в кінематиці є**

- А. математичні способи задання руху об'єктів
- В. дослідження відносно даної системи відліку
- С. матеріальна точка і абсолютно тверде тіло
- Д. встановлення положення тіла відносно системи відліку у будь-який момент часу

**Безперервна послідовність точок простору, через які проходить точка при її русі, називається**

- А. траєкторією руху цієї точки
- В. траєкторією руху простора
- С. безперервним потоком руху цієї точки
- Д. траєкторією прискорення руху

**Годографом векторної функції по скалярному аргументу називається**

- А. просторова лінія
- В. крива
- С. гіпербола
- Д. парабола

**Площину, проведену через точку перпендикулярно до бінормалі називають**

- А. січною площиною
- В. стичною площиною
- С. площиною бінормалі
- Д. перерізом площини

**Площина, проведена через точку перпендикулярно до дотичної називається**

- А. нормальна площина
- В. січна площина
- С. стична площина
- Д. приєднувальна площина



**Площина, проведена через точку перпендикулярно до головної нормалі називається**

- A. спрямна площина
- B. нормальна площина
- C. січна площина
- D. приєднувальна площина

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1990.
5. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.
6. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Ф., Курс теоретической механики, т.1, 2 М., 1979.
7. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1989.

**Тема 9. Визначення кінематичних характеристик точок і тіл при поступальному та обертальному русі**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Рух точки в просторі можна задати**

- A. векторним та алгебраїчним способами
- B. векторним, координатним і натуральним (природним) способами
- C. лише координатним способом
- D. лише тригонометричним способом

**Неперервна лінія, яку описує точка при своєму русі відносно обраної системи відліку, називається**

- A. траєкторією руху
- B. вектор годограф
- C. траєкторією точки
- D. прискоренням руху

**Відстань, що пройдена точкою за певний проміжок часу називається**

- A. шляхом точки
- B. траєкторією точки
- C. кутом руху точки
- D. прискоренням точки

**Положення точки на траєкторії в даний момент часу називається**

- A. траєкторією точки
- B. кутом руху точки
- C. дуговою координатою
- D. прискоренням руху

**Кінематична міра руху точки, яка дорівнює похідній за часом від радіуса-вектора цієї точки в обраній системі відліку називається**

- A. швидкістю точки
- B. прискоренням точки
- C. траєкторією точки
- D. гальмуванням точки

**Кінематична міра зміни швидкості точки, яка дорівнює похідній за часом від швидкості цієї точки в обраній системі відліку називається**

- A. швидкістю точки
- B. прискоренням точки
- C. траєкторією точки
- D. гальмуванням точки

**Вектор швидкості точки направлений вздовж дотичної до траєкторії точки у бік**

- A. руху точки
- B. прискорення точки
- C. швидкості точки
- D. руху годинникової стрілки

**Вектор швидкості точки характеризує**

- A. прискорення точки в просторі
- B. швидкість зміни просторового положення точки з часом
- C. швидкість зміни траєкторії
- D. швидкість зміни положення точки

**Які способи задання руху точці застосовуються в кінематиці**

- A. природний
- B. векторний
- C. природний, векторний, координатний
- D. тригонометричний

**Рух точки буде задано натуральним способом, якщо буде відомо**

- A. закон руху точки
- B. траєкторію руху точки
- C. систему координат
- D. закон гальмування

**За допомогою векторного способу положення довільної точки, що рухається по відношенню до обраної системи відліку  $Oxyz$  можна визначити за допомогою її**

- A. радіуса-вектора  $r$
- B. вектора-пружності
- C. вектора-відліку
- D. радіуса-момента

**За допомогою координатного способу положення точки в просторі можна визначити за допомогою**

- A. радіуса-вектора  $r$
- B. декарткових координат  $x, y, z$  залежних від часу  $t$
- C. траєкторії руху точки
- D. радіуса-вектора  $r$

**Який рух твердого тіла називається рухом навколо нерухомої вісі**

- A. поступовий
- B. плоскопаралельний
- C. сферичний
- D. по колу

**Для будь-якого руху твердого тіла має місце теорема**

- A. Піфагора
- B. Ф. Грасгофа
- C. Ньютона
- D. Буравчика

**Закінчіть теорему Ф. Грасгофа: проекції швидкостей двох довільних точок твердого тіла на пряму, що з'єднує ці точки, завжди....**

- A. рівні між собою
- B. мають однакові моменти сил
- C. рівні по модулю
- D. дорівнюють одному модулю

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К. : Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.

## Тема 10. Визначення абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Рух тіла називається поступальним, якщо будь-яка пряма, проведена в тілі, переміщується паралельно сама собі, тобто не повертається відносно свого**

- A. початкового напрямку
- B. кінцевому напрямку
- C. середнього геометричному напрямку
- D. середнього напрямку

**Скільки ступенів вільності має тіло, що здійснює поступальний рух**

- A. два ступеня вільності (швидкість, прискорення)
- B. три ступеня вільності (траєкторія, швидкість, прискорення)
- C. чотири ступеня вільності (траєкторія, швидкість, прискорення, миттєва швидкість)
- D. правильна відповідь відсутня

**Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називається такий рух, при якому будь-які дві точки тіла залишаються**

- A. нерухомими
- B. рухомими
- C. сферичними
- D. по колу

**Пряма, проведена через дві нерухомі точки, називається**

- A. рухомою віссю
- B. віссю обертання
- C. нерухомою віссю
- D. правильна відповідь відсутня

**Нерухома пряма, навколо якої обертається тіло, називають**

- A. рухомою віссю
- B. віссю обертання
- C. нерухомою віссю
- D. усі відповіді вірні

**Відстань точки від осі обертання називають**

- A. радіусом обертання точки
- B. нерухомою віссю
- C. рухомою віссю
- D. моментом вектору сили

**Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, визначається параметром**

- A. радіальним кутом
- B. кутом повороту  $\varphi$
- C. ступенем вільності
- D. векторним кутом

**Кут  $\varphi$  вимірюється в**

- A. радіанах
- B. дюймах
- C. градусах
- D. спеціальних одиницях

**Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій**

- A. нерухомій площині
- B. рухомій площині
- C. просторовій площині
- D. комбінованій площині

**Тверде тіло здійснює плоскопаралельний рух відносно**

- A. рухомої системи координат
- B. нерухомої системи координат
- C. просторової системи координат
- D. правильна відповідь відсутня

**Плоскопаралельний рух твердого тіла розкладається на два рухи**

- A. сферичний і геометричний
- B. обертальний та конічний
- C. поступальний і обертальний
- D. усі відповіді вірні

**Точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю, називається**

- A. миттєвим центром швидкостей
- B. центром прискорення
- C. центром реакції
- D. центром гальмування

**Закінчіть теорему Коріоліса: абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень**

- A. додавального та від'ємного
- B. переносного, відносного, коріолісова (поворотного)
- C. відносного та зведеного
- D. вільного, комбінованого, поворотного

**Кутова швидкість тіла**

- A. величина, що характеризує зміну кутової швидкості з часом
- B. фізична величина, характеризує зміну кута повороту  $\varphi$  з часом
- C. скалярна величина, яка характеризує зміни кута повороту з часом
- D. усі відповіді вірні

**Кутове прискорення тіла**

- A. фізична величина, що характеризує зміну кутової швидкості з часом
- B. величина, характеризує зміну кута повороту  $\varphi$  з часом
- C. скалярна величина, яка характеризує зміни кута повороту з часом
- D. правильна відповідь відсутня

**Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.

### **Тема 11. Застосування теореми про рух центра мас механічної системи.**

**Форми контролю:** розв'язування задач.

**Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Динаміка є розділом теоретичної механіки, в якому вивчається**

- A. властивості сил, умови рівноваги абсолютно твердого тіла
- B. рух матеріальних об'єктів з урахуванням сил, що прикладені до цих об'єктів
- C. умови не рівноваги абсолютно твердого тіла
- D. умови не рівноваги будь-якого твердого тіла

**Закінчіть третій закон І. Ньютона (закон дії і протидії): дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені**

- A. вздовж однієї прямої одну сторону
- B. вздовж різних прямих
- C. вздовж однієї прямої у протилежні сторони
- D. усі відповіді правильні

**Закінчіть четвертий закон І. Ньютона (закон незалежної дії сил): якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил**

- A. окремо
- B. разом
- C. поступово
- D. комплексно

**Дві основні задачі динаміки розв'язуються за допомогою**

- A. алгебраїчних рівнянь
- B. диференціальних рівнянь руху матеріальної точки
- C. геометричних рівнянь
- D. тригонометричних рівнянь

**Принцип Д'Аламбера: в кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили  $F$ , реакції в'язі  $R$  та сили інерції  $F_{ін}$  дорівнює**

- A. нулю
- B. одиниці
- C. невідомій
- D.  $\cos=0$

**Діючі на матеріальну точку сили можуть бути**

- A. прямолінійними та криволінійними
- B. внутрішніми та зовнішніми
- C. сталими або змінними
- D. простими та складними

**Змінна сила може**

- A. змінюватись за визначеним законом з часом, залежати від швидкості точки, що рухається
- B. залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором
- C. усі відповіді правильні

**Сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані, називається системою**

- A. матеріальних точок
- B. інтегральних точок
- C. синусоїдальних точок
- D. тригонометричних точок

### **Рекомендована література:**

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
2. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.

**Тема 12.** Застосування теореми про зміну кількості руху точки.

**Форми контролю:** розв'язування задач.

### **Завдання для самостійної роботи:**

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.
2. Розв'яжіть тестові завдання.

### **Система матеріальних точок є вільною, якщо**

- A. в будь-який момент часу всі точки системи можуть займати довільні положення в системі відліку і можуть мати довільні швидкості
- B. всі точки системи займають особливе положення в системі відліку
- C. деякі точки системи займають прямо пропорційне положення в системі відліку
- D. всі точки системи займають довільне положення в системі відліку

### **Сили, з якими матеріальні точки даної системи взаємодіють з матеріальними точками або тілами, що не належать до даної системи, називаються**

- A. внутрішніми силами
- B. зовнішніми силами
- C. комбінованими силами
- D. просторовими силами

### **Сили взаємодії між матеріальними точками однієї механічної системи називаються**

- A. внутрішніми силами
- B. зовнішніми силами
- C. комбінованими силами
- D. внутрішніми силами

### **Зовнішні сили**

- A. сили взаємодії між матеріальними точками однієї механічної системи
- B. всі точки системи займають особливе положення в системі відліку
- C. сили, з якими матеріальні точки даної системи взаємодіють з матеріальними точками або тілами, що не належать до даної системи
- D. правильна відповідь відсутня



### **Внутрішні сили**

- A. сили взаємодії між матеріальними точками однієї механічної системи
- B. всі точки системи займають особливе положення в системі відліку
- C. сили, з якими матеріальні точки даної системи взаємодіють з матеріальними точками або тілами, що не належать до даної системи
- D. усі відповіді вірні

### **Геометрична сума усіх внутрішніх сил системи (головний вектор внутрішніх сил) дорівнює**

- A. одиниці
- B. нулю
- C. косинусу
- D. синусу

### **Головний момент внутрішніх сил (геометрична сума моментів всіх внутрішніх сил системи відносно довільної точки) дорівнює**

- A. одиниці
- B. нулю
- C. косинусу
- D. синусу

### **Система матеріальних точок є невідільною, якщо**

- A. в будь-який момент часу всі точки системи можуть займати довільні положення в системі відліку і можуть мати довільні швидкості
- B. внаслідок будь-яких обмежень (умов) точки системи, не можуть займати довільні положення в системі відліку і мати довільні швидкості
- C. деякі точки системи займають прямо пропорційне положення в системі відліку
- D. правильна відповідь відсутня

### **Пряма задача вільної механічної системи – за кінематичними рівняннями руху точок механічної системи і їх масою, визначити**

- A. рівнодійні сили, що діють на точки системи
- B. закони руху усіх точок системи
- C. закон руху кожної точки системи і реакції накладених в'язей

### **Обернена (основна) задача динаміки вільної механічної системи – за силами, що діють на точки механічної системи (зовнішні і внутрішні), масами і початковими умовами їх руху, визначити**

- A. рівнодійні сили, що діють на точки системи
- B. закони руху усіх точок системи
- C. закон руху кожної точки системи і реакції накладених в'язей

### **Рекомендована література:**

1. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.

2. Павловський М.А. Теоретична механіка. –К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1981. – 280 с.

### 3. Задачі для самостійного розв'язання.

1. По шорсткій похилій площині, що складає з обрієм кут  $\alpha = 30^\circ$ , спускається важке тіло без початкової швидкості. Визначити, протягом якого часу  $T$  тіло пройде шлях довжини  $l = 39,2$  м, якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,2$ .

*Відповідь:*  $T = 5$  с.

2. Потяг маси  $4 \cdot 10^5$  кг входить на підйом  $i = \operatorname{tg} \alpha = 0,006$  (де  $\alpha$  — кут підйому) зі швидкістю 15 м/с. Коефіцієнт тертя (коефіцієнт сумарного опору) при русі потяга дорівнює 0,005. Через 50 с після входу потяга на підйом його швидкість зменшується до 12,5 м/с. Знайти силу тяги тепловоза.

*Відповідь:* 23 120 Н.

### Тема 13. Дослідження теореми про зміну кінетичної енергії точки і механічної системи

**Форми контролю:** розв'язування задач.

#### Завдання для самостійної роботи:

1. Опрацюйте конспект лекцій та рекомендовану літературу для обговорення теоретичних питань теми на практичному занятті.

2. Розв'яжіть тестові завдання.

**Закінчіть третій закон І. Ньютона (закон дії і протидії):** дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, які є рівні за величиною (модулем) і напрямлені

- A. вздовж однієї прямої одну сторону
- B. вздовж різних прямих
- C. вздовж однієї прямої у протилежні сторони
- D. правильна відповідь відсутня

**Закінчіть четвертий закон І. Ньютона (закон незалежної дії сил):** якщо на матеріальну точку діють декілька сил, то точка одержує прискорення, яке дорівнює геометричній сумі тих прискорень, які б вона одержала під дією кожної із цих сил:

- A. окремо
- B. разом
- C. поступово
- D. комплексно

**Дві основні задачі динаміки розв'язуються за допомогою**

- A. алгебраїчних рівнянь
- B. диференціальних рівнянь руху матеріальної точки
- C. геометричних рівнянь
- D. тригонометричних рівнянь

**Принцип Д'Аламбера: в кожний момент руху матеріальної точки геометрична сума прикладеної до точки сили  $F$ , реакції в'язі  $R$  та сили інерції  $F_{1n}$  дорівнює**

- A. нулю
- B. одиниці
- C. невідомій
- D. одиниці

**Діючі на матеріальну точку сили можуть бути**

- A. прямолінійними та криволінійними
- B. внутрішніми та зовнішніми
- C. сталими або змінними
- D. простими та складними

**Змінна сила може:**

- A. змінюватись за визначеним законом з часом, залежати від швидкості точки, що рухається
- B. залежати від положення точки, яка визначається її радіус-вектором
- C. усі відповіді правильні
- D. змінюватися з часом

**Сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані, називається системою:**

- A. матеріальних точок
- B. інтегральних точок
- C. синусоїдальних точок
- D. тригонометричних точок

## Список використаної літератури:

1. Шульга. О.Ю. Теоретична механіка. – Харків: Ранок, 2007. – 208 с.
2. Павловський М.А. Теоретична механіка. –К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. Тарг С.М. Короткий курс теоретичної механіки. – М.: Наука, 1981. – 280 с.
4. Чикова Т. С., Свистун А. Ч. Задачи по статике с алгоритмами и примерами решений - Гродно: ГрГУ, 2015. - 59 с.
5. Левіт І.Б. Статика: Курс лекцій. – Донецьк: Донецький державний університет економіки і торгівлі ім. М. Туган – Барановського. – 106 с.
6. Левіт І.Б., Миронова І.О. Кінематика: Курс лекцій. – Донецьк: Донецький державний університет економіки і торгівлі ім. М. Туган – Барановського – 88 с.
7. Левіт І.Б., Миронова І.О. Теоретична механіка. Методичні вказівки і керівництво користувача до навчальних програм по загальним теоремам динаміки матеріальної точки та механічної системи. – Донецьк: Донецький державний університет економіки і торгівлі ім. М. Туган – Барановського. – 75 с.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002.
9. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1989.
10. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1988.
11. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1990.
12. Павловський М.А., Акінфієва Л.Ю., Юрокін А.І., Свістунов С.Я. Кінематика та динаміка точки. – Київ: Либідь, 1993.
13. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Ф., Курс теоретической механики, т.1, 2 М., 1979.
14. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике / Под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1989.

Навчальне видання

*Цвіркун Людмила Олександрівна*  
*Омельченко Олександр Володимирович*

Кафедра загальноінженерних дисциплін та обладнання

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ  
ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ  
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»**

Формат 60×84/8. Ум. др. арк. 2.

Донецький національний університет  
економіки і торгівлі  
імені Михайла Туган-Барановського  
50042, Дніпропетровська обл.,  
м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої  
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.