

Кравцов О.О.

кандидат економічних наук,
доцент кафедри підприємництва і торгівлі
Донецького національного університету економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Kravtsov Alexander

Donetsk National University of Economics and Trade
named after Mykhailo Tugan-Baranovsky

МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ФУНКЦІЇ ПРОМИСЛОВОГО ПІДПРИЄМСТВА

THE MODELING OF THE INDUSTRIAL ENTERPRISE PRODUCTION FUNCTION

У статті розглянуто питання моделювання виробничої функції промислового підприємства. На основі аналізу положень теорії виробничих функцій визначено проблемні моменти, які ускладнюють отримання адекватних економіко-статистичних моделей для конкретного підприємства. Традиційні моделі виробничих функцій не мають асимптоти. Вони необмежено зростають за збільшення будь-якого зі своїх аргументів. Але виробничі можливості конкретного підприємства обмежені його потужністю, тому за її досягнення зростання витрат предметів праці не повинно збільшувати обсяг виробництва. Виробнича функція підприємства може бути представлена сукупністю виробничих функцій елементарних виробничих одиниць, які перебувають у певному зв'язку одна з одною на різних ділянках технологічних ліній. Запропоновано аналітичний вид виробничої функції елементарної виробничої одиниці, здійснено його апробацію на практичному прикладі.

Ключові слова: виробництво, виробнича функція, моделювання, елементарна виробнича одиниця, технологічна лінія, виробнича потужність, ефективність використання ресурсів.

В статье рассматриваются вопросы моделирования производственной функции промышленного предприятия. На основе анализа положений теории производственных функций определены проблемные моменты, которые затрудняют получение адекватных экономико-статистических моделей для конкретного предприятия. Традиционные модели производственных функций не имеют асимптоты. Они неограниченно возрастают при увеличении любого из своих аргументов. Но производственные возможности конкретного предприятия ограничены его мощностью, поэтому при ее достижении увеличение затрат предметов труда не должно приводить к росту объема производства. Производственная функция предприятия может быть представлена совокупностью производственных функций элементарных производственных единиц, находящихся в определенной связи друг с другом на различных участках технологических линий. Предложен аналитический вид производственной функции элементарной производственной единицы, выполнена его апробация на практическом примере.

Ключевые слова: производство, производственная функция, моделирование, элементарная производственная единица, технологическая линия, производственная мощность, эффективность использования ресурсов.

The article discusses the modeling of the industrial enterprise production function. The study of production functions is of great epistemological importance, since they mathematically express the essence of the relationship between factors and results of the production process, that is, they indirectly indicate the efficiency of using resources to create economic goods. Based on the analysis of the theory of production functions, problematic issues are identified that make it difficult to obtain adequate economic and statistical models for a particular enterprise. In order to build the production function of a particular enterprise, it is necessary to collect a large amount of statistically homogeneous material. Statistical observations relating to different time intervals are not always homogeneous, since they are influenced by various environmental factors. Traditional models of production functions used to approximate statistical observations do not have asymptotes. They grow to infinity as any argument grows. The production capacity of a particular enterprise is limited. Upon reaching production capac-

ity, a subsequent increase in the costs of objects of labor does not increase the volume of production. The purpose of the article is to substantiate approaches to modeling the production function of an industrial enterprise and its analytical form, taking into account the shortcomings of traditional models. In order to modeling the production process of a particular enterprise, it is necessary to take into account its internal structure, that is, the entire technological chain of the processing of labor objects into finished products. The production function of the enterprise can be represented by a set of production functions of elementary production units, which are in certain relations with each other on different sections of the technological lines. An analytical type of the production function of an elementary production unit is proposed and its practical verification is carried out. The production function of the enterprise can be used to plan costs and volumes of finished products, as well as to justify investment decisions to increase production capacity.

Key words: production, production function, modeling, elementary production unit, production line, production capacity, resource efficiency.

Постановка проблеми. Виробнича функція – це економіко-математичне рівняння, що зв'язує змінні величини витрат ресурсів із відповідним обсягом випуску продукції. Якщо для монопродуктового виробництва позначити обсяг випуску продукції V , а витрати економічних ресурсів X_i , $i \in [1; N]$, то абстрактна виробнича функція може бути представлена у вигляді:

$$V = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N), \quad (1)$$

де $f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)$ – деякий математичний вираз, що зв'язує витрати економічних ресурсів із кількістю випущеної продукції, як правило, у вартісному вираженні (кількість змінних у рівнянні (1), як правило, не перевищує 10, $N \leq 10$ [2]).

Вивчення виробничих функцій має велике гносеологічне значення, оскільки в них у математичній формі виражається сутність взаємозв'язку факторів і результатів виробництва, тобто вони опосередковано вказують на ефективність використання ресурсів для створення економічних благ.

Отримати аналітичний вираз для виробничої функції можна статистичними методами на основі численних фактичних даних, які повинні бути приведені до порівнянного виду. При цьому наскільки ці дані можна порівнювати й які можна зробити висновки – питання для дослідника. Можна взяти дані по виборці підприємств, що випускають однотипну продукцію, наприклад сільськогосподарських, за один і той же відносно нетривалий період часу, і на цій основі побудувати їх виробничу функцію. Така функція для сукупності одночасних статистичних спостережень буде статичною. Більш складний підхід передбачає аналіз різночасових статистичних спостережень за тривалий період T , у цьому разі виробнича функція буде динамічною: $V = f(X_1(t), X_2(t), X_3(t), \dots, X_N(t))$, $t \in (0, T)$. Оскільки динамічні виробничі функції охоплюють тривалий період часу, на взаємозв'язок факторів і результатів виробництва можуть вплинути чинники зовнішнього середовища,

що спотворить реальні показники ефективності використання ресурсів. Так, зниження витрат сировини і матеріалів у натуральному виразі, яке зазвичай указує на більш ефективну технологію та організацію виробництва, може супроводжуватися зростанням цін та вартості використаних ресурсів узагалі, що вже свідчить про недоліки. Із цієї причини питання порівняності різночасових спостережень для побудови динамічної виробничої функції статистичними методами є більш гострим, що ускладнює отримання достовірного результату.

Щоб отримати виробничу функцію конкретного підприємства, необхідно зібрати великий обсяг статистично однорідного матеріалу. У роботі «Чи існують закони виробництва?» Пол Х. Дуглас зазначає: «По-перше, я дійсно був би дуже радий почати з вивчення окремих фірм, якби в моєму розпорядженні були необхідні дані. Але статистичні дані про зміну кількості використаних окремими фірмами за будь-який період факторів виробництва і про обсяг продукції, що вироблена ними, є секретами бізнесу, які найбільш ретельно охороняються»¹. Але не тільки закритість даних обмежує дослідників. Чим більший набір аргументів X_i входить до складу виробничої функції, тим складніше в математичній формулі відобразити взаємозв'язок і взаємозамінність між ними. Водночас надмірно агреговані показники приховують свою внутрішню структуру. Якщо, наприклад, аргументами виробничої функції підприємства будуть вартість основного капіталу і кількість найнятих робітників як у функції Кобба-Дугласа, то така модель не зможе пояснити різницю в обсягах виробництва двох різних підприємств, у яких ці показники виявляться однаковими. Тобто не можна буде зрозуміти, чому одне підприємство працює краще і виробляє більше іншого за аналогічних витрат ресурсів. Моделюючи процес виробництва конкретного підприємства, необхідно врахо-

¹ Pol H. Douglas Are there law of production? American Economic Review. 1948. Vol. 38. № 1. P. 1–41.

увати його внутрішню структуру, тобто весь технологічний ланцюг переробки предметів праці в готову продукцію. При цьому необхідно брати до уваги зовнішні чинники впливу на динаміку витрат у часі $X_i(t)$. Практична потреба в отриманні виробничої функції конкретного підприємства зумовлена важливістю цього інструмента для аналізу ефективності використання ресурсів і обґрунтування рішень, пов'язаних з управлінням виробничою потужністю. Таким чином, актуальність наукового вивчення виробничих функцій збігається з їх практичною цінністю.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Великий внесок у дослідження суспільного виробництва зробили американські вчені Ч. Кобб, П. Дуглас, В.В. Леонтьєв, Р. Солоу, іменами яких названо моделі виробничих функцій, що найчастіше використовуються в економічному аналізі. Завдяки науковим працям цих учених теорія виробничих функцій стала окремою галуззю економічної науки. На її подальший розвиток вплинули також праці радянських економістів О.І. Анчішкіна, В.С. Дадаєва, Г.Б. Клейнера [1], В.С. Немчинова, Ю.В. Яременко та ін. Питання моделювання виробництва неодмінно знаходяться в колі наукових інтересів сучасних українських вчених [2; 3].

Нині існує низка найбільш досліджених моделей виробничих функцій, які зазвичай використовуються в макроекономічному аналізі для апроксимації статистичних спостережень. До таких моделей належать виробничі функції з постійною еластичністю заміщення ресурсів CES (Constant Elasticity of Substitution), лінійна, мультиплікативно-ступенева і функція з фіксованими пропорціями ресурсів, які вважаються традиційними для вивчення суспільного виробництва. Але в мікроекономічному аналізі вони не завжди дають адекватний результат [3]. Справа в тому, що традиційні моделі виробничих функцій не мають асимптоти. Вони необмежено зростають за збільшення будь-якого зі своїх аргументів. Але виробничі можливості конкретного підприємства обмежені його виробничою потужністю, тому за її досягнення зростання витрат предметів праці не повинно збільшувати обсяг виробництва. Із цієї причини для моделювання виробничої функції підприємства необхідні інші математичні моделі.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Мета статті полягає в обґрунтуванні підходів до моделювання виробничої функції промислового підприємства та її аналітичного виду з урахуванням недоліків традиційних моделей.

Виклад основного матеріалу дослідження. У звичайному розумінні будь-який процес виробництва на мікрорівні є дискретним. За

технологічною ознакою, наприклад, він може бути розбитий на певні стадії перетворення предметів праці у готову продукцію. На кожній такій стадії у визначений технологією спосіб за допомогою встановлених засобів праці людиною здійснюється сукупність дій. Завдяки прийнятій організації виробництва у кінцевому підсумку ці дії призводять до створення економічного блага. Процес перетворення предметів праці на готову продукцію ми можемо розглядати все більш і більш детально на рівні робочих процесів, операцій, дій, але дискретність виробництва не може бути нескінченною. З організаційно-економічного погляду існує елементарна виробнича одиниця (далі – ЕВО) – робоче місце, на якому саме й відбувається поєднання всіх факторів виробництва. За класифікацією Г.Б. Клейнера ЕВО – це об'єктна система, яка реалізує функцію виробництва і на даному рівні аналізу не розбивається на підсистеми, які теж реалізують функцію виробництва [1, с. 539–541].

Будь-яке реальне підприємство можна представити як сукупність робочих місць, або ЕВО, які об'єднуються за певною організаційно-технологічною схемою. Наприклад, компресор як ЕВО виробляє стиснене повітря, яке потім використовується іншими ЕВО (пневматичний інструмент або обладнання). Ці ЕВО, своєю чергою, також переробляють предмети праці, аж до випуску готової продукції. Так утворюються технологічні лінії, аналіз пропускної здатності яких дає можливість розрахувати виробничу потужність підприємства в даних виробничо-технічних і соціально-економічних умовах. Лімітуючі ділянки технологічних ліній називають «вузькими місцями». Наявність «вузьких місць» майже завжди немінуча, зважаючи на особливості обладнання, технології, режиму роботи.

Технологічна ефективність виробництва досягається за максимального використання виробничої потужності підприємства і мінімально необхідних резервів пропускної здатності технологічних ліній. Виробнича потужність підприємства є динамічною величиною, на яку можна впливати з метою досягнення того чи іншого обсягу випуску продукції, корегуючи пропускну здатність технологічних ліній через розширення «вузьких місць».

Виробнича функція підприємства може бути представлена сукупністю «виробничих функцій» ЕВО, які перебувають в певному зв'язку одна з одною на різних ділянках технологічних ліній. «Виробнича функція» ЕВО характеризує обсяг випуску її власної «продукції», тобто переробки предметів праці на даному етапі технологічного процесу. Вочевидь, для ЕВО обсяг переробки предметів праці (випуску продук-

ції) VEBO буде визначатися тільки витратами самих предметів праці X за постійного обсягу задіяного капіталу (засобів праці) K і трудових ресурсів L : $V_{EBO} = f(L, K, X) = f(1, 1, X) = f(X)$, де L, K, X – витрати відповідно праці, засобів праці та її предметів. Обсяг випуску продукції EBO обмежений її пропускною здатністю, яка залежить від продуктивності засобів праці і трудових ресурсів: $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = C_p$, де C_p (*Productive Capacity*) – виробнича потужність елементарної виробничої одиниці, одиниць продукції в одиницю часу. Останнє означає, що виробнича функція EBO має горизонтальну асимптоту.

Властивості виробничої функції EBO також характеризують неокласичні критерії [1, с. 543–549]: виробнича функція EBO безперервна і зростає у сфері свого визначення, тобто $f'(X) > 0$ для $X \in [0, +\infty)$. За нульового обсягу витрат предметів праці випуск продукції буде нульовим: $f(0) = 0$.

Для монопродуктового виробництва (один предмет праці – один вид продукції) перерахованим вище критеріям відповідає функція виду:

$$f(X) = \frac{aX}{X+b}, \quad (2)$$

де a, b – невід'ємні коефіцієнти, $a > 0, b > 0$.

Дійсно, для даної функції $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = a$. Тобто величина коефіцієнта a відповідає виробничій потужності EBO C_p . Інший коефіцієнт b – це коефіцієнт розмірності, за допомогою якого порівнюються змінна X і параметр a . Оскільки $X > 0, b > 0, X + b > 0$, функція не має розриву у своїй області визначення $X \in [0, +\infty)$.

Графічний вид функції (2) представлений на рис. 1. Три варіанти графіків функції I, II, і III на рис. 1 розрізняються за параметром b : $b_1 > b_2 > b_3$. Чим менше величина b , тим швидше функція наближається до своєї асимптоти.

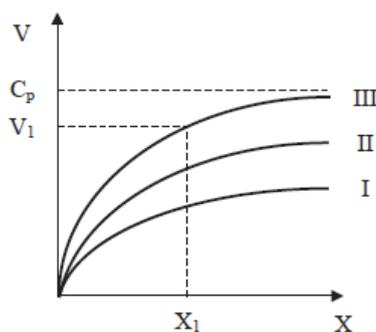


Рис. 1. Графік виробничої функції EBO

Похідна виробничої функції EBO характеризує відношення приросту випуску продукції до збільшення витрат факторів виробництва, що викликали цей приріст. Для моделі (2) вона має вигляд:

$$f'(X) = \frac{ab}{(X+b)^2}. \quad (3)$$

Похідна (3) невід'ємна у своїй області визначення $X \in [0, +\infty)$. Це означає, що виробнича функція EBO безперервно зростає за збільшення витрат предметів праці, як того вимагають неокласичні критерії. Однак $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{ab}{(X+b)^2} = 0$. Зі збільшенням значення X

похідна $f'(X)$, яка відповідає граничній продуктивності ресурсу X , спадає. Спадання похідної ілюструє закон зниження граничної продуктивності факторів виробництва. Кожна додатково витрачена одиниця предметів праці дає все менший приріст випуску продукції. Дійсно, чим інтенсивніше процес виробництва і чим менше часу витрачається на обробку одиниці предметів праці, тим більша ймовірність браку, аварійних простоїв обладнання тощо.

Як приклад застосування моделі (2) розглянемо роботу відцентрового компресора K-250 виробництва Хабаровського заводу «Дальенергомаш» (нині – АТ «Дальенергомаш», www.dalenergomash.ru) в умовах ПрАТ «Харцизький трубний завод» (pipe.metinvestholding.com). Компресор K-250 являє собою EBO, яка споживає електричну енергію та виробляє «продукцію» – стиснене повітря. Згідно з технічними характеристиками, максимальна годинна продуктивність компресора K-250 становить 15 тис м³ стисненого повітря. На ньому встановлений електричний двигун потужністю 1,6 МВт, який споживає 1-1,5 МВт електричної енергії за годину залежно від ступеня завантаження.

Для аналізу були взяті дані про щогодинний обсяг виробництва стисненого повітря і витрат електроенергії за три доби – 72 спостереження (рис. 2). На їх основі за моделлю (2) побудована виробнича функція EBO, яка має такий вигляд:

$$f(X) = \frac{15000X}{X+688}, \quad (4)$$

де X – витрати електроенергії за годину, кВт.

Параметр a у моделі виробничої функції (2) дорівнює максимальній годинній продуктивності компресора K-250, яка є відомою технічною характеристикою обладнання. Параметр b підбирався так, щоб середня відносна помилка апроксимації даної моделі була мінімальною. Для даної вибірки вона становила 5%, тому функція (4) може вважатися придатною для використання в економічних розрахунках.

Для певних режимів роботи обладнання і характеристик предметів праці можна стверджувати, що обсяг випуску продукції буде прямо пропорційним (або майже прямо пропорційним) витратам предметів праці, тобто для $X \in [X_1, X_2]$ $VEBO \approx cX$, де c – коефіцієнт пропо-

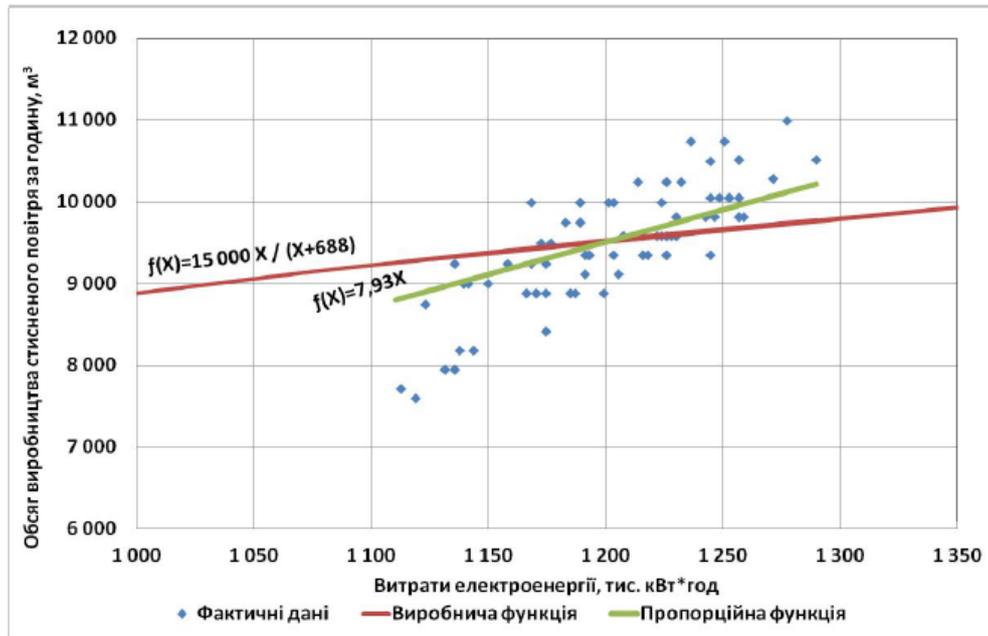


Рис. 2. Виробнича функція для компресора К-250

рційності. На практиці такі коефіцієнти пропорційності часто називають витратними і використовують для планування розходу ресурсів залежно від обсягу випуску продукції. Величина витратних коефіцієнтів, як правило, встановлюється дослідним шляхом або на основі технічних розрахунків. Її можна визначити за відомою виробничою функцією ЕВО або, навпаки, за витратним коефіцієнтом розрахувати параметри виробничої функції.

Припустимо, що для $X \in [X_1, X_2]$ $VEVO \approx cX$, тоді коефіцієнт c доречно підібрати так, щоб він забезпечував мінімум суми квадратів відхилень від виробничої функції:

$$\int_{X_1}^{X_2} \left(\frac{aX}{X+b} - cX \right)^2 dX \rightarrow \min. \quad (5)$$

Первісна для функції, що стоїть під знаком інтеграла, має вигляд:

$$F(X) = a^2X - \frac{a^2b^2}{2(X+b)} - 2ab(a+bc)\ln(X+b) - ac(X-b)^2 + \frac{c^2}{3}X^3, \quad (6)$$

Наприклад, на рис. 2 мінімальне значення витрат електроенергії, яке спостерігалось,

становить 1 113 кВт*годин, а максимальне – 1 290 кВт*годин. Підставляючи знайдені параметри виробничої функції (4) $a = 15\,000$ і $b = 688$, а також значення кінців інтервалу $X_1 = 1\,113$ і $X_2 = 1\,290$ в формулу (6), визначимо різницю $F(X_2) - F(X_1)$: $\Delta F(c) = 255,8c^2 - 4\,055,2c + 13\,441,9$. Функція $\Delta F(c)$ досягає мінімуму за $c = 7,93$. Це означає, що одна витрачена кВт*година електроенергії дає змогу виробити 7,93 м³ стисненого повітря заданих параметрів за такого режиму роботи компресора К-250, коли годинне споживання електроенергії знаходиться в інтервалі від 1 113 кВт до 1 290 кВт. Інакше, енергоємність виробництва 1 тис. м³ стисненого повітря приблизно дорівнює 126,1 кВт*годин електроенергії. На рис. 2 зображено пряму – графік пропорційної функції $f(X) = 7,93X$.

Висновки з даного дослідження. Для моделювання виробничої функції реально підприємство необхідно представити як сукупність робочих місць або елементарних виробничих одиниць (ЕВО). Для кожної ЕВО можна отримати виробничу функцію за моделлю (2) виходячи з її виробничої потужності, яка зазвичай є технічною характеристикою обладнання.

Список використаних джерел:

1. Клейнер Г.Б. Экономика. Моделирование. Математика. Избранные труды. Москва : ЦЭМИ РАН, 2016. 856 с.
2. Циганчук Р.О. Моделювання процесу виробництва. Економічні характеристики процесу виробництва та їх взаємозв'язок. *Вісник Університету банківської справи*. 2013. № 1(16). С. 302–306.

3. Янковий В.О. Економіко-математичні властивості виробничої функції Леонт'єва і лінійної функції. *Економіка і суспільство*. 2017. № 9. С. 1238–1244.

References:

1. Kleiner G.B. (2016). *Ekonomika. Modelirovanie. Matematika. Izbrannye trudy* [Economics. Modeling. Mathematics. Selected Works]. Moscow : The Central Economic Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences. (in Russian)
2. Cyghanchuk R.O. (2013). Modeljuvannja procesu vyrobnytva. Ekonomichni kharakterystyky procesu vyrobnytva ta jikh vzajemozv'jazok [Modeling of production process. Economic characteristics of the production process and their relationship]. *Banking University Review*, no 1(16), pp. 302–306.
3. Iankovy V.O. (2017). Ekonomiko-matematychni vlastyvyosti vyrobnychoji funkcciji Leontijeva i linijnoji funkcciji [Economic and mathematical properties of the Leontiev production function and linear function]. *Economy and Society*, no 9, pp. 1238–1244.