

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра вищої математики і інформаційних систем

В.М. Серебrenиков, Т.В. Квітка, О.К. Копайгора

**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА**

(Розділ «Випадкові величини»)

Навчально-методичний посібник

Кривий Ріг
2019 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра вищої математики і інформаційних систем

В.М. Серебренников, Т.В. Квітка, О.К. Копайгора

**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА**
(Розділ «Випадкові величини»)

Навчально-методичний посібник

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики і
інформаційних систем
Протокол № 9
від “26” грудня 2018 р.

Схвалено навчально-методичною радою
ДонНУЕТ ім. М. Туган-Барановського
Протокол № 3
від “31” січня 2019 р.

Кривий Ріг
2019 р

УДК 591.21 (075.8)

Рекомендовано до видання науково-методичною радою Донецького національного університету економіки і торгівлі ім. Михайла Туган-Барановського (протокол № 3 від 31 січня 2019р.)

Рецензенти:

Олійник Т.А., д.т.н., професор, завідувач кафедри ЗКК і хімії Криворізького національного університету.

Тернов С.О., к.т.н., с.н.с., в.о. завідувача кафедри вищої математики та інформаційних систем Донецького національного університету економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського.

Серебrenиков В.М., Квітка Т.В., Копайгора О.К.

Математика для економістів: теорія ймовірностей і математична статистика. Розділ «Випадкові величини» [Текст]: навчально-методичний посібник для здобувачів вищої освіти всіх форм навчання / В.М. Серебrenиков, Т.В. Квітка, О.К. Копайгора; М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. вищої мат. та інформ. систем. – Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2019. – 104с.

Пропонований навчально-методичний посібник є органічним продовженням розділа «Випадкові події» навчально-методичного посібника, який вийшов раніше. Навчально-методичний посібник містить короткі теоретичні відомості з кожної теми, питання, що актуалізують знання, отримані під час лекцій, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування, які можна використати як завдання для контрольних робіт, 30 варіантів індивідуальних та тестових завдань. Рекомендується для використання у процесі навчання вищої математики при вивченні змістового модуля «Теорія ймовірностей і математична статистика».

Наведено список рекомендованої літератури.

УДК 591.21 (075.8)

© Серебrenиков В.М., Квітка Т.В.,
Копайгора О.К., 2019

© Донецький національний університет
економіки і торгівлі
ім. Михайла Туган-Барановського, 2019

З М І С Т

ВСТУП	6
Частина 3. Навчально-методичні матеріали з підготовки до практичних занять по розділу «Випадкові величини»	8
1. Поняття випадкової величини	8
2. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини	8
3. Числові характеристики дискретної випадкової величини	11
4. Моменти дискретної випадкової величини	15
5. Числові характеристики законів дискретних випадкових величин	17
6. Інтегральна функція розподілу	20
7. Диференціальна функція розподілу	23
8. Числові характеристики неперервної випадкової величини	25
9. Моменти неперервної випадкової величини	26
10. Розподіли неперервних випадкових величин	27
11. Система випадкових величин	32
12. Закон розподілу системи дискретних випадкових величин	33
13. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції	34
14. Умовні закони розподілу складових системи дискретних випадкових величин	36
15. Умовне математичне сподівання	38
16. Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції (продовження)	38
17. Інтегральна функція розподілу системи двох випадкових величин	40
18. Диференціальна функція розподілу системи двох випадкових величин ..	42
19. Диференціальні функції розподілу складових системи двох неперервних випадкових величин	44
20. Залежні і незалежні неперервні випадкові величини	47
21. Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин	48
22. Нормальний розподіл на площині	49
Функції випадкових величин	51
23. Закон розподілу функції однієї випадкової величини	51
24. Розподіл функціонального перетворення системи випадкових величин	54
25. Закон розподілу функції кількох випадкових величин	55
26. Визначення математичного сподівання функції випадкових величин ..	58
27. Визначення дисперсії функції випадкових величин	60
28. Визначення кореляційного моменту функції випадкових величин	62
29. Граничні теореми теорії ймовірностей	63

Типові розрахунки	68
Приклади тестових завдань	99
Додаток	101
Література	103

ВСТУП

Навчально-методичний посібник пропонується для роботи на практичних заняттях, а також для самостійної підготовки студентів до практичних занять з навчальної дисципліни «Математика для економістів: теорія ймовірностей і математична статистика».

Передбачається, що самостійна робота з використанням розробленого навчально-методичного посібника допоможе якісно підготуватись до практичних занять та модульних контрольних робіт, розвиватиме вміння та навички самостійної навчальної діяльності.

Наразі надається для самостійного опрацювання матеріал до практичних занять другого модуля («Випадкові величини») відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Математика для економістів: теорія ймовірностей і математична статистика».

В результаті вивчення дисципліни студент повинен **знати**:

- поняття випадкових величин, їх види,
- поняття закону розподілу дискретної випадкової величини,
- основні закони розподілу дискретної випадкової величини,
- поняття і види числових характеристик дискретних випадкових величин,
- поняття інтегральної функції розподілу, її властивості,
- поняття диференціальної функції розподілу, її властивості,
- числові характеристики неперервної випадкової величини,
- поняття системи випадкових величин,
- закони розподілу системи дискретних випадкових величин,
- числові характеристики системи двох випадкових величин,
- інтегральну і диференціальну функції розподілу системи двох випадкових величин,
- нормальний розподіл на площині,
- поняття функції випадкових величин,
- поняття закону розподілу функції кількох випадкових величин,
- визначення числових характеристик функції випадкових величин,
- граничні теореми теорії ймовірностей,

вміти:

- обчислювати ймовірності випадкових величин з використанням відповідних означень і теорем,
- обчислювати числові характеристики випадкових величин.

мати навички:

- самостійної роботи при розширенні своїх математичних знань та освоєнні довідкових систем.

Порядок поточного оцінювання знань студентів з дисципліни

Успішне виконання студентом завдань поточного контролю є обов'язковою умовою участі його в складанні екзамену. Об'єктом поточного контролю знань студента є :

- систематичність та активність роботи протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни,
- виконання завдань для самостійного опрацювання,
- вчасне виконання типових розрахунків.

Результати виконаної роботи подаються студентами в окремому зошиті.

Завдання з типових розрахунків виконуються студентом згідно варіанта в позааудиторний час протягом вивчення дисципліни і здаються у визначений викладачем термін. До захисту типового розрахунку студент допускається при умові правильного виконання всіх завдань.

Навчально-методичний посібник буде корисним студентам усіх форм навчання при підготовці до аудиторних занять, у процесі самоосвіти та при підготовці до контрольних робіт та екзамену з навчальної дисципліни.

ЧАСТИНА 3

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ З ПІДГОТОВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ПО РОЗДІЛУ «ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ»

1. ПОНЯТТЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Означення. **Випадковою величиною** називається така величина, яка в результаті випробування може набувати деякого значення (якого саме – заздалегідь невідомо).

Випадкові величини прийнято позначати останніми великими буквами латинського алфавіту X, Y, Z та інші, а їх значення (реалізації) маленькими буквами – $x, y, z, \dots$

Серед випадкових величин розрізняють дискретні і неперервні.

Означення. **Дискретною випадковою величиною** називається така випадкова величина, яка приймає окремі ізольовані значення, які можна занумерувати.

Прикладами дискретних випадкових величин можуть бути: число очок, що випало на грані грального кубика, кількість студентів, присутніх на лекції.

Множина можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченною або нескінченною зліченою множиною.

Означення. **Неперервною випадковою величиною** називають таку випадкову величину, яка може приймати всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

До неперервних випадкових величин можна віднести такі приклади: довжина стовпчика термометра, значення діаметра обробленої деталі. Множина можливих значень неперервної випадкової величини нескінченна і незлічена. Треба підкреслити, що випадкова величина є узагальненням випадкової події.

2. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Нехай дискретна випадкова величина $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де x_i всі різні і розташовані у зростаючому порядку. Для повної характеристики дискретної випадкової величини, крім переліку всіх її значень, повинні задаватись ймовірності, з якими випадкова величина приймає кожне з них, тобто $p_i = P(X = x_i)$.

Означення. Функція, яка кожному значенню випадкової величини x_i ставить у відповідність величину її ймовірності p_i , називається законом розподілу дискретної випадкової величини.

Аналітично функція задається у вигляді

$$P(X = x_i) = p_i, (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Остання умова визначає, що значення випадкової величини X утворюють повну групу несумісних подій.

Закон розподілу дискретної випадкової величини зручно задавати у вигляді таблиці, яка називається ряд розподілу

Значення	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Ймовірності	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Графічне зображення закону розподілу дискретної випадкової величини називається багатокутником розподілу. Для його побудови на горизонтальній вісі наносять значення дискретної випадкової величини, а на вертикальну вісь – значення ймовірностей, потім точки на площині з'єднуються відрізками.

Треба пам'ятати, що з'єднання вершин ординат робиться тільки з метою наочності, тому що в проміжках між значеннями x_1, x_2, x_3 і т. д. випадкова величина X значень не може прийняти, тому її ймовірності в цих проміжках дорівнюють нулю.

Треба підкреслити, що багатокутники розподілу мають саму різну форму, але вони мають загальну властивість: *сума ординат багатокутника розподілу, яка представляє суму ймовірностей усіх можливих значень випадкової величини, завжди дорівнює одиниці*. Ця властивість витікає з того, що усі можливі значення випадкової величини утворюють повну групу несумісних подій, сума ймовірностей яких дорівнює одиниці.

Види законів розподілу дискретних випадкових величин

1) Рівномірний закон розподілу

Рівномірний закон розподілу аналітично задається формулою

$$P(X = x_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Таблиця розподілу має вигляд

Значення	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
Ймовірності	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

2) Біноміальний закон розподілу

Біноміальний закон розподіл є розподіл ймовірностей появи m числа подій при n незалежних повторних випробуваннях, в кожному з яких поява події A при одному випробуванні дорівнює p . Ймовірність можливого числа появи події обчислюється за формулою Бернуллі.

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} (m = 0, 1, 2, \dots, n), \text{ де } q = 1 - p.$$

$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ – дискретна випадкова величина.

Підкреслимо, що, згідно біному Ньютона, має місце

$$\sum_{m=0}^n P(X = m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1^n = 1$$

Біноміальний розподіл може бути заданий у вигляді таблиці

$X = m$	0	1	2	...	n
$P(X = m)$	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

3) Закон розподілу Пуассона

Якщо число випробувань n досить велике, а ймовірність p появи події A при одному випробуванні мала, то при $\lambda = n \cdot p \leq 10$ доцільно застосувати замість формули Бернуллі наближену формулу Пуассона

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Якщо розглянути дискретне число $X = \{0, 1, 2, \dots, m, \dots\}$, то згідно формулі Пуассона буде мати місце закон розподілу Пуассона

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Зрозуміло, що повинна виконуватися умова

$$\sum_{m=0}^{\infty} P(X = m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Закон розподілу Пуассона може бути заданий у вигляді ряду розподілу:

$X = m$	0	1	2	...	m	...
$P(X = m)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	...

4) Геометричний закон розподілу

Цей закон визначає ймовірність першої появи події A при послідовності незалежних випробувань, якщо ймовірність появи події A задана.

Якщо розглянути дискретне число $X = \{1, 2, \dots, m, \dots\}$ – число випробувань до першої появи події A , то геометричний закон розподілу набуває вигляду

$$P(X = m) = p \cdot (1 - p)^{m-1},$$

де $P(A) = p$.

При цьому виконується умова

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(X = m) = p \cdot \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1,$$

де $q = 1 - p$.

Геометричний закон розподілу може бути заданий у вигляді ряду розподілу:

$X = m$	1	2	3		m	...
$P(X = m)$	p	$p \cdot (1 - p)$	$p \cdot (1 - p)^2$	...	$p(1 - p)^{m-1}$	...

5) Гіпергеометричний закон розподілу

Цей закон визначає ймовірність появи m дефектних деталей при вилученні із партії, яка включає N деталей, з яких k деталей дефектних, n деталей. Аналітично цей закон записується у вигляді

$$P(X = m) = \frac{M_m}{M},$$

де $M = C_N^n$, $M_m = C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}$, $m = 0; 1; \dots; \min(n; k)$, $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ – число сполук із N по n .

Аналогічно записуються інші сполуки $C_k^m = \frac{k!}{m!(m-k)!}$, $C_{N-k}^{n-m} = \frac{(N-k)!}{(n-m)!(N-k-n+m)!}$.

Зрозуміло, що виконується умова

$$\sum_{m=0}^{\min(n; k)} P(X = m) = \frac{1}{C_N^n} \sum_{m=0}^{\min(n; k)} C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m} = 1$$

3. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору. Між тим при розв'язанні багатьох практичних задач немає необхідності характеризувати випадкову величину повністю, а достатньо мати тільки деяке загальне представлення. Як правило, треба виділити тільки деякі характерні риси закона розподілу.

В теорії ймовірностей для характеристики випадкової величини застосовуються числа, які називаються числовими характеристиками випадкових величин.

Головна їх задача – в стислій формі висловити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілу.

По-перше, про кожну випадкову величину треба знати її деяке середнє значення, навколо якого групуються можливі значення випадкової величини.

По-друге, число, яке характеризує ступінь розкиданості значень випадкової величини біля її середнього значення. Застосовують також і інші числові характеристики. Розглянемо найбільш поширені числові характеристики.

Математичне сподівання. Математичне сподівання є найбільш важливою характеристикою розташування випадкової величини. Іноді математичне сподівання називають просто середнім значенням випадкової величини. Для дискретної випадкової величини X , яка задана законом розподілу

$$P(X = x_i) = p_i, (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

математичне сподівання є число, яке визначається рівністю

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Отже, математичним сподіванням дискретної випадкової називається не випадкове число, яке дорівнює сумі добутків значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Поняття математичного сподівання має просту механічну інтерпретацію. Дійсно, розподіл ймовірностей можна інтерпретувати механічно, як розподіл мас на прямій. Уся розподілена на прямій маса приймається рівній одиниці. Дискретної випадкової величини X , що має можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ відповідає пряма з зосередженими в точках з абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_n$ масами $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Слід зауважити, що зустрічаються і такі випадкові величини, для яких математичне сподівання не існує. Однак такі випадкові величини зустрічаються досить рідко. Зазвичай випадкові величини, з якими ми маємо справу на практиці, мають математичне сподівання.

Відзначимо найпростіші властивості математичного сподівання.

Властивість 1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній, тобто

$$M[C] = C.$$

Дійсно, постійну величину C можна розглядати як окремий випадок величини, яка з ймовірністю, яка дорівнює одиниці, приймає тільки одне значення. Тоді маємо

$$M[C] = 1 \cdot C = C$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак математичного очікування, тобто

$$M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$$

Дійсно, маємо

$$M[C \cdot X] = \sum_{i=1}^n C \cdot x_i \cdot p_i = C \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = C \cdot M[X].$$

Мода і медіана дискретної випадкової величини.

Моду M_0 дискретної випадкової величини називається не випадкове число, яке дорівнює найімовірнішому її значенню.

Якщо багатокутник розподілу має кілька максимумів, то розподіл називається багатомодальним.

Медіаною M_D дискретної випадкової величини називається не випадкове число, відносно якого рівноймовірно здобуття більшого або меншого значення випадкової величини, тобто

$$P(X < M_D) = P(X > M_D).$$

Зауважимо, що якщо розподіл одномодальний і симетричний, то

$$M[X] = M_0 = M_D.$$

Дисперсія і середньоквадратичне відхилення.

Для характеристики випадкової величини недостатньо знати тільки її числові характеристики розташування, тому що однаковому математичному сподіванню можуть відповідати нескінченна множина випадкових величин. Значення випадкових величин більш-менш коливаються біля середнього значення, тобто має місце розсіювання біля середнього значення.

Числові характеристики, які характеризують розсіювання випадкової величини навколо середнього значення, називаються характеристиками розсіювання.

Основними характеристиками розсіювання випадкової величини є дисперсія і середньоквадратичне відхилення.

При визначенні цих характеристик застосовується центрування випадкової величини відносно її математичного сподівання, що позначається так

$$\overset{0}{X} = X - M[X].$$

Очевидно, що закон розподілу $\overset{0}{X}$ збігається з законом розподілу X .

Математичне сподівання $\overset{0}{X}$ дорівнює нулю. Дійсно, має місце

$$M\left[\overset{0}{X}\right] = M[X - M[X]] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - M[X] \sum_{i=1}^n p_i = M[X] - M[X] \cdot 1 = 0.$$

Але якщо математичне сподівання центрованої випадкової величини X дорівнює нулю для будь-якої випадкової величини X , то, звичайно, воно не характеризує розсіювання її значень, вказуючи лише, що значення відхилення – числа різного знака. Тому в якості міри розсіювання випадкової величини беруть математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$M[(X - M[X])^2],$$

яке називають дисперсією випадкової величини X і позначають $D[X]$.

Отже, **дисперсією** випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення величини від її математичного сподівання. Для дискретної випадкової величини дисперсія виражається сумою

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 \cdot p_i.$$

Дисперсія випадкової величини є зручною характеристикою розсіювання можливих значень випадкової величини. Однак вона позбавлена наочності, бо має розмірність квадрата випадкової величини. Для більшої зручності бажано мати характеристику, яка по розмірності збігається з розмірністю випадкової величини. Такий характеристикою є середньоквадратичне відхилення випадкової величини, яке являє собою квадратний корінь з її дисперсії. Позначають середньоквадратичне відхилення випадкової величини X символом

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}.$$

Розглянемо найпростіші властивості дисперсії.

Властивість 1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю:

$$D[C] = 0.$$

Дійсно, якщо в даних умовах величина X може мати тільки одне значення C , то, відповідно до першого властивістю математичного очікування

$$M[C] = C.$$

Тоді за визначенням дисперсії

$$D[C] = M[(C - M[C])^2] = M[(C - C)^2] = 0.$$

Властивість 2. Дисперсія добутку постійної величини на випадкову величину дорівнює добутку квадрата постійної величини на дисперсію випадкової величини

$$D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X].$$

Дійсно, на підставі визначення дисперсії і другого властивості математичного сподівання маємо

$$\begin{aligned} D[C \cdot X] &= M[(C \cdot X - M[C \cdot X])^2] = M[(C \cdot X - CM[X])^2] = M[C^2 \cdot (X - M[X])^2] = \\ &= C^2 \cdot M[(X - M[X])^2] = C^2 \cdot D[X]. \end{aligned}$$

Властивість 3. Дисперсія случайної величини дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Дійсно, згідно визначення дисперсії і математичного сподівання, маємо для дискретної випадкової величини

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - M[X])^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot M[X] + (M[X])^2) \cdot p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - 2 \cdot M[X] \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i + (M[X])^2 \cdot \sum_{i=1}^n p_i = M[X^2] - 2(M[X])^2 + (M[X])^2 = \\ &= M[X^2] - (M[X])^2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для характеристики розсіювання випадкової величини X часто використовують ймовірне (середнє) відхилення, яке позначають через E_x .

Ймовірним відхиленням називається половина довжини ділянки, симетричного щодо математичного сподівання, ймовірність попадання в якій дорівнює половині, тобто

$$P(|X - M[X]| < E_x) = 0,5.$$

Геометрично ймовірне відхилення E_x є половина довжини ділянки осі абсцис, симетричного відносно математичного сподівання, на який спирається половина площі, обмеженої кривою розподілу.

4. Моменти дискретної випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів випадкової величини. Сама назва «момент» запозичене з механіки, де це поняття застосовується для опису розподілу мас.

У теорії ймовірностей розрізняють моменти двох видів: початкові і центральні.

Початковим моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k , тобто

$$\alpha_k = M[X^k].$$

Отже, для дискретної випадкової величини початковий момент виражається сумою

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i.$$

З початкових моментів випадкової величини особливе значення має момент першого порядку, який є математичне сподівання випадкової величини. Початкові моменти вищих порядків використовуються для обчислення центральних моментів.

Центральним моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання

$$\mu_k = M[(X - M[X])^k].$$

Для дискретної випадкової величини центральний момент k -го порядку виражається сумою

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^k \cdot p_i.$$

Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю.

Серед центральних моментів випадкової величини особливе значення має центральний момент другого порядку, який представляє дисперсію випадкової величини.

Крім центрального моменту другого порядку, в теорії ймовірностей для опису випадкової величини широко застосовуються центральні моменти третього і четвертого порядків.

Третій центральний момент μ_3 служить характеристикою асиметрії («скошеності») розподілу. Якщо випадкова величина X розподілена симетрично щодо свого математичного сподівання, то третій центральний момент дорівнює нулю.

Тому що третій центральний момент має розмірність куба випадкової величини, то розглядають безрозмірну величину коефіцієнт асиметрії

$$a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Четвертий центральний момент μ_4 служить для характеристики гостровершинності або плосковершинності розподілу. Ці властивості розподілу описуються за допомогою ексцесу.

Ексцесом випадкової величини X називається невідхилювана величина

$$C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Число 3 віднімається з відношення тому, що для нормального закону розподілу (з яким ми познайомимися надалі) ексцесу дорівнює 0. Крива нормального розподілу прийнята як би за еталон, з яким порівнюються інші розподіли.

Криві більш островершинні мають додатній ексцес; криві більш плосковершинні – негативний.

Крім розглянутих початкових і центральних моментів, на практиці іноді застосовуються абсолютні моменти.

Абсолютний початковий момент k – порядку визначається формулою

$$\beta_k = M[|X|^k],$$

а абсолютний центральний момент k – порядку – формулою

$$\nu_k = M[|X - M[X]|^k].$$

З визначення абсолютних моментів слід, що абсолютні моменти парних порядків збігаються з звичайними моментами. З абсолютних моментів непарного порядку часто застосовується перший абсолютний центральний момент

$$\nu_1 = M[|X - M[X]|],$$

який називається середнім арифметичним відхиленням.

Середнє арифметичне відхилення, поряд з дисперсією і середнім квадратичним відхиленням, застосовується як характеристика розсіювання випадкової величини.

5. Числові характеристики відомих розподілів дискретних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу аналітично задається у вигляді

$$\begin{cases} P(X = x_i) = \frac{1}{n} \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1 \end{cases}.$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини X знаходиться по формулі

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

В свою чергу дисперсія визначається по формулі

$$D[X] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \frac{1}{n} - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2.$$

Таким чином, для рівномірного закону розподілу числові характеристики знаходяться через арифметичні середні.

Біноміальний закон розподілу аналітично задається у вигляді

$$\begin{cases} P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \\ \sum_{m=1}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1 \end{cases}.$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини X знаходиться по формулі

$$M[X] = \sum_{m=0}^n m \cdot C_n^m p^m q^{n-m}$$

Для обчислення суми продифференціюємо по p такий вираз

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m},$$

що дасть

$$n(p + q)^{n-1} = \sum_{m=0}^n m C_n^m p^{m-1} q^{n-m}.$$

Помноживши ліву і праву частину рівності на p , маємо

$$n(p + q)^{n-1} p = \sum_{m=0}^n m C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Враховуючи вираз для математичного сподівання і те, що

$$p + q = 1,$$

маємо

$$M[X] = n \cdot p.$$

Отже, математичне сподівання числа наступів події в серії незалежних і однакових випробувань дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події при одному випробуванні.

Для обчислення дисперсії біноміального розподілу використовуємо формулу

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Знайдемо спочатку

$$M[X^2] = \sum_{i=0}^n m^2 C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Для обчислення суми продифференціюємо двічі по p

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^n m(m-1)C_n^m p^{m-2} q^{n-m}.$$

Помноживши обидві частини отриманого рівності на p^2 , матимемо

$$n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^n m(m-1)C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Звідси, враховуючи, що $p+q=1$, отримуємо

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^n m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^n m C_n^m p^m q^{n-m},$$

або

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^n m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - n \cdot p.$$

$$\text{Тоді } n^2 p^2 - np^2 = M[X^2] - n \cdot p, \quad M[X^2] = n^2 p^2 - np^2 + n \cdot p.$$

Таким чином, маємо

$$D[X] = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2, \quad D[X] = np - np^2, \quad D[X] = np(1-p), \quad D[X] = npq.$$

Звідси визначаємо середнє квадратичне відхилення для біноміального закону розподілу

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}.$$

Розподіл Пуассона аналітично записується у вигляді

$$\begin{cases} P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \\ \sum_{m=0}^{\infty} P(X = m) = 1 \end{cases}.$$

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини X

$$M[X] = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{(m-1)!} = e^{-a} a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}.$$

$$M[X] = e^{-a} a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} a \cdot e^a = a.$$

Визначимо дисперсію випадкової величини X . Для обчислення дисперсії використовуємо формулу

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Знаходимо

$$M[X^2] = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} ((m-1) + 1) \frac{a^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$M[X^2] = ae^{-a} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} \right) = ae^{-a} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-2)!} + e^a \right)$$

$$M[X^2] = ae^{-a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-2)!} + a = a^2 e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} + a = a^2 e^{-a} e^a + a = a^2 + a$$

Тоді $D[X] = a^2 + a - a^2 = a$.

Таким чином, дисперсія випадкової величини, що має розподіл Пуассона, чисельно дорівнює її математичному сподіванню.

Геометричний закон розподілу аналітично записується у вигляді

$$\begin{cases} P(X = m) = p \cdot q^{m-1} \\ \sum_{m=1}^{\infty} P(X = m) = 1 \end{cases}.$$

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини X

$$M[X] = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot p \cdot q^{m-1} = p \sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1}$$

Маємо суму нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}.$$

Диференціюємо її по q

$$\sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Тоді маємо, домножаючи на p .

$$p \sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} = \frac{p}{(1-q)^2},$$

Тобто

$$M[X] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Знайдемо дисперсію цієї випадкової величини X

Для обчислення дисперсії використовуємо формулу

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Знаходимо

$$M[X^2] = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 p q^{m-1}.$$

Маємо суму нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q},$$

яку двічі диференціюємо

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) q^{m-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Домножаємо на q

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)q^{m-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

і перетворюємо

$$p \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} - p \sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} = \frac{2qp}{(1-q)^3}$$

$$M[X^2] = \frac{2qp}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-2p+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$D[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$D[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Гіпергеометричний закон розподілу аналітично записується так

$$P(X = m) = \frac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \dots, \min(n, k).$$

Математичне сподівання дорівнює

$$M[X] = \frac{k \cdot n}{N}.$$

Дисперсія дорівнює

$$D[X] = \frac{k \cdot n \cdot (N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

6. Інтегральна функція розподілу

Ряд розподілу є зручною формою подання закону розподілу для дискретної випадкової величини з кінцевим числом можливих значень. Однак ряд розподілу взагалі не можна побудувати для неперервної випадкової величини. Дійсно, безперервна випадкова величина має безліч можливих значень, які суцільно заповнюють деякий проміжок, і перерахувати їх в будь-якої таблиці неможливо. Крім того, кожне окреме значення неперервної випадкової величини не має ніякою відмінною від нуля ймовірності. Отже, для неперервної випадкової величини не існує ряду розподілу в тому сенсі, в якому він існує для дискретної випадкової величини. В силу цього бажано мати таку характеристику розподілу ймовірності, яка була б застосована для різних випадкових величин. Найбільш загальною формою закону розподілу випадкової величини X є інтегральна функція розподілу.

Означення. Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називається невід'ємна функція, яка визначає ймовірність виконання події $\{X < x\}$, що розглядається як функції аргументу x

$$F(x) = P(X < x).$$

З визначення інтегральної функції розподілу випливає, що вона існує для всіх випадкових величин: як дискретних, так і безперервних. Інтегральна функція розподілу повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору, це означає, що вона є однією з форм закону розподілу.

Визначення інтегральної функції розподілу має просту геометричну інтерпретацію. Якщо розглядати випадкову величину як випадкову точку X осі Ox , яка в результаті експеримента може зайняти те чи інше місце, то інтегральна функція розподілу $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова точка X в результаті експеримента потрапляє лівіше точки x .

Для дискретної випадкової величини X , яка може приймати значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, інтегральна функція розподілу матиме вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

де символ $x_i < x$ під знаком суми означає, що підсумовування поширюється на всі ті можливі значення випадкової величини, які за своєю величиною менше аргументу x .

З виразу випливає, що інтегральна функція розподілу дискретної випадкової величини X розривна і зростає стрибками при переході через точки можливих її значень $x_1, x_2, \dots, x_n$, причому величина стрибка дорівнює ймовірності відповідного значення.

Розглянемо загальні властивості інтегральної функції розподілу.

Властивість 1. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ є невід'ємна функція, яка знаходиться між нулем і одиницею

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Справедливість цієї властивості випливає з того, що функція розподілу $F(x)$ визначена як ймовірність випадкової події $\{X < x\}$.

Властивість 2. Ймовірність появи випадкової величини в напівінтервалі $[\alpha, \beta)$, дорівнює різниці значень інтегральної функції розподілу в кінцях

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Дійсно, розглянемо три події

$$A = \{X < \beta\}, \quad B = \{X < \alpha\}, \quad C = \{\alpha \leq X < \beta\}.$$

Тоді

$$A = B + C.$$

По теоремі додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(A) = P(B) + P(C),$$

або

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leq X < \beta).$$

Таким чином,

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Перейдемо в рівності до границі при $\beta \rightarrow \alpha$. Тоді замість ймовірності попадання випадкової величини X в напівінтервал $[\alpha, \beta)$ отримаємо ймовірність того, що ця величина прийме окреме значення α

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} P(\alpha \leq X < \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)].$$

Значення цієї границі залежить від того, чи є безперервною функцією $F(x)$ в точці α , чи терпить розрив. Якщо в точці α функція $F(x)$ має розрив, то границя дорівнює значенню стрибка функції $F(x)$ в точці α . Якщо ж функція $F(x)$ в точці α неперервна, то ця границя дорівнює нулю.

Так як неперервна випадкова величина X має неперервну інтегральну функцію розподілу $F(x)$, то з рівності нулю границі для неперервної інтегральної функції $F(x)$ в точці α слід, що і ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Властивість 3. Функція розподілу випадкової величини є неспадаюча функція, тобто при $\alpha < \beta$

$$F(\alpha) \leq F(\beta).$$

Дійсно, згідно властивості 2 маємо

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leq X < \beta),$$

або

$$F(\alpha) \leq F(\beta),$$

оскільки $P(\alpha \leq X < \beta) \geq 0$, $\alpha \leq \beta$.

Властивість 4. На мінус нескінченності інтегральна функція розподілу дорівнює нулю, а на плюс нескінченності інтегральна функція розподілу дорівнює одиниці, тобто

$$F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$$

Дійсно,

$$\{X < -\infty\} = \emptyset, \quad \{X < +\infty\} = \Omega,$$

тому

$$F(-\infty) = P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0, \quad F(+\infty) = P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1.$$

Розглянуті властивості інтегральної функції розподілу можна сформулювати так: кожна інтегральної функція розподілу є невід'ємною неспадаючою функцією, що задовольняє умовам $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Протилежне твердження також має місце, тобто кожна функція, яка задовольняє переліченим умовам, може бути функцією розподілу деякої випадкової величини. У подальшому ми будемо називати неперервними ті випадкові величини, інтегральна функція розподілу яких всюди неперервна. Внаслідок властивості 2 для неперервної випадкової величини має місце

$$P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta).$$

7. Диференціальна функція розподілу

Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини є її вичерпної ймовірнісної характеристикою. Але вона має недолік, який полягає в тому, що по ній важко судити про характер розподілу випадкової величини в невеликому околі тієї або іншої точки числової осі. Більш наочне уявлення про характер розподілу неперервної випадкової величини в окілах різних точок дається функцією, яка називається щільністю розподілу ймовірності або диференціальним функцією розподілу випадкової величини.

Нехай є безперервна випадкова величина X з інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Обчислимо ймовірність попадання цієї випадкової величини на елементарну ділянку $(x, x + \Delta x)$

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Складемо відношення цієї ймовірності до довжини ділянки Δx

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Отримане відношення називається середньою ймовірністю, яка припадає на одиницю довжини цієї ділянки.

Вважаючи інтегральну функцію розподілу $F(x)$ диференційованою, перейдемо в до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, що дасть

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Границя відношення ймовірності попадання неперервної випадкової величини на елементарну ділянку від x до $x + \Delta x$ до довжини цієї ділянки Δx , коли Δx прямує до нуля, називається диференціальною функцією розподілу випадкової величини в точці x і позначається $f(x)$.

В силу останньої рівності диференціальною функцією розподілу $f(x)$ дорівнює похідною від інтегральної функції розподілу $F(x)$, тобто

$$f(x) = F'(x).$$

Зміст диференціальної функції розподілу $f(x)$ полягає у тому, що вона вказує на те, як часто з'являється випадкова величина X в деякому околі точки x при повторенні дослідів.

Крива, що зображує диференціальну функцію розподілу $f(x)$ випадкової величини, називається кривою розподілу.

Виділимо на осі абсцис елементарну ділянку Δx , яка примикає до точки x , і знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X на цю ділянку. З одного боку, ця ймовірність дорівнює приросту $\Delta F(x)$ інтегральної функції розподілу $F(x)$, відповідному збільшенню $\Delta x = dx$ аргумента x . З іншого боку, ймовірність попадання випадкової величини X на елементарну ділянку Δx з точністю до нескінченно малих вищого порядку, ніж Δx , дорівнює $f(x)dx$ (так як $\Delta F(x) \approx dF(x) = f(x)dx$). Геометрично, це є площа елементарного

прямокутника з висотою $f(x)$ і основою dx . Величина $f(x)dx$ називається елементом ймовірності.

Розглянемо властивості диференціальної функції розподілу $f(x)$.

Властивість 1. Диференціальна функція розподілу невід'ємна, тобто

$$f(x) \geq 0.$$

Ця властивість випливає з того, що диференціальна функція розподілу $f(x)$ є похідна від неспадаючої інтегральної функції розподілу $F(x)$.

Властивість 2. Інтегральна функція розподілу випадкової величини дорівнює інтегралу від диференціальної функції розподілу в інтервалі від $-\infty$ до x

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Дійсно, маємо

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x dF(t) = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

Властивість 3. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини X на ділянку (α, β) дорівнює інтегралу від диференціальної функції розподілу, взятому по цій ділянці, тобто

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Дійсно, на підставі властивості інтегральної функції розподілу маємо

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Але

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt, \quad F(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(t)dt,$$

тому

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f(t)dt - \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

Властивість 4. Інтеграл в нескінченних межах від диференціальної функції розподілу дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Дійсно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1.$$

8. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичне сподівання.

Розглянемо неперервну випадкову величину X , всі можливі значення якої належать відрізку $[a, b]$. Нехай $f(x)$ є диференціальна функція розподілу величини X . Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n часткових відрізків, довжини яких позначимо через $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Візьмемо в кожному частковому відрізку по одній точці, абсциси яких позначимо відповідно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так як добуток $f(x_i)\Delta x_i$ приблизно дорівнює ймовірності попадання випадкової величини X на елементарну ділянку Δx_i , то сума добутоків

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i \approx M[X].$$

Перейшовши до границі в сумі при прямуванні до нуля довжини найбільшого з часткових відрізків Δx_i , отримаємо визначний інтеграл

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b xf(x)dx.$$

Отже, математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать відрізку $[a, b]$, називають визначний інтеграл

$$M[X] = \int_a^b xf(x)dx.$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать всій осі Ox , то математичне сподівання визначається інтегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Властивість 1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній, тобто

$$M[C] = C.$$

Дійсно,

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} Cf(x)dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = C \cdot 1 = C$$

Властивість 2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання

$$M[C \cdot X] = CM[X].$$

Дійсно,

$$M[C \cdot X] = \int_{-\infty}^{+\infty} Cx \cdot f(x)dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = C \cdot M[X].$$

Дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення величини від її математичного сподівання, тобто

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx.$$

Властивість 1. Дисперсія постійної величини дорівнює нулю.

Дійсно, враховуючи, що $M[C] = C$, маємо

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (C - C)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot f(x) dx = 0.$$

Властивість 2. Дисперсія добутку постійної величини на випадкову величину дорівнює добутку квадрата постійної величини на дисперсію випадкової величини

$$D[C \cdot X] = C^2 \cdot D[X].$$

Дійсно, враховуючи, що $M[CX] = CM[X]$, маємо

$$D[C \cdot X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (Cx - CM[X])^2 f(x) dx = D[C \cdot X] = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx = C^2 D[X].$$

Властивість 3. Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} D[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2xM[X] + (M[X])^2) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2M[X] \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx + (M[X])^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = M[X^2] - 2(M[X])^2 + (M[X])^2 = M[X^2] - (M[X])^2. \end{aligned}$$

9. Моменти неперервної випадкової величини

Початковим моментом k -го порядку неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральним моментом k -го порядку неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M[X])^k$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k f(x) dx.$$

10. Розподіли неперервних випадкових величин

1. Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, якщо на цьому відрізку щільність розподілу випадкової величини постійна, а поза ним дорівнює нулю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b \end{cases}$$

де $C = \text{const}$.

Так як площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці, то щільність рівномірного розподілу на відрізку $[a, b]$, як висота прямокутника з основою $(b - a)$, дорівнює

$$C = \frac{1}{b - a},$$

і, отже, щільність розподілу $f(x)$ має вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ для рівномірного розподілу на (a, b) по ділянкам

$$x \leq a \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0,$$

$$a < x \leq b \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \frac{1}{b - a} \int_a^x dt = 0 + \frac{x - a}{b - a} = \frac{x - a}{b - a},$$

$$b < x \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot dt + \frac{1}{b - a} \int_a^b dt + \int_b^x 0 \cdot dt = 0 + \frac{b - a}{b - a} + 0 = 1.$$

Таким чином, інтегральна функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a < x < b. \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Неперервна випадкова величина X підпорядковується рівномірному закону розподілу, якщо її можливі значення лежать в межах деякого певного інтервалу, крім того, в межах цього інтервалу все значення випадкової величини однаково ймовірні (мають одну і ту ж щільність ймовірності).

Визначимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , що має рівномірний розподіл на ділянці від a до b .

Маємо

$$M[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

тобто математичне сподівання рівномірного розподілу знаходиться посередині інтервалу його розподілу.

Дисперсію випадкової величини X знаходимо по формулі

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - M[X])^2] = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3(b-a)} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{3(b-a)} \left[\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{24(b-a)} [(2b-a-b)^3 - (2a-a-b)^3] = \frac{1}{24(b-a)} [(b-a)^3 + (b-a)^3] = \\ &= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Звідки середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}.$$

Нарешті, знайдемо ймовірність попадання випадкової величини, що має рівномірний розподіл, на інтервал (α, β) , що представляє собою частину інтервалу (a, b)

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

2. Показниковий розподіл.

У практичних застосуваннях теорії ймовірностей, особливо в теорії масового обслуговування, дослідженні операцій, у фізиці, біології, питаннях надійності та інших застосуваннях, часто мають справу з випадковими величинами, що мають так зване експоненціальний, або показниковий, розподіл.

Неперервна випадкова величина X розподілена по показниковому закону, якщо її щільність ймовірності має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

де λ – числовий параметр.

Функцію розподілу величини X знайдемо за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

по ділянкам

$$x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0,$$

$$x \geq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dt + \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda \cdot x}.$$

Таким чином, маємо

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Визначимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X , що має показниковий розподіл. Математичне сподівання знаходимо, інтегруючи частинами,

$$M[X] = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda} (-t e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt) = \frac{1}{\lambda} (0 - e^{-t} \Big|_0^{+\infty}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Для знаходження дисперсії використовуємо формулу

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.$$

Спочатку знаходимо, двічі інтегруючи по частинах

$$M[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda \cdot x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Отже,

$$D[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Звідси визначаємо середнє відхилення для показникового розподілу

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким чином, у показникового розподілу математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення однакові

$$M[X] = \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

3. Нормальний розподіл.

Серед розподілів неперервних випадкових величин центральне місце займає нормальний закон (закон Гаусса), щільність ймовірності якого має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a , σ – параметри нормального розподілу.

Нормальний закон розподілу широко поширений в задачах практики. Він проявляється у всіх тих випадках, коли випадкова величина X є результатом дії великої кількості різних факторів. Кожен фактор окремо на величину X впливає незначно і не можна вказати, який саме в більшій мірі, ніж інші. Прикладами випадкових величин, що мають нормальний розподіл, можуть служити: відхилення дійсних розмірів деталей, оброблених на верстаті, від номінальних розмірів, помилки при вимірюванні, відхилення при стрільбі та інші. Основна особливість, що виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу.

Функція розподілу випадкової величини, що має нормальний розподіл, матиме вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left| \begin{array}{l} z = \frac{t-a}{\sigma} \\ t = \sigma \cdot z + a \\ dt = \sigma \cdot dz \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію нормального розподілу.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} z = \frac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma \cdot z + a \\ dx = \sigma \cdot dz \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma \cdot z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Оскільки,

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$ (інтеграл Пуасона), $\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$ (тому, що підінтегральна функція є непарна функція), то

$$M[X] = a.$$

Отже, параметр a є математичним сподіванням випадкової величини, що має нормальний розподіл.

Дисперсія нормального розподілу визначається за формулою

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} z = \frac{x-a}{\sigma} \\ x = \sigma \cdot z + a \\ dx = \sigma \cdot dz \end{array} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = z \\ dv = z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ du = dz \\ v = -e^{-\frac{z^2}{2}} \end{array} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-z \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] = \sigma^2.$$

Тобто

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Таким чином, параметр σ є середньоквадратичне відхилення випадкової величини, що має нормальний розподіл.

Графік щільності ймовірності нормального розподілу називають **нормальною кривою** (кривою Гаусса).

Відзначимо деякі властивості нормальної кривої.

- 1) Крива симетрична відносно ординати, що проходить через точку a .
- 2) Крива має один максимум при $x = a$, рівний $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- 3) При $|x| \rightarrow \infty$ гілки кривої асимптотично наближаються до осі Ox .
- 4) Зміна математичного сподівання при $\sigma = \text{const}$ призводить до зміщення кривої розподілу уздовж осі Ox . При цьому крива розподілу зберігає свій вигляд.
- 5) При зміні середнього квадратичного відхилення σ і $a = \text{const}$ крива розподілу змінює свій вигляд, але зберігає площу, яка дорівнює одиниці.

4. Ймовірність попадання нормальної випадкової величини на задану ділянку. Функція Лапласа.

Ймовірність заданого відхилення нормальної випадкової величини від її математичного сподівання. Правило трьох сігм.

Якщо випадкова величина X задана щільністю ймовірності $f(x)$, то ймовірність попадання величини X на ділянку (α, β) обчислюється по формулі

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу, то, враховуючи, що

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

маємо

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа. Цей інтеграл не виражається через

кінцеве число елементарних функцій і є затабульованим.

Функція Лапласа має наступні властивості.

1. $\Phi(0) = 0$
2. $\Phi(+\infty) = 0,5$
3. Функція Лапласа $\Phi(x)$ є функція непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Справді,

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \left| \begin{array}{l} z = -t \\ dz = -dt \\ z = -x \Rightarrow t = x \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\Phi(x).$$

Відзначимо важливий окремий випадок формули, яке дозволяє обчислити ймовірність заданого відхилення Δ від математичного сподівання

$$P(|X - a| < \Delta) = P(a - \Delta < X < a + \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Скористаємося формулою і знайдемо ймовірність попадання нормальної випадкової величини X з параметрами a і σ на інтервал $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9973$$

Таким чином, для нормально розподіленої випадкової величини X з параметрами a і σ виконання нерівності $|X - a| < 3\sigma$ практично достовірно.

У цьому полягає так зване «правило трьох сигм».

11. Система випадкових величин

При вивченні випадкових явищ в залежності від їх складності доводиться використовувати дві, три і більше випадкових величин. Наприклад, людину можна характеризувати двома випадковими величинами: вагою і зрістом.

При різних вимірах часто маємо справу з двома або трьома випадковими величинами. Спільний розгляд двох або декількох випадкових величин приводить до системи випадкових величин. Домовимося систему кількох випадкових величин $X, Y, \dots, W$ позначати $(X, Y, \dots, W)$. При вивченні системи випадкових величин недостатньо вивчити окремо випадкові величини, що становлять систему, необхідно враховувати ще й зв'язку або залежності між цими величинами. Тут виникають нові, відмінні від розглянутих раніше, завдання.

При розгляді системи випадкових величин зручно користуватися геометричній інтерпретацією системи. Так, наприклад, систему двох випадкових величин (X, Y) можна розглядати як випадкову точку на площині xOy з координатами X і Y або як випадковий вектор на площині з випадковими координатами X і Y . Систему трьох випадкових величин (X, Y, Z) можна розглядати як випадкову точку в тривимірному просторі або як випадковий вектор в просторі. За аналогією, систему n випадкових величин $(X, Y, \dots, W)$ можна розглядати як випадкову точку в n -вимірному просторі або як n -мірний випадковий вектор.

Так як систему випадкових величин можна трактувати як систему випадкових векторів, то теорію систем випадкових величин можна розглядати як теорію випадкових векторів.

Залежно від типу випадкових величин, що утворюють систему, можуть бути системи дискретних і неперервних випадкових величин, а також змішані системи, в які входять випадкові величини різних типів.

При вивченні систем випадкових величин обмежимося вивченням системи двох випадкових величин, так як всі положення, що стосуються системи двох

випадкових величин, можна легко поширити на систему трьох, чотирьох і більше випадкових величин.

12. Закон розподілу системи дискретних випадкових величин

Законом розподілу системи дискретних випадкових величин називається не випадкова функція, яке встановлює зв'язок між областями можливих значень системи дискретних випадкових величин та ймовірностями появи системи цих величин в цих областях.

Так само як і для однієї випадкової величини, закон розподілу системи дискретних випадкових величин може бути заданий в різних формах.

Нехай X і Y – дискретні випадкові величини, можливі значення яких (x_i, y_k) , де $i=1,2,\dots,M$, а $k=1,2,\dots,N$. Тоді розподіл системи таких випадкових величин може бути охарактеризоване значенням ймовірностей $p_{ik} = P(X = x_i; Y = y_k)$ того, що випадкова величина X прийме значення x_i і одночасно з цим випадкова величина Y прийме значення y_k . В аналітичній формі цей закон має вигляд

$$P(X = x_i; Y = y_k) = p_{ik},$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N p_{ik} = 1.$$

Разом з цим, цей закон можна представити у вигляді таблиці.

$\begin{matrix} y_k \\ x_i \end{matrix}$	y_1	y_2	$\dots$	y_N	$\sum_{k=1}^N p_{ik}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1N}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2N}	$p_{2\bullet}$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
x_M	p_{M1}	p_{M2}	$\dots$	p_{MN}	$p_{M\bullet}$
$\sum_{i=1}^M p_{ik}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\dots$	$p_{\bullet N}$	1

Така таблиця називається таблицею розподілу системи двох дискретних випадкових величин з кінцевим числом можливих значень.

Всі можливі події $(X = x_i; Y = y_k)$ при $i=1,2,\dots,M$, $k=1,2,\dots,N$ складають повну групу несумісних подій, тому

$$\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N p_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N P(X = x_i; Y = y_k) = 1.$$

При цьому

$$\sum_{k=1}^N p_{ik} = p_{i\bullet} = P(X = x_i), \quad \sum_{i=1}^M p_{ik} = p_{\bullet k} = P(Y = y_k).$$

13. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції.

Закони розподілу системи випадкових величин є вичерпними ймовірносними характеристиками її. Однак часто така вичерпна характеристика не може бути застосована. Іноді обмеженість експериментального матеріалу не дає можливості побудувати закон розподілу системи.

При дослідженнях, пов'язаних з системами випадкових величин, велике застосування знайшли їх числові характеристики, які в певній мірі можуть дати уявлення також і про характер закону розподілу.

В основу отримання числових характеристик системи випадкових величин покладено поняття моментів. Як і для однієї випадкової величини, тут розрізняють початкові і центральні моменти.

Початковим моментом α_{mn} порядку $m+n$ системи (X, Y) називається математичне сподівання добутку m -ого ступеня X на n -у ступінь Y

$$\alpha_{mn} = M[X^m \cdot Y^n].$$

Для системи двох дискретних випадкових величин ця формула записується у вигляді

$$\alpha_{mn} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N x_i^m y_k^n p_{ik}.$$

На практиці найбільш вживаними є початкові моменти першого порядку

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N x_i^1 y_k^0 p_{ik} = \sum_{i=1}^M x_i \sum_{k=1}^N p_{ik} = \sum_{i=1}^M x_i p_{i\bullet} = M[X], \\ \alpha_{01} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N x_i^0 y_k^1 p_{ik} = \sum_{k=1}^N y_k \sum_{i=1}^M p_{ik} = \sum_{k=1}^N y_k p_{\bullet k} = M[Y], \end{aligned}$$

які є математичними сподіваннями випадкових величин X і Y , що входять в систему. Ці математичні сподівання визначають координати точки, яка називається центром розсіювання системи на площині.

Центральним моментом μ_{mn} порядку $m+n$ системи (X, Y) називається математичне сподівання добутку m -ого і n -го ступенів відповідних центрованих величин

$$\mu_{mn} = M[(X - M[X])^m (Y - M[Y])^n].$$

Для системи двох дискретних випадкових величин ця формула записується у вигляді

$$\mu_{mn} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^m (y_k - M[Y])^n p_{ik}.$$

Треба підкреслити, що центральні моменти першого порядку дорівнюють нулю

$$\begin{aligned}\mu_{10} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^1 (y_k - M[Y])^0 p_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X]) p_{ik} = \sum_{i=1}^M (x_i - M[X]) \sum_{k=1}^N p_{ik} = \\ &= \sum_{i=1}^M (x_i - M[X]) p_{i\bullet} = \sum_{i=1}^M x_i p_{i\bullet} - M[X] \sum_{i=1}^M p_{i\bullet} = M[X] - M[X] \cdot 1 = 0 \\ \mu_{01} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^0 (y_k - M[Y])^1 p_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y]) p_{ik} = \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y]) \sum_{i=1}^M p_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y]) p_{\bullet k} = \sum_{k=1}^N y_k p_{\bullet k} - M[Y] \sum_{k=1}^N p_{\bullet k} = M[Y] - M[Y] \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

У практиці найбільше застосування мають центральні моменти другого порядку. Два з них представляють собою дисперсії величин X і Y

$$\begin{aligned}\mu_{20} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^2 (y_k - M[Y])^0 p_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^2 p_{ik} = \sum_{i=1}^M (x_i - M[X])^2 \sum_{k=1}^N p_{ik} = \\ &= \sum_{i=1}^M (x_i - M[X])^2 p_{i\bullet} = D[X], \\ \mu_{02} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])^0 (y_k - M[Y])^2 p_{ik} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])^2 p_{ik} = \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])^2 \sum_{i=1}^M p_{ik} = \\ &= \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])^2 p_{\bullet k} = D[Y],\end{aligned}$$

які характеризують розсіювання випадкової точки (X, Y) в напрямку осей Ox і Oy .

Особливу роль при дослідженні системи двох випадкових величин відіграє другий змішаний центральний момент μ_{11} , який називається **кореляційним моментом**, або моментом зв'язку. Він позначається

$$k_{xy} = \mu_{11} = M[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])].$$

Для дискретних випадкових величин формула приймає вигляд

$$k_{xy} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X]) (y_k - M[Y]) p_{ik}.$$

Кореляційний момент k_{xy} , який визначається як математичне сподівання добутку відхилень двох випадкових величин від їх математичних сподівань, крім розсіювання величин X і Y , може характеризувати взаємний вплив цих випадкових величин. Для оцінки ступеня цього впливу зазвичай використовують не сам кореляційний момент k_{xy} , а безрозмірне відношення

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

яке називають коефіцієнтом кореляції випадкових величин X і Y .

Так як розмірність k_{xy} дорівнює добутку розмірностей X і Y , σ_x має розмірність X , σ_y – розмірність Y , то r_{xy} є безрозмірна величина. Таким чином, величина коефіцієнта кореляції не залежить від вибору одиниць вимірювання.

14. Умовні закони розподілу складових системи дискретних випадкових величин

Поняття залежності або незалежності випадкових величин є одним з найважливіших понять теорії ймовірностей.

Відомо, що якщо події A і B залежні, то ймовірність добутку подій $A \cdot B$ знаходиться по формулі

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B / A),$$

де $P(A)$ – ймовірність події A , $P(B / A)$ – умовна ймовірність події B .

Тоді умовна ймовірність визначається так

$$P(B / A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Аналогічна формула має місце і для випадкових величин. Для того, щоб охарактеризувати залежність між складовими двовимірної випадкової величини вводиться поняття умовного розподілу.

Розглянемо двовимірну дискретну випадкову величину (X, Y) , яка приймає значення (x_i, y_k) , $i = 1, 2, \dots, M$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Нехай, в результаті іспиту випадкова величина Y прийняла значення $Y = y_1$. При цьому випадкова величина X може прийняти значення одне із можливих значень x_1 , або x_2 , ..., або x_M . Позначимо умовну ймовірність того, що X , наприклад, прийме значення x_1 , коли $Y = y_1$, через $p(x_1 / y_1)$. Зрозуміло, що в загальному випадку

$$p(x_1 / y_1) \neq p(x_1).$$

У загальному випадку, умовні ймовірності позначатися будуть так

$$P(X = x_i / Y = y_k) = p(x_i / y_k) = p_{i \bullet / k}, \quad (i = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, \dots, N).$$

Умовним розподілом складової X при $Y = y_k$ називається сукупність умовних ймовірностей $p(x_1 / y_k) = p_{1 \bullet / k}$, $p(x_2 / y_k) = p_{2 \bullet / k}$, ..., $p(x_M / y_k) = p_{M \bullet / k}$, обчислених при умові, що подія $Y = y_k$ наступила.

Аналогічно, визначається умовний розподіл складової Y .

Умовним розподілом складової Y при $X = x_i$ називається сукупність умовних ймовірностей $p(y_1 / x_i) = p_{\bullet 1 / i}$, $p(y_2 / x_i) = p_{\bullet 2 / i}$, ..., $p(y_N / x_i) = p_{\bullet N / i}$, обчислених при умові, що подія $X = x_i$ наступила.

Знаючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини можна обчислити умовні закони розподілу складових.

Наприклад, умовний закон розподілу X при умові, що подія $Y = y_1$ відбулася, записується у вигляді

$$p(x_i / y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} = \frac{p_{i1}}{p_{\bullet 1}}.$$

Дійсно, нехай маємо

$$p_{i1} = P(X = x_i; Y = y_1).$$

Позначимо події $A = \{X = x_i\}$, $B = \{Y = y_1\}$, тоді $P(X = x_i; Y = y_1) = P(A \cdot B)$.

Враховуючи, що $P(B \cdot A) = P(B) \cdot P(A/B)$, або $P(X = x_i; Y = y_1) = P(Y = y_1) \cdot P(X = x_i / Y = y_1)$.

Розв'язуючи, отримуємо

$$P(X = x_i / Y = y_1) = \frac{P(X = x_i; Y = y_1)}{P(Y = y_1)},$$

або

$$p(x_i / y_1) = \frac{p(x_i, y_1)}{p(y_1)} = \frac{p_{i1}}{p_{\bullet 1}}.$$

В загальному випадку умовні закони розподілу випадкової величини X визначаються формулою

$$p(x_i / y_k) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(y_k)} = \frac{p_{ik}}{p_{\bullet k}}.$$

Аналогічно визначаються закони розподілу випадкової величини Y

$$p(y_k / x_i) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)} = \frac{p_{ik}}{p_{i\bullet}}.$$

Підкреслимо, що сума ймовірностей умовного розподілу дорівнює одиниці.

Дійсно,

$$\sum_{i=1}^M p(x_i / y_k) = \sum_{i=1}^M \frac{p(x_i, y_k)}{p(y_k)} = \frac{1}{p(y_k)} \sum_{i=1}^M p(x_i, y_k) = \frac{1}{p(y_k)} p(y_k) = 1.$$

Випадкова величина X називається **незалежною** від випадкової величини Y , якщо закон розподілу величини X не залежить від того, яке значення прийняла величина Y .

Таким чином, якщо дискретна випадкова величина X не залежить від Y , то

$$P(X = x_i / Y = y_k) = P(X = x_i),$$

тобто ймовірність події $X = x_i$ не залежить від того, відбулася чи не відбулася подія $Y = y_k$. В результаті маємо

$$p(x_i) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(y_k)},$$

тобто

$$p(x_i, y_k) = p(x_i) \cdot p(y_k).$$

Аналогічно, якщо дискретна випадкова величина Y не залежить від X , то

$$P(Y = y_k / X = x_i) = P(Y = y_k),$$

тобто ймовірність події $Y = y_k$ не залежить від того, відбулася чи не відбулася подія $X = x_i$. В результаті маємо

$$p(y_k) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)},$$

тобто

$$p(x_i, y_k) = p(x_i) \cdot p(y_k).$$

Таким чином, якщо X не залежить від Y , то і Y не залежить від X . Це дозволяє говорити про незалежність X і Y .

15. Умовне математичне сподівання

Важливою характеристикою умовного розподілу є умовне математичне сподівання.

Умовним математичним сподіванням дискретної випадкової величини Y при $X = x$ (x – фіксоване значення) називається не випадкове число, яке дорівнює добутку можливих значень Y на їх умовні ймовірності

$$M[Y / X = x] = \sum_{k=1}^N y_k \cdot p(y_k / x).$$

Умовне математичне сподівання $M[Y / X = x]$ є функцією від x , яку називають функцією регресії Y на X

$$M[Y / X = x] = f(x).$$

Аналогічно визначається умовне математичне сподівання дискретної випадкової величини X при $Y = y$ (y – фіксоване значення)

$$M[X / Y = y] = \sum_{i=1}^M x_i \cdot p(x_i / y).$$

Умовне математичне сподівання $M[X / Y = y]$ є функцією від y , яку називають функцією регресії X на Y

$$M[X / Y = y] = \varphi(y).$$

16. Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції (продовження)

Як показано вище, кореляційний момент і коефіцієнт кореляції обчислюються за формулами

$$k_{xy} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])],$$

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Визначимо властивості цих числових характеристик.

Властивість 1. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то кореляційний момент і коефіцієнт кореляції дорівнюють нулю.

Дійсно, для дискретних випадкових величин маємо

$$k_{xy} = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])(y_k - M[Y]) p_{ik}$$

Враховуючи, що для незалежних дискретних випадкових величин має місце

$$p_{ik} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet k},$$

можна записати

$$\begin{aligned} k_{xy} &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i - M[X])(y_k - M[Y])p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet k} = \sum_{i=1}^M (x_i - M[X])p_{i\bullet} \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])p_{\bullet k} \\ &= \left(\sum_{i=1}^M x_i p_{i\bullet} - M[X] \sum_{i=1}^M p_{i\bullet} \right) \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])p_{\bullet k} = \\ &= (M[X] - M[X] \cdot 1) \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])p_{\bullet k} = 0 \cdot \sum_{k=1}^N (y_k - M[Y])p_{\bullet k} = 0. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що і коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Властивість 2. Абсолютна величина кореляційного моменту двох випадкових величин не перевищує середнього геометричного їх дисперсій

$$|k_{xy}| \leq \sqrt{D[X] \cdot D[Y]}$$

Дійсно, нехай

$Z = \sigma_y X - \sigma_x Y$, тоді, враховуючи, що

$M[Z] = \sigma_y M[X] - \sigma_x M[Y]$, маємо

$$\begin{aligned} D[Z] &= M[(Z - M[Z])^2] = M[(\sigma_y X - \sigma_x Y - \sigma_y M[X] + \sigma_x M[Y])^2] = M[(\sigma_y (X - M[X]) - \sigma_x (Y - M[Y]))^2] = \\ &= M[\sigma_y^2 (X - M[X])^2 - 2\sigma_x \sigma_y (X - M[X])(Y - M[Y]) + \sigma_x^2 (Y - M[Y])^2] = \\ &= \sigma_y^2 \sigma_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y (X - M[X])(Y - M[Y]) + \sigma_x^2 \sigma_y^2 = 2\sigma_y^2 \sigma_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y k_{xy}. \end{aligned}$$

Оскільки, $2\sigma_y^2 \sigma_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y k_{xy} \geq 0$, то $k_{xy} \leq \sigma_x \sigma_y$.

Нехай $Z = \sigma_y X + \sigma_x Y$, тоді $2\sigma_y^2 \sigma_x^2 + 2\sigma_x \sigma_y k_{xy} \geq 0$ і $k_{xy} \geq -\sigma_x \sigma_y$. Таким чином,

$$-\sigma_x \sigma_y \leq k_{xy} \leq \sigma_x \sigma_y, \text{ тобто } |k_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y.$$

Властивість 3. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції двох випадкових величин не перевищує одиниці

$$|r_{xy}| \leq 1.$$

Дійсно, враховуючи $|k_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$, маємо $\left| \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right| \leq 1$.

Дві випадкові величини X і Y називаються некорельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції дорівнює нулю; X і Y називаються корельованими, якщо їх коефіцієнт кореляції відмінний від нуля.

Таким чином, якщо випадкові величини X і Y незалежні, то вони і некорельовані. Але з некорельованості випадкових величин не можна в загальному випадку зробити висновок про їх незалежність, тобто якщо дві випадкові величини залежні, то вони можуть бути і корельовані, і некорельовані.

17. Інтегральна функція розподілу системи двох випадкових величин.

Інтегральною функцією розподілу системи двох випадкових величин називається не випадкова функція двох аргументів $F(x, y)$, що дорівнює ймовірності спільного виконання двох нерівностей $X < x$ і $Y < y$, тобто

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y).$$

Геометрично інтегральна функція розподілу системи двох випадкових величин є ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в лівий нижній нескінченний квадрант площини з вершиною в точці (x, y) .

Властивість 1. Інтегральна функція розподілу системи двох випадкових величин знаходиться в межах від нуля до одиниці

$$0 \leq F(x, y) \leq 1.$$

Оскільки,

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y),$$

а

$$0 \leq P(X < x; Y < y) \leq 1.$$

Властивість 2. Якщо один з аргументів $F(x, y)$ прагне до плюс нескінченності, то інтегральна функція розподілу системи прагне до інтегральної функції розподілу однієї випадкової величини, що відповідає іншому аргументу, тобто

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) = F_1(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F(+\infty, y) = F_2(y).$$

У цій властивості інтегральної функції розподілу легко переконатися наочно, відсуваючи одну з меж квадранта в $+\infty$. При цьому квадрант перетворюється в напівплощину. Імовірність же попадання випадкової точки в таку напівплощину є інтегральна функція розподілу однієї з величин, що входять в систему.

Властивість 3. Якщо обидва аргументи інтегральної функції розподілу $F(x, y)$ прагнуть до плюс нескінченності, то інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ прагне до одиниці, тобто

$$\lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty}} F(x, y) = F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Дійсно, при $x \rightarrow +\infty$ і $y \rightarrow +\infty$ квадрант з вершиною (x, y) обертається у всю координатну площину xOy , потрапляння випадкової точки в яку є достовірною подією.

Властивість 4. При прагненні одного або обох аргументів інтегральної функції $F(x, y)$ до мінус нескінченності інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ прагне до нуля, тобто

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = F(-\infty, y) = 0, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow -\infty}} F(x, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

Дійсно, відсуваючи ту чи іншу межу квадранта (або обидві межі) в мінус нескінченність, переконуємося, що ймовірність попадання випадкової точки в квадрант дорівнює нулю.

Властивість 5. Функція розподілу $F(x, y)$ є неспадною функцією по кожному аргументу, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

Розглянемо наступні три події

$$A = (X < x_1; Y < y), \quad B = (x_1 \leq X < x_2; Y < y), \quad C = (X < x_2; Y < y).$$

Тоді $C = A + B$. По теоремі додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(C) = P(A) + P(B).$$

Але

$$P(A) = P(X < x_1; Y < y) = F(x_1, y), \quad P(C) = P(X < x_2; Y < y) = F(x_2, y), \quad P(B) = P(x_1 \leq X < x_2; Y < y),$$

тому

$$F(x_2, y) = F(x_1, y) + P(x_1 \leq X < x_2; Y < y).$$

Так як будь-яка ймовірність є число невід'ємне, то

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y).$$

Аналогічно доводиться, що

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

Властивість 6. Ймовірність влучення випадкової точки (X, Y) в довільний прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям, обчислюється за формулою

$$P(x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Дійсно, візьмемо прямокутну область з вершинами (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) , (x_2, y_2) .

Розглянемо наступні події

$$A = (x_1 \leq X < x_2; y_1 \leq Y < y_2), \quad B = (x_1 \leq X < x_2; Y < y_1), \quad C = (X < x_1; y_1 \leq Y < y_2),$$

$$D = (X < x_1; Y < y_1), \quad E = (X < x_2; Y < y_2).$$

Подія E є сума несумісних подій A , B , C і D , тобто

$$E = A + B + C + D.$$

По теоремі додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D),$$

Звідки

$$P(A) = P(E) - P(B) - P(C) - P(D)$$

Висловимо ймовірність правій частині рівності через значення інтегральної функції розподілу $F(x, y)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(X < x_2; Y < y_2) = F(x_2; y_2), \\ P(B) &= P(x_1 \leq X < x_2; Y < y_1) = F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1), \\ P(C) &= P(X < x_1; y_1 \leq Y < y_2) = F(x_1, y_2) - F(x_1, y_1), \\ P(D) &= P(X < x_1; Y < y_1) = F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Підставляючи отримані значення ймовірностей в рівність і привівши подібні члени, отримаємо

$$P(A) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

18. Диференціальна функція розподілу системи двох випадкових величин

Інтегральна функція розподілу $F(x, y)$, розглянута в попередньому параграфі, є універсальною характеристикою системи двох випадкових величин. Вона може бути застосована для опису систем як дискретних, так і для неперервних випадкових величин. Основне практичне значення мають системи неперервних випадкових величин, розподіл яких характеризується не інтегральною функцією розподілу $F(x, y)$, а диференціальною функцією розподілу системи неперервних випадкових величин.

Диференціальна функція розподілу системи неперервних випадкових величин є вичерпною характеристикою системи неперервних випадкових величин, за допомогою якої розрахунок ймовірностей попадання в різні області проводиться простіше, а опис розподілу системи стає більш наочним.

Нехай є система двох неперервних випадкових величин (X, Y) . Розглянемо ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник зі сторонами Δx і Δy , що примикає до точки з координатами (x, y)

$$P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Розділимо отриману ймовірність на площу цього прямокутника і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right] = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F(x, y + \Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

$$f(x, y) = F''_{xy}(x, y).$$

Функція $f(x, y)$ називається диференціальною функцією розподілу системи неперервних випадкових величин (X, Y) .

Таким чином, диференціальна функція розподілу системи двох випадкових величин є границя відношення ймовірності попадання випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник до площі цього прямокутника, коли обидва його розміру прагнуть до нуля; вона може бути обчислена як друга мішана похідна від інтегральної функції розподілу системи неперервних випадкових величин (X, Y) .

Геометрично функцію $f(x, y)$ можна зобразити деякою поверхнею, яку називають **поверхнею розподілу**.

Розглядаючи диференціальну функцію розподілу $f(x)$ для однієї випадкової величини X , було введено поняття «елемента ймовірності» $f(x)dx$, що виражає ймовірність попадання випадкової величини X на елементарну ділянку dx . Аналогічно вводиться поняття «елемента ймовірності» і для системи двох випадкових величин. Елемент ймовірності $f(x, y)dxdy$ системи двох випадкових величин дає можливість визначити ймовірність попадання випадкової точки в елементарний прямокутник зі сторонами dx і dy , що примикає до точки (x, y) . Геометрично елемент ймовірності є об'єм елементарного паралелепіпеда, що спирається на елементарний прямокутник зі сторонами dx і dy і з висотою $f(x, y)$.

Отже, знаючи диференціальну функцію розподілу $f(x, y)$, можемо визначити ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) в довільну область D . Ця ймовірність може бути отримана підсумовуванням елементів ймовірності по всій області D і граничного переходу, коли найбільший прямокутник зі сторонами Δx і Δy стягується в точку

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Властивість 1. Диференціальна функція розподілу $f(x, y)$ є функція невід'ємна.

Диференціальна функцію розподілу $f(x, y)$ є границя відношення ймовірності попадання випадкової точки в прямокутник зі сторонами Δx і Δy к площі цього прямокутника (при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$). Обидві ці величини – невід'ємні. Отже, і границя їх відношення не може бути від'ємним, тобто $f(x, y) \geq 0$.

Властивість 2. Інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ відновлюється через диференціальну функцію розподілу $f(x, y)$ згідно формулі

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v)dudv.$$

Дійсно,

$$F(x, y) = P(X < x; Y < y) = P(-\infty < X < x; -\infty < Y < y) = \iint_D f(u, v)dudv,$$

де $D = \{(u, v) \mid -\infty < u < x; -\infty < v < y\}$.

Переходячи від подвійного інтеграла до повторних, маємо

$$\iint_D f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv ,$$

тобто

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv .$$

Властивість 3. Подвійний інтеграл з нескінченними межами від диференціальної функції розподілу $f(x, y)$ дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 .$$

Дійсно, $F(+\infty, +\infty) = 1$, тоді

$$F(+\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1 .$$

19. Диференціальні функції розподілу складаючих системи двох неперервних випадкових величин

Нехай відома диференціальна функція розподілу системи двох випадкових величин $f(x, y)$. Розглянемо спочатку знаходження диференціальних функцій розподілу однієї величини, тобто $f_1(x)$ і $f_2(y)$.

Маємо, згідно властивості $F(x, y)$

$$F_1(x) = F(x; +\infty), \quad F_2(y) = F(+\infty; y) .$$

Згідно формулі відновлення $F(x, y)$ по $f(x, y)$, маємо

$$F_1(x) = F(x; +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy ,$$

$$F_2(y) = F(+\infty; y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy .$$

Звідси, диференціюючи першу рівність по x , а друге по y , отримаємо вирази для диференціальних функцій розподілу окремих величин, що входять в систему

$$f_1(x) = F_1'(x) = F'(x; +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy ,$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = F'(+\infty; y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx .$$

Таким чином, для того щоб отримати диференціальну функцію розподілу однієї з величин, що входять в систему, потрібно диференціальну функцію розподілу системи проінтегрувати в нескінченних межах по аргументу, відповідному іншій випадковій величині.

Перейдемо тепер до розв'язання оберненої задачі: по відомих законам розподілу окремих величин, що входять в систему, знайти закон розподілу системи. Як легко бачити, в загальному випадку ця задача нерозв'язна. Дійсно, закони розподілу окремих випадкових величин, що входять в систему, характеризують кожен з випадкових величин окремо, але нічого не говорять про те, як вони пов'язані між собою. З іншого боку, шуканий закон розподілу системи повинен містити всі відомості про випадкових величинах системи, в тому числі і про характер зв'язків між ними.

Таким чином, якщо випадкові величини X і Y залежні між собою, то закон розподілу системи не може бути виражений через закони розподілу окремих випадкових величин, що входять в систему. Це призводить до необхідності введення **умовних законів розподілу**.

Розподіл однієї випадкової величини, що входить в систему, знайдений за умови, що інша випадкова величина, що входить в систему, прийняла певне значення, називається умовним законом розподілу.

Умовний закон розподілу можна задавати як інтегральною функцією розподілу, так і щільністю розподілу. Умовна інтегральна функція розподілу позначається $F(x/y)$, умовна щільність розподілу — $f(x/y)$ (записані умовні закони розподілу випадкової величини X за умови, що інша випадкова величина Y прийняла певне значення). Так як системи неперервних випадкових величин мають основне практичне значення, то обмежимося розглядом умовних щільностей розподілу.

Згідно з визначенням щільності розподілу для випадкової величини X за умови, що випадкова величина Y прийняла певне значення, маємо

$$f(x/y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x / Y = y)}{\Delta x}.$$

Але в силу безперервності випадкової величини Y

$$P(Y = y) = 0.$$

Тоді вираз

$$P(x < X < x + \Delta x / Y = y) = \frac{P(x < X < x + \Delta x; Y = y)}{P(Y = y)}$$

не має змісту, оскільки знаменник дорівнює нулю.

Отже, праву частину рівності потрібно удосконалити, не змінюючи її зміст. Це можна зробити, замінивши умову ($Y = y$) новою ($y < Y < y + \Delta y$) і спрямувавши потім Δy до нуля.

Таким чином, прийемо наступне визначення умовної щільності розподілу

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x / y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x}.$$

По теоремі множення

$$P(x < X < x + \Delta x / y < Y < y + \Delta y) = \frac{P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y)}{P(y < Y < y + \Delta y)}.$$

Отже, рівність можна переписати так

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot P(y < Y < y + \Delta y)}.$$

Розділивши чисельник і знаменник на Δy , отримаємо

$$f(x/y) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{\frac{P(x < X < x + \Delta x; y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}}{\frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y}} = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Аналогічно отримуємо

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Використовуючи обидва співвідношення, можна записати, що

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y).$$

Звідси видно, що для визначення щільності розподілу системи необхідно в загальному випадку знання щільності розподілу однієї випадкової величини, що входить в систему, і умовної щільності розподілу іншої випадкової величини, що входить в цю систему.

Здобуту рівність часто називають *теоремою множення законів розподілу*. Ця теорема в схемі випадкових величин аналогічна правилом множення ймовірностей для випадкових подій.

Застосовуючи правила визначення щільності розподілу випадкових величин, що входять в систему, здобуті формули можна переписати так

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}, \quad f(y/x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}.$$

Умовна щільність розподілу має всі властивості безумовної щільності розподілу. Зокрема,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x) dy = 1.$$

Наприклад,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx} = 1.$$

Для короткого опису умовних законів розподілу можна використовувати різні характеристики, подібно до того, як для одновимірних розподілів.

Найбільш важливою характеристикою є умовне математичне очікування.

Умовним математичним сподіванням неперервної випадкової величини X при $Y = y$ (y – визначення значення випадкової величини Y) називається вираз

$$M[X/Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x/y) dx.$$

Аналогічно, умовним математичним сподіванням неперервної випадкової величини Y при $X = x$ називається вираз

$$M[Y/X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x) dy.$$

З визначення умовного математичного сподівання $M[X/Y = y]$ слідує, що зі зміною значення y буде змінюватися і $M[X/Y = y]$. Це означає, що можна розглядати функцію $M[X/Y = y] = \varphi(y)$, областю визначення якої є безліч можливих значень випадкової величини Y . Ця функція носить назву регресії X по Y . Аналогічно умовне математичне сподівання $M[Y/X = x]$ є функцією x , тобто $M[Y/X = x] = \psi(x)$, яка носить назву регресії Y по X .

Рівняння $x = \varphi(y)$ і $y = \psi(x)$ називаються рівняннями регресії, відповідно, X по Y і Y по X .

Лінії, що визначаються цими рівняннями називаються лініями регресії. Ці лінії вводяться лише для неперервних випадкових величин (для дискретних випадкових величин «лінії регресії» будуть складатися з ізольованих точок на площині).

20. Залежні і незалежні неперервні випадкові величини

Випадкова величина X називається незалежною від випадкової величини Y , якщо закон розподілу величини X не залежить від того, яке значення прийняла величина Y .

Для неперервних випадкових величин умова незалежності X від Y може бути записано у вигляді

$$f(x/y) = f_1(x),$$

при будь-якому y .

Якщо ж випадкова величина X залежить від випадкової величини Y , то

$$f(x/y) \neq f_1(x),$$

при будь-якому y .

Можна показати, що якщо величина X не залежить від Y , то і величина Y не залежить від X , тобто залежність або незалежність випадкових величин завжди взаємні.

Дійсно, нехай X не залежить від Y

$$f(x/y) = f_1(x).$$

Але

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y),$$

тоді

$$f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f_1(x),$$

тобто

$$f(y/x) = f_2(y).$$

Таким чином, випадкові величини X і Y називаються незалежними, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, яке значення прийняла інша. В іншому випадку випадкові величини X і Y називаються залежними.

Теорема. Для того щоб неперервні випадкові величини X і Y були незалежними, необхідно і достатньо, щоб щільність розподілу системи (X, Y) дорівнювала б добутку щільності розподілу окремих величин, що входять в систему

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Необхідність. Нехай X і Y – незалежні випадкові величини, тоді

$$f(x/y) = f_1(x), \quad f(y/x) = f_2(y).$$

Але

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Достатність. Нехай $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Але

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_2(y)} = f_1(x),$$

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y)}{f_1(x)} = f_2(y).$$

Наслідок. Якщо щільність розподілу $f(x, y) = \alpha(x) \cdot \beta(y)$ подана в вигляді добутку двох співмножників, перший з яких містить тільки x , а другий – тільки y , то випадкові величини X і Y незалежні.

21. Числові характеристики системи двох неперервних випадкових величин.

Формула для обчислення початкових моментів системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) порядку $k + s$ записуються в такий спосіб

$$\alpha_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x, y) dx dy,$$

де $f(x, y)$ – щільність розподілу системи.

Формула для обчислення центральних моментів системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) порядку $k + s$ записуються наступним чином

$$\mu_{ks} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^k (y - M[Y])^s f(x, y) dx dy.$$

Зокрема,

$$M[X] = \alpha_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x, y) dx dy, \quad M[Y] = \alpha_{01} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x, y) dx dy,$$

$$D[X] = \mu_{20} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])^2 f(x, y) dx dy, \quad D[Y] = \mu_{02} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y])^2 f(x, y) dx dy.$$

Кореляційний момент запишеться у вигляді

$$k_{xy} = \mu_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f(x, y) dx dy.$$

Наприклад, якщо неперервні випадкові величини X і Y незалежні, то маємо

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Тоді

$$k_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X])(y - M[Y]) f_1(x) f_2(y) dx dy,$$

або

$$\begin{aligned} k_{xy} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M[X]) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y]) f_2(y) dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx - M[X] \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx \right) \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y]) f_2(y) dy = \\ &= (M[X] - M[X] \cdot 1) \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y]) f_2(y) dy = 0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M[Y]) f_2(y) dy = 0, \end{aligned}$$

тобто $k_{xy} = 0$.

22. Нормальний розподіл на площині

З усіх законів розподілу системи двох випадкових величин найбільше поширення на практиці має нормальний розподіл.

Розглянемо спочатку нормальний розподіл для системи двох незалежних випадкових величин.

Нехай X і Y - нормально розподілені і незалежні випадкові величини, а відповідають їм щільності розподілу мають вигляд

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Отже, щільність розподілу системи (X, Y) на підставі теореми множення щільностей розподілу для випадку незалежних величин отримаємо у вигляді

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right]}.$$

Якщо центр розсіювання системи збігається з початком координат, то $m_x = m_y = 0$, і отже, має місце канонічна форма нормального розподілу на площині

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot 2\pi} e^{-\frac{1}{2}[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}]}$$

Підрахуємо для знайденого розподілу ймовірність попадання в прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат. Прямокутник обмежений абсциссами x_1, x_2 і ординатами y_1, y_2 . Застосовуючи загальну формулу для розрахунку ймовірності попадання випадкової точки в довільну область дорозглянутого випадку, запишемо вихідне вираз для шуканої ймовірності у вигляді

$$P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(y) dy = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} dy.$$

Звідси, застосовуючи формулу для ймовірності попадання нормальної випадкової величини на інтервал, знаходимо

$$P(x_1 < X < x_2; y_1 < Y < y_2) = [\Phi\left(\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}\right)] [\Phi\left(\frac{y_2 - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - m_y}{\sigma_y}\right)].$$

Розглянемо тепер нормальний розподіл на площині для залежних випадкових величин. Щільність нормального розподілу для системи двох залежних випадкових величин X і Y виражається формулою

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}]}$$

Цей закон залежить від п'яти параметрів $m_x, m_y, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$.

Якщо випадкові величини X і Y некорельовані, то $r_{xy} = 0$, але в цьому випадку

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} e^{-\frac{1}{2}[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}]} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x) \cdot f_2(y),$$

тобто X і Y незалежні.

Таким чином, для нормально розподілених випадкових величин має місце, що якщо вони некорельовані, то вони і незалежні.

На закінчення розглянемо умовні закони нормального розподілу. Будемо мати

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy}$$

$$\text{Враховуючи, що } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \text{ маємо}$$

$$f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]+\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Аналогічно отримуємо

$$f(x/y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]+\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}.$$

Перетворюючи показник ступеня при е, отримаємо

$$f(y/x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)\sigma_y^2}\left[y-m_y-r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2},$$

$$f(x/y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)\sigma_x^2}\left[x-m_x-r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-m_y)\right]^2}.$$

Аналізуючи отримані вирази, ми бачимо, що вони являють собою щільності нормального закону з центрами розсіювання відповідно

$$M[Y/X=x] = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), \quad M[X/Y=y] = m_x + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y)$$

і середніми квадратичними відхиленнями

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1-r_{xy}^2}, \quad \sigma_{x/y} = \sigma_x \sqrt{1-r_{xy}^2}.$$

Формули показують, що лінії регресії Y по X і X по Y в разі нормального розподілу є прямими лініями

$$y = m_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), \quad x = m_x + r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y),$$

які проходять через точку (m_x, m_y) , тобто через центр розподілу системи (X, Y)

Функції випадкових величин

23. Закон розподілу функції однієї випадкової величини

При розв'язанні завдань, пов'язаних з оцінкою точності роботи різних автоматичних систем, точності виробництва окремих елементів систем і ін., часто доводиться розглядати функції однієї або кількох випадкових величин. Такі функції теж є випадковими величинами. Тому при вирішенні таких завдань необхідно знати закони розподілу фігурують в задачі випадкових

величин. При цьому зазвичай закон розподілу системи випадкових аргументів відомий і відома функціональна залежність.

Таким чином, виникає задача, яку можна сформулювати наступним чином. Дана система випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, закон розподілу якої відомий. Розглядається деяка випадкова величина Y як функція випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Потрібно визначити закон розподілу випадкової величини Y , знаючи вид функції і закон спільного розподілу її аргументів.

Почнемо з розгляду найбільш простий завдання, що відноситься до цього класу: завдання про закон розподілу функції одного випадкового аргументу

$$Y = \varphi(X).$$

У дискретному випадку рішення цього завдання просте. Дійсно, нехай X – дискретна випадкова величина, що має закон розподілу

$$P(X = x_i) = p_i,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Тоді $Y = \varphi(X)$ – також дискретна випадкова величина з можливими значеннями $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n)$. Якщо всі значення $y_1, y_2, \dots, y_n$ різні, то для кожного $k = 1, 2, \dots, n$ події $\{X = x_k\}$ і $\{Y = \varphi(x_k) = y_k\}$ тотожні. Отже,

$$P(Y = y_k) = P(X = x_k) = p_k,$$

і шуканий закон розподілу має вигляд

$$P(Y = y_i = \varphi(x_i)) = p_i,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Якщо ж серед чисел $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2), \dots, y_n = \varphi(x_n)$ є однакові, то групи однакових значень $y_k = \varphi(x_k)$ потрібно об'єднати і відповідні ймовірності p_k скласти.

Для неперервних випадкових величин завдання ставиться так: знаючи щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X , знайти щільність розподілу $g(y)$ випадкової величини $Y = \varphi(X)$.

При вирішенні поставленого завдання розглянемо два випадка.

1. Випадок монотонної функції. Припустимо спочатку, що функція $y = \varphi(x)$ є монотонно зростаючою, неперервною і диференційованою на інтервалі (a, b) , на якому лежать всі можливі значення величини X (в окремому випадку, коли область можливих значень X нічим не обмежена, $a = -\infty, b = +\infty$). Тоді зворотна функція $x = \psi(y)$ існує, при цьому є також монотонно зростаючою, неперервною і диференційовною функцією.

Задамо на осі Оу інтервал $(y, y + \Delta y)$ і відобразимо його за допомогою функції $x = \psi(y)$ на вісь Ох; отримаємо інтервал $(x, x + \Delta x)$. Події $(y < Y < y + \Delta y)$ і $(x < X < x + \Delta x)$ тотожні. Тому $P(y < Y < y + \Delta y) = P(x < X < x + \Delta x)$ і, отже, маємо

$$g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x) \cdot x'(y),$$

тобто

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y).$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ є монотонно спадною, то збільшенню $\Delta y > 0$ відповідає приріст $\Delta x < 0$. Отже,

$$g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{|\Delta x|} \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| = f(x) \cdot |x'(y)|.$$

Об'єднуючи обидва випадки і враховуючи, що $x = \psi(y)$, отримуємо: якщо $y = \varphi(x)$ -монотона диференційована функція, то

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|.$$

Доведемо одну важливу властивість лінійного перетворення випадкової величини.

Теорема. Лінійне перетворення випадкової величини не змінює виду закону розподілу.

Доведення. Нехай випадкова величина Y пов'язана з випадковою величиною X лінійної функціональною залежністю

$$Y = aX + b,$$

де a, b – невідповідні числа.

Оскільки вираз $y = ax + b$ визначає монотонну функцію, то зворотна функція

$$x = \psi(y) = \frac{y - b}{a}$$

також монотонна. Далі, маємо

$$\psi'(y) = \frac{1}{a}.$$

Використовуючи загальну формулу, отримуємо

$$g(y) = f\left(\frac{y - b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}.$$

Отриманий вираз показує, що лінійне перетворення випадкової величини X рівнозначно зміні масштабу зображення кривої розподілу $f(x)$ і переносу початку координат в нову точку. Вид кривої $f(x)$ при такому перетворенні не змінюється. Це означає, що лінійне перетворення випадкової величини не змінює виду закону її розподілу.

2. Випадок немонотонної функції. Є неперервна випадкова величина X з щільністю розподілу $f(x)$. Друга випадкова величина Y пов'язана з X функціональною залежністю

$$Y = \varphi(X),$$

причому функція $y = \varphi(x)$ така, що зворотня функції $x = \psi(y)$ неоднозначна, тобто одному значенню величини y відповідає кілька значень аргумента x , які ми позначимо через $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, ..., $x = \psi_n(y)$ де n – число ділянок, на яких функція $y = \varphi(x)$ змінюється монотонно.

Зрозуміло, що подія $\{y < Y < y + \Delta y\}$ відбувається при настанні хоча б одного з декількох несумісних подій $\{x_1 < X < x_1 + \Delta x_1\}$, ..., $\{x_n < X < x_n + \Delta x_n\}$.

Застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, отримуємо, що

$$P(y < Y < y + \Delta y) = \sum_{i=1}^n P(x_i < X < x_i + \Delta x_i).$$

Отже,

$$g(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n P(x_i < X < x_i + \Delta x_i)}{\Delta y}.$$

Застосовуючи теорему про границю суми і зробивши перетворення під знаком суми, отримаємо

$$g(y) = \sum_{i=1}^n \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \left[\frac{P(x_i < X < x_i + \Delta x_i)}{|\Delta x_i|} \left| \frac{\Delta x_i}{\Delta y} \right| \right] = \sum_{i=1}^n f(\psi_k(y)) \cdot |\psi'_k(y)|.$$

24. Розподіл функціонального перетворення системи випадкових величин

Нехай система двох випадкових величин (U, V) є результатом функціонального перетворення системи випадкових величин (X, Y) , заданого функціями

$$\begin{cases} U = U(X, Y) \\ V = V(X, Y) \end{cases}.$$

Будемо вважати, що відомо також зворотнє перетворення

$$\begin{cases} X = X(U, V) \\ Y = Y(U, V) \end{cases}.$$

Розглянемо лише той випадок, коли перетворення є взаємно однозначними.

Крім того, припустимо, що всі розглянуті функції неперервні і мають похідні. Прикладами таких функціональних перетворень систем випадкових величин є перетворення прямокутних координат в полярні і навпаки або прямокутних координат в прямокутні.

Завдання полягає в знаходженні щільності розподілу $g(u,v)$ системи випадкових величин (U,V) , якщо відома щільність розподілу $f(x,y)$ системи (X,Y) .

В силу зроблених припущень щодо перетворень кожній точці $Q(X,Y)$ елементарної області Δs площині xOy відповідає одна цілком певна точка $Q_1(U,V)$ відповідної елементарної області Δs_1 площині uOv . Отже, події $\{(X,Y) \in \Delta s\}$ і $\{(U,V) \in \Delta s_1\}$ тотожні і їх ймовірності рівні, тобто

$$P\{(X,Y) \in \Delta s\} = P\{(U,V) \in \Delta s_1\}.$$

Використовуючи визначення щільності розподілу для системи двох випадкових величин, маємо

$$g(u,v) = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow Q_1} \frac{P\{(U,V) \in \Delta s_1\}}{\Delta s_1} = \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow Q \\ \Delta s_1 \rightarrow Q_1}} \frac{P\{(X,Y) \in \Delta s\}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta s_1} = f(x,y) \lim_{\substack{\Delta s \rightarrow Q \\ \Delta s_1 \rightarrow Q_1}} \frac{\Delta s}{\Delta s_1},$$

$$\text{де } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}.$$

Як відомо з математичного аналізу,

$$\lim_{\Delta s_1 \rightarrow Q_1} \frac{\Delta s}{\Delta s_1} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = |J|,$$

$$\text{де } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} - \text{якобіан перетворення в точці } Q_1(u,v).$$

Таким чином, маємо

$$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J|$$

Отриманий результат відповідає формулі для однієї випадкової величини і може бути поширений на випадок функціонального перетворення системи n випадкових величин.

25. Закон розподілу функції кількох випадкових величин

Розглянемо рішення цієї задачі для найбільш простого випадку функції двох змінних

$$Y = \varphi(X_1, X_2).$$

Нехай $f(x_1, x_2)$ щільність розподілу системи випадкових величин (X_1, X_2) . Введем в розгляд нову величину Y_1 , яка рівна X_1 , і розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \varphi(x_1, x_2) \\ y_1 = x_1 \end{cases}.$$

Будемо вважати, що ця система однозначно розв'язна, щодо x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \psi(y_1, y_2) \end{cases}$$

і задовольняє умовам диференційовності.

Тоді до розглянутого перетворення можна застосувати формулу для визначення щільності ймовірності $g(y, y_1)$ системи (Y, Y_1) .

Якобіан перетворення має вид

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi(y, y_1)}{\partial y}$$

Тому

$$g(y, y_1) = f(x_1, x_2) \cdot \left| \frac{\partial \psi(y, y_1)}{\partial y} \right| = f(y_1, \psi(y, y_1)) \cdot \left| \frac{\partial \psi(y, y_1)}{\partial y} \right|$$

Але, враховуючи, що

$$y_1 = x_1,$$

маємо

$$g(y, x_1) = f(x_1, \psi(y, x_1)) \cdot \left| \frac{\partial \psi(y, x_1)}{\partial y} \right|.$$

Інтегруючи цей вираз по аргументу x_1 в нескінченних межах, отримаємо щільність розподілу випадкової величини Y

$$g_1(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y, x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \psi(y, x_1)) \cdot \left| \frac{\partial \psi(y, x_1)}{\partial y} \right| dx_1.$$

Розглянемо застосування формули для визначення щільності розподілу суми, різниці, добутку і частки від ділення двох випадкових величин.

1. Розподіл суми двох випадкових величин.

Нехай $Y = X_1 + X_2$, тоді мають місце такі функціональні залежності

$$x_1 = y - x_2, \quad x_2 = y - x_1$$

Звідси

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = 1.$$

Отже, маємо

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y - x_1) dx_1,$$

або

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, y - x_2) dx_2.$$

У разі, коли випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, щільність розподілу системи дорівнює добутку щільностей окремих випадкових величин, що входять в систему, тобто

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Тому щільність розподілу суми запишеться у вигляді

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(y - x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) f_1(y - x_2) dx_2$$

2. Розподіл різниці двох випадкових величин.

Нехай $Y = X_1 - X_2$, тоді мають місце такі функціональні залежності

$$x_1 = y + x_2, \quad x_2 = x_1 - y$$

Звідси

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = -1.$$

Отже, маємо

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_1 - y) dx_1,$$

або

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, y + x_2) dx_2.$$

У разі, коли випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, щільність розподілу системи дорівнює добутку щільностей окремих випадкових величин, що входять в систему, тобто

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Тому щільність розподілу різниці запишеться у вигляді

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot f_2(x_1 - y) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) \cdot f_1(y + x_2) dx_2$$

3. Розподіл добутку двох випадкових величин.

Нехай $Y = X_1 \cdot X_2$, тоді мають місце такі функціональні залежності

$$x_1 = \frac{y}{x_2}, \quad x_2 = \frac{y}{x_1}$$

Звідси

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{1}{x_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = \frac{1}{x_1}.$$

Отже, маємо

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \frac{y}{x_1}) \frac{1}{|x_1|} dx_1,$$

або

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, \frac{y}{x_2}) \frac{1}{|x_2|} dx_2.$$

У разі, коли випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, щільність розподілу системи дорівнює добутку щільностей окремих випадкових величин, що входять в систему, тобто

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Тому щільність розподілу різниці запишеться у вигляді

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot f_2\left(\frac{y}{x_1}\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) \cdot f_1\left(\frac{y}{x_2}\right) \frac{1}{|x_2|} dx_2$$

4. Розподіл частки від ділення двох випадкових величин.

Нехай $Y = \frac{X_1}{X_2}$, тоді мають місце такі функціональні залежності

$$x_1 = y \cdot x_2, \quad x_2 = \frac{x_1}{y}$$

Звідси

$$\frac{\partial x_1}{\partial y} = x_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y} = -\frac{x_1}{y^2}.$$

Отже, маємо

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1, \frac{x_1}{y}\right) \left|\frac{x_1}{y}\right| dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_2, y \cdot x_2) |x_2| dx_2$$

У разі, коли випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, щільність розподілу системи дорівнює добутку щільностей окремих випадкових величин, що входять в систему, тобто

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2).$$

Тому щільність розподілу різниці запишеться у вигляді

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) \cdot f_2\left(\frac{x_1}{y}\right) \left|\frac{x_1}{y}\right| dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) \cdot f_1(y \cdot x_2) |x_2| dx_2.$$

26. Визначення математичного сподівання функції випадкових величин

На практиці часто зустрічаються випадки, коли немає особливої потреби повністю визначати закон розподілу функції випадкових величин, а досить лише вказати його числові характеристики.

Таким чином, виникає задача визначення числових характеристик функцій випадкових величин, крім аконів розподілу цих функцій. Почнемо з найпростішого випадку, коли випадкова величина Y є функцією випадкового аргументу X із заданим законом розподілу $Y = \varphi(X)$. Потрібно, не знаходячи закону розподілу величини Y , визначити її математичне сподівання

$$M[Y] = M[\varphi(X)].$$

Розглянемо спочатку випадок, коли X є дискретна випадкова величина з законом розподілу

$$P(X = x_i) = p_i,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Складемо таблицю значень величини Y і ймовірностей цих значень

$$P(Y = y_i = \varphi(x_i)) = p_i.$$

Математичне сподівання випадкової величини Y можна визначити за формулою

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i.$$

У формулі для математичного сподівання функції $Y = \varphi(X)$ не міститься в явному вигляді закону розподілу самої функції $\varphi(X)$, а міститься лише закон розподілу аргументу X . Таким чином, для визначення математичного сподівання функції $Y = \varphi(X)$ зовсім не потрібно знати закон розподілу функції $\varphi(X)$, а досить знати закон розподілу аргументу X .

Якщо у формулі суму замінити інтегралом, а ймовірність елементом ймовірності, то отримаємо аналогічну формулу для неперервної випадкової величини

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx.$$

Аналогічно можна визначити математичне сподівання функції $Z = \varphi(X, Y)$ від двох випадкових аргументів X і Y . Для дискретних випадкових величин

$$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \varphi(x_i, y_k) \cdot p_{ik}.$$

Для неперервних випадкових величин

$$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

Розглянемо випадки, коли для знаходження математичного сподівання функції випадкових аргументів не потрібно знати навіть законів розподілу аргументів, а досить знати тільки деякі їх числові характеристики. Сформулюємо ці випадки у вигляді наступних теорем.

Теорема 1. Математичне сподівання суми як залежних, так і незалежних двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин.

$$M[X + Y] = M[X] + M[Y].$$

Дійсно, нехай (X, Y) - система дискретних випадкових величин. Застосуємо загальну формулу для математичного сподівання функції двох аргументів

$$M[X + Y] = \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N (x_i + y_k) p_{ik} = \sum_{i=1}^M x_i \sum_{k=1}^N p_{ik} + \sum_{k=1}^N y_k \sum_{i=1}^M p_{ik} = M[X] + M[Y].$$

Нехай (X, Y) - система неперервних випадкових величин. Тоді маємо

$$\begin{aligned} M[X + Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y) dy = M[X] + M[Y]. \end{aligned}$$

Теорема додавання математичних сподівань узагальнюється на довільне число складових

$$M\left[\sum_{i=1}^M X_i\right] = \sum_{i=1}^M M[X_i].$$

Наслідок. Математичне сподівання лінійної функції випадкових величин дорівнює тій же лінійної функції від математичних сподівань цих величин

$$M\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i M[X_i] + b.$$

Дійсно, користуючись теоремою додавання математичних сподівань і найпростішими властивостями математичного сподівання, отримаємо

$$M\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right] = M\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] + M[b] = M\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] + b = \sum_{i=1}^n a_i M[X_i] + b.$$

Теорема 2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань плюс кореляційний момент

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] + k_{xy}.$$

Дійсно, згідно з визначенням кореляційного моменту маємо

$$k_{xy} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]$$

Перетворимо вираз, користуючись властивостями математичного сподівання,

$$k_{xy} = M[XY - YM[X] - XM[Y] + M[X]M[Y]],$$

$$k_{xy} = M[XY] - M[Y]M[X] - M[X]M[Y] + M[X]M[Y], \quad k_{xy} = M[XY] - M[Y]M[X].$$

Звідси,

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y] + k_{xy}.$$

Наслідок 1. Математичне сподівання добутку двох некорельованих випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Дійсно, якщо випадкові величини X і Y некорреліровані, то $k_{xy} = 0$, і формула набуде вигляду

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y].$$

Наслідок 2. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку сподівань цих величин,

$$M\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n M[X_i].$$

27. Визначення дисперсії функції випадкових величин

Розглянемо випадкову величину Y , що є функцією двох випадкових величин X_1 і X_2

$$Y = \varphi(X_1, X_2),$$

і поставимо задачу знайти її дисперсію, минаючи визначення закону розподілу цієї функції.

За визначенням дисперсії

$$D[Y] = M[(Y - M[Y])^2].$$

Отже,

$$D[Y] = M[(\varphi(X_1, X_2) - M[\varphi(X_1, X_2)])^2].$$

Вираз показує, що дисперсія функції випадкових величин визначається, як математичне сподівання деякої нової функції тих же випадкових величин. Тому обчислення дисперсії може бути здійснено прийомами, аналогічними розглянутим в попередньому параграфі. Ми наведемо розрахункові формули для випадку неперервних випадкових аргументів.

Для функції одного випадкового аргументу $Y = \varphi(X)$ дисперсія виражається формулою

$$D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - M[\varphi(x)]]^2 f(x) dx.$$

Для функції двох випадкових аргументів $Y = \varphi(X_1, X_2)$ дисперсія виражається формулою

$$D[\varphi(X_1, X_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x_1, x_2) - M[\varphi(x_1, x_2)]]^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Теорема 1. Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин плюс подвоєна сума кореляційних моментів кожної з складових величин

$$D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2] + 2 \cdot k_{xy}.$$

Дійсно, означимо

$$X = X_1 + X_2,$$

Тоді

$$M[X] = M[X_1] + M[X_2].$$

Віднімаючи почленно вираз з рівності, отримуємо

$$X - M[X] = (X_1 - M[X_1]) + (X_2 - M[X_2]).$$

За визначенням дисперсії маємо:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X - M[X]]^2 = M[(X_1 - M[X_1]) + (X_2 - M[X_2])]^2 = \\ &= M[(X_1 - M[X_1])^2 + 2M[(X_1 - M[X_1])(X_2 - M[X_2])] + M[(X_2 - M[X_2])^2]] = D[X_1] + D[X_2] + 2k_{xy}. \end{aligned}$$

Наслідок 1. Дисперсія суми некорельованих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків

$$D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2].$$

Теорема 2. Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин обчислюється за формулою

$$D[XY] = D[X] \cdot D[Y] + M^2[X] \cdot D[Y] + M^2[Y] \cdot D[X].$$

Оскільки випадкової величини X і Y незалежні, то незалежні і випадкові величини X^2 і Y^2 . Отже,

$$M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y], \quad M[X^2 \cdot Y^2] = M[X^2] \cdot M[Y^2].$$

За визначенням дисперсії з урахуванням рівності маємо

$$D[XY] = M[X^2 Y^2] - M^2[XY] = M[X^2]M[Y^2] - M^2[X]M^2[Y]$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] \quad M[X^2] = D[X] + M^2[X]$$

$$D[Y] = M[Y^2] - M^2[Y] \quad M[Y^2] = D[Y] + M^2[Y]$$

$$D[XY] = (D[X] + M^2[X])(D[Y] + M^2[Y]) - M^2[X]M^2[Y]$$

$$D[XY] = D[X] \cdot D[Y] + M^2[X]D[Y] + M^2[Y]D[X] + M^2[X]M^2[Y] - M^2[X]M^2[Y]$$

$$D[XY] = D[X] \cdot D[Y] + M^2[X]D[Y] + M^2[Y]D[X].$$

28. Визначення кореляційного моменту функції випадкових величин

Згідно з визначенням кореляційного моменту двох випадкових величин X і Y , маємо

$$k_{xy} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])],$$

або

$$k_{xy} = M[XY] - M[X] \cdot M[Y].$$

Розглянемо дві функції Y_1 і Y_2 системи випадкових величин (X_1, X_2)

$$Y_1 = \varphi_1(X_1, X_2),$$

$$Y_2 = \varphi_2(X_1, X_2).$$

Згідно з формулою

$$k_{y_1 y_2} = M[Y_1 Y_2] - M[Y_1] \cdot M[Y_2],$$

Звідси

$$k_{y_1 y_2} = M[\varphi_1(X_1, X_2)\varphi_2(X_1, X_2)] - M[\varphi_1(X_1, X_2)] \cdot M[\varphi_2(X_1, X_2)],$$

тобто кореляційний момент двох функцій двох випадкових величин дорівнює математично сподіванню добутку цих функцій мінус добуток їхніх математичних сподівань.

Розглянемо основні властивості кореляційного моменту і коефіцієнта кореляції.

Властивість 1. Від додавання до випадкових величин постійних величин кореляційний момент і коефіцієнт кореляції не змінюються.

Дійсно, нехай k_{xy} є кореляційний момент випадкових величин X і Y , тобто

$$k_{xy} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]$$

Знайдемо тепер кореляційний момент $k_{x'y'}$ випадкових величин

$$X' = X + a \text{ і } Y' = Y + b$$

Оскільки,

$$X' - M[X'] = X + a - M[X] - a = X - M[X], \quad Y' - M[Y'] = Y + b - M[Y] - b = Y - M[Y],$$

то

$$k_{x'y'} = M[(X' - M[X'])(Y' - M[Y'])] = M[(X - M[X])(Y - M[Y])] = k_{xy}.$$

29. Граничні теореми теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, властиві масовим випадковим явищам. Як і будь-яка інша наука, теорія ймовірностей призначена для того, щоб якомога точніше передбачити результат того чи іншого явища або експерименту. Однак якщо явище носить одиничний, не масовий характер, то теорія ймовірностей здатна передбачити лише ймовірність результату в досить широких межах. Зовсім інша справа, коли явище – масове. Закономірності проявляються саме при великому числі випадкових явищ, що відбуваються в однорідних умовах. При досить великій кількості випробувань характеристики випадкових подій і випадкових величин, що спостерігаються при випробуванні, стають майже не випадковими. Так, наприклад, частота події при великому числі випробувань стає стійкою, те ж саме відноситься до середніх значень випадкових величин. Ця обставина дозволяє використовувати результати спостережень над випадковими явищами для передбачення результатів майбутніх випробувань.

Група теорем, які визначають відповідність між теоретичними і експериментальними характеристиками випадкових величин і випадкових подій при великому числі випробувань над ними, а також стосуються граничних законів розподілу, об'єднуються під загальним назвою *граничних теорем теорії ймовірностей*.

В цьому розділі ми познайомимося з двома типами граничних теорем: законом великих чисел і центральною граничною теоремою.

Закон великих чисел, який займає найважливіше місце в теорії ймовірностей, є сполучною ланкою між теорією ймовірностей як математичної наукою і закономірностями випадкових явищ при масових спостереженнях над ними. Закон великих чисел відіграє дуже важливу роль в практичних застосуваннях теорії ймовірностей до явищ природи і технічних процесів, пов'язаних з масовим виробництвом.

При доведенні теорем, що відносяться до групи «закону великих чисел», ми скористаємося нерівністю Чебишева.

Нерівність Чебишева.

Розглянемо випадкову величину X , математичне очікування якої m_x і дисперсія D_x . Нерівність Чебишева стверджує: ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного очікування буде по

абсолютній величині не менше будь-якого додатнього числа ε , обмежена зверху величиною $\frac{D_x}{\varepsilon^2}$

$$P(|X - m_x| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Доведення. 1. Нехай випадкова величина X дискретна з законом розподілу

$$\begin{cases} P(X = x_k) = p_k \\ \sum_{k=1}^n p_k = 1 \end{cases}$$

Тоді дисперсія випадкової величини X

$$D_x = \sum_{k=1}^n (x_k - m_x)^2 p_k.$$

Очевидно, всі складові цієї суми не від'ємні. Отбросім ті складові, у яких $|x_k - m_x| < \varepsilon$. Внаслідок чого сума може тільки зменшитися, тобто

$$D_x \geq \sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} (x_i - m_x)^2 p_i,$$

де запис $|x_i - m_x| \geq \varepsilon$ під знаком суми означає, що сумовування поширюється тільки на ті значення i , для яких x_i відхилиться від m_x на величину не менше, ніж ε .

Замінімо під знаком суми вираз $|x_i - m_x|$ через ε . Так як для всіх членів суми маємо $|x_i - m_x| \geq \varepsilon$, то від такої заміни сума може тільки зменшитися, значить

$$D_x \geq \sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 p_i = \varepsilon^2 \sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} p_i.$$

Під знаком суми ми маємо ймовірності p_i тільки тих значень x_i , які відхиляються від математичного сподівання m_x на величину, не меншу, ніж ε . Отже,

$$\sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} p_i = P(|X - m_x| \geq \varepsilon).$$

Таким чином,

$$D_x \geq \varepsilon^2 \cdot P(|X - m_x| \geq \varepsilon),$$

звідки безпосередньо випливає доказувана нерівність.

2. Нехай випадкова величина X неперервна з щільністю розподілу $f(x)$. Тоді дисперсія випадкової величини X

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Виділимо на числовій осі вправо і вліво від математичного сподівання m_x відрізки, довжиною ε кожен. Якщо у виразі інтеграл для дисперсії по всій осі Ox замінити інтегралом по області, що лежить поза відрізком довжиною 2ε , то, оскільки під інтегралом стоїть невід'ємна функція, величина інтеграла при цьому може тільки зменшитися, тобто

$$D_x \geq \int_{|x-m_x|>\varepsilon} (x-m_x)^2 f(x)dx.$$

Замінюючи $x-m_x$ під знаком інтеграла через ε , ми знову можемо тільки зменшити величину інтеграла. Отже,

$$D_x \geq \varepsilon^2 \int_{|x-m_x|>\varepsilon} f(x)dx.$$

Інтеграл правій частині виразу являє собою ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення поза відрізка довжиною 2ε . Тому

$$D_x \geq \varepsilon^2 P(|X-m_x| > \varepsilon).$$

Звідси безпосередньо випливає нерівність Чебишева. Тут знак $\geq$ замінений знаком $>$, так як для неперервної величини ймовірність точної рівності дорівнює нулю.

Нерівність Чебишева може бути записано і в іншій формі, стосовно протилежного події – відхилення випадкової величини від математичного сподівання m_x менше, ніж на ε

$$P(|X-m_x| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишева корисна лише щодо великих ε .

Теоретичне ж значення нерівності Чебишева велике. Ми скористаємося цією нерівністю при доведенні теореми Чебишева.

4.1. Теорема Чебишева.

Теорема Чебишева є однією з найважливіших форм закону великих чисел. Вона встановлює зв'язок між середнім арифметичним спостережуваних значень випадкової величини і її математичним сподіванням.

Теорема Чебишева. При необмеженому збільшенні числа незалежних випробувань середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини, що має кінцеву дисперсію, сходиться по ймовірності до її математичного сподівання.

Теорема Чебишева означає, що якщо $X_1, X_2, \dots$ незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним очікуванням m_x і з не обмеженою дисперсією D_x , то при будь-якому $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m_x \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Знайдемо числові характеристики випадкової величини Y . Користуючись властивостями числових характеристик, отримаємо

$$m_y = M \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} n \cdot m_x = m_x,$$

$$D_y = D \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{1}{n^2} n \cdot D_x = \frac{1}{n} D_x.$$

Застосуємо тепер до випадкової величиною Y нерівність Чебишева

$$P(|Y - m_y| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D_y}{\varepsilon^2},$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D_x}{n\varepsilon^2}$$

Переходячи в нерівності до границі і враховуючи, що ймовірність не може бути більше одиниці, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

4.2. Теорема Бернуллі

Теорема Бернуллі є найважливішою і історично першою формою закону великих чисел. Вона встановлює зв'язок між частотою події і його ймовірністю. Доказ, даний Бернуллі, був досить складним. Простий доказ даний П. Л. Чебишевим як прямий наслідок з його теореми.

Теорема Бернуллі. При необмеженому збільшенні числа незалежних дослідів в постійних умовах частота події A сходиться по ймовірності до її ймовірності p в окремому досвіді.

Якщо позначити частоту події A в n дослідах через p^* , теорему Бернуллі можна записати у вигляді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|p^* - p| < \varepsilon) = 1.$$

Доведення. Позначимо через X_1 – випадкову величину – число появ події A в першому іспиті, через X_2 – число появ події A в другому іспиті і т. д.

Кожна з величин X_i ($i=1,2,\dots,n$) є дискретна випадкова величина з двома можливими значеннями 0 або 1. Ряд розподілу величини X_i – має вигляд

x_i	0	1
p_i	q	p

де $q=1-p$ є ймовірність неяви події A .

Математичне сподівання кожної з величин X дорівнює p , а її дисперсія дорівнює $p \cdot q$.

Частота p^* є середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

Застосовуючи до цих величин теорему Чебишева, отримаємо доказувану рівність.

4.3. Центральна гранична теорема

Розглянуті в попередніх параграфах теореми є різними формами закону великих чисел. Закон великих чисел встановлює факт збіжності по ймовірності деяких випадкових величин до постійних їх характеристик. При цьому ні в одній з форм закону великих чисел ми не маємо справи з законами розподілу випадкових величин. У цьому параграфі ми розглянемо питання, пов'язане з відшукування граничного закону розподілу суми

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

коли число доданків необмежено зростає.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей (теорема Ляпунова) встановлює умови, при яких зазначений граничний закон є нормальним.

Різні форми центральної граничної теореми відрізняються між собою умовами, які накладаються на розподіл випадкових величин X_i , що утворюють суму.

Ми сформулюємо найпростішу форму центральної граничної теореми, коли випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$, взаємно незалежні і однаково розподілені.

Теорема. Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ взаємно незалежні і мають один і той же закон розподілу з математичним очікуванням m і дисперсією σ^2 , причому існує третій абсолютний момент ν_3 , то при необмеженому збільшенні n закон розподілу суми необмежено наближається до нормального.

У практичних завданнях часто застосовують центральну граничну теорему для визначення ймовірності того, що сума кількох випадкових величин виявиться в заданих межах.

ТИПОВІ РОЗРАХУНКИ

Для виконання типового розрахунку необхідно:

1. переписати текст задачі,
2. визначити випробування та елементарні події,
3. визначити досліджувану подію та інші події,
4. встановити, яка формула застосовується для розв'язання задачі та виконати ці обчислення.

Варіант 1

Задача 1. Серед 10 деталей 6 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,5$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,7$ и дисперсія $D(X)=0,49$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (2, 13) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 10 і середнє квадратичне відхилення 4

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 30 і 5. На буровій ділянці працюють 7 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 210 більше, ніж на 50.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 12, \\ \frac{1}{3}x - 4, & \text{якщо } 12 < x \leq 15; a = -1, b = 10. \\ 1, & \text{якщо } x > 15. \end{cases}$$

Задача 6. Задано закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	160	170	180	190
60	0,1	0,3	0,1	
70		0,2	0,1	
80			0,1	0,1

Варіант 2

Задача 1. Серед 10 деталей 8 якісних. Вибрали 8 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 5 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,25$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=5$ і дисперсія $D(X)=3$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (5, 14) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 9 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 31 і 6. На буровій ділянці працюють 8 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 250 більше, ніж на 60.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -4, \\ \frac{1}{4}x + 1, & \text{якщо } -4 < x \leq 0; a = -5, b = -1. \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	60	70	80	90
160	0,1	0,3	0,1	
170		0,2	0,1	
180			0,1	0,1

Варіант 3

Задача 1. Серед 12 деталей 4 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,4$ і дисперсія $D(X)=0,64$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (4, 9) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 8 і середнє квадратичне відхилення 1.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 34 і 8. На буровій ділянці працюють 9 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 300 більше, ніж на 70.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 20, \\ \frac{1}{5}x - 4, & \text{якщо } 20 < x \leq 25; a = 0, b = 24. \\ 1, & \text{якщо } x > 25. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	100	110	120	130
20	0,2	0,1	0,1	
30		0,3	0,1	
40			0,1	0,1

Варіант 4

Задача 1. Серед 12 деталей 8 якісних. Вибрали 9 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,75$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,2$ и дисперсія $D(X)=0,12$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 7 і середнє квадратичне відхилення 2.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 36 і 7. На буровій ділянці працюють 8 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 280 більше, ніж на 60.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -10, \\ \frac{1}{5}x + 2, & \text{якщо } -10 < x \leq -5; a = -15, b = -7. \\ 1, & \text{якщо } x > -5. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	10	20	30	40
50	0,1	0,2	0,1	
60		0,3	0,1	
70			0,1	0,1

Варіант 5

Задача 1. Серед 10 деталей 6 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,7$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,6$ и дисперсія $D(X)=0,84$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (2, 11) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 6 і середнє квадратичне відхилення 3.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 36 і 8. На буровій ділянці працюють 9 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 320 більше, ніж на 80.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{якщо } 2 < x \leq 4; a = 1, b = 3. \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподіли компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	20	40	60	80
10	0,1	0,2	0,1	
30		0,3	0,1	
50			0,1	0,1

Варіант 6

Задача 1. Серед 10 деталей 5 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ и дисперсія $D(X)=0,06$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (1, 12) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 5 і середнє квадратичне відхилення 1.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 9. На буровій ділянці працюють 10 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 36, \\ \frac{x}{9} - 4, & \text{якщо } 36 < x \leq 45; a = 1, b = 40. \\ 1, & \text{якщо } x > 45. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	10	30	50	70
100	0,2	0,2	0,1	
120		0,2	0,1	
140			0,1	0,1

Варіант 7

Задача 1. Серед 14 деталей 7 якісних. Вибрали 8 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,75$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=-2$ і дисперсія $D(X)=3$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (2, 11) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 4 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 38 і 8. На буровій ділянці працюють 8 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 300 більше, ніж на 70.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -16, \\ \frac{x}{4} + 4, & \text{якщо } -16 < x \leq -12; a = -20, b = -14. \\ 1, & \text{якщо } x > -12. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	60	80	100	120
20	0,1	0,4	0,1	
30		0,1	0,1	
40			0,1	0,1

Варіант 8

Задача 1. Серед 18 деталей 9 якісних. Вибрали 8 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 5 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,9$ и дисперсія $D(X)=0,64$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 2.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 42 і 6. На буровій ділянці працюють 10 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 420 більше, ніж на 70.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -7, \\ \frac{1}{7}x + 1, & \text{якщо } -7 < x \leq 0; a = -8, b = -3. \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	40	50	60	70
40	0,1	0,2	0,1	
70		0,3	0,1	
100			0,1	0,1

Варіант 9

Задача 1. Серед 17 деталей 9 якісних. Вибрали 6 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,7$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=-0,6$ и дисперсія $D(X)=0,84$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (4, 9) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 8. На буровій ділянці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 440 більше, ніж на 80.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 6, \\ \frac{1}{3}x - 2, & \text{якщо } 6 < x \leq 9; a = -1, b = 5. \\ 1, & \text{якщо } x > 9. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	100	120	140	160
30	0,2	0,2	0,1	
60		0,2	0,1	
90			0,1	0,1

Варіант 10

Задача 1. Серед 17 деталей 10 якісних. Вибрали 8 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,4$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,5$ і дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (6, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 4.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 39 і 6. На буровій ділянці працюють 12 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 460 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 8, \\ \frac{1}{4}x - 2, & \text{якщо } 8 < x \leq 12; a = 0, b = 10. \\ 1, & \text{якщо } x > 12. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	90	100	110	120
20	0,1	0,2	0,2	
40		0,2	0,1	
60			0,1	0,1

Варіант 11

Задача 1. Серед 15 деталей 9 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(7, 2)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 3.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 37 і 10. На буровій ділянці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 75.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -6, \\ \frac{x}{6} + 1, & \text{якщо } -6 \leq x \leq 0; a = -8, b = -5. \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	50	70	90	110
150	0,1	0,3		
170		0,2	0,2	
190			0,1	0,1

Варіант 12

Задача 1. Серед 14 деталей 6 якісних. Вибрали 9 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ і дисперсія $D(X)=0,16$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 11. На буровій ділянці працюють 13 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 520 більше, ніж на 95.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 8, \\ \frac{1}{2}x - 4, & \text{якщо } 8 < x \leq 10; a=0, b=9. \\ 1, & \text{якщо } x > 10. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	80	100	120	140
80	0,1	0,2		
100		0,3	0,2	
120			0,1	0,1

Варіант 13

Задача 1. Серед 10 деталей 5 якісних. Вибрали 3 деталі. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,4$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (6, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 4.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 39 і 6. На буровій ділянці працюють 12 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 460 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 6, \\ \frac{1}{3}x - 2, & \text{якщо } 6 < x \leq 9; a = 0, b = 8. \\ 1, & \text{якщо } x > 9. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	70	100	130	160
50	0,2	0,3	0,1	
80		0,1	0,1	
110			0,1	0,1

Варіант 14

Задача 1. Серед 15 деталей 9 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (7, 2) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 3.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 37 і 10. На буровій ділянці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 75.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 5, \\ \frac{x}{5} - 1, & \text{якщо } 5 \leq x \leq 10; a = 1, b = 7. \\ 1, & \text{якщо } x > 10. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	10	40	70	100
100	0,1	0,2	0,1	
140		0,3	0,1	
180			0,1	0,1

Варіант 15

Задача 1. Серед 8 деталей 5 якісних. Вибрали 4 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ і дисперсія $D(X)=0,16$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 11. На буровій ділянці працюють 13 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 520 більше, ніж на 95.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 12, \\ \frac{1}{6}x - 2, & \text{якщо } 12 < x \leq 18; a = 0, b = 14. \\ 1, & \text{якщо } x > 18. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	60	100	140	180
20	0,1	0,3	0,1	
70		0,1	0,2	
120			0,1	0,1

Варіант 16

Задача 1. Серед 10 деталей 7 якісних. Вибрали 4 деталі. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісні; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,4$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (6, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 4.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 39 і 6. На буровій ділянці працюють 12 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 460 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -16, \\ \frac{1}{8}x + 2, & \text{якщо } -16 < x \leq -8; a = -20, b = -10. \\ 1, & \text{якщо } x > -8. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	200	240	280	320
160	0,1	0,4		
180		0,2	0,1	
200			0,1	0,1

Варіант 17

Задача 1. Серед 14 деталей 9 якісних. Вибрали 6 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (7, 2) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 3.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 37 і 10. На буровій ділянці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 75.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 18, \\ \frac{x}{6} - 3, & \text{якщо } 18 \leq x \leq 24; a = 1, b = 20. \\ 1, & \text{якщо } x > 24. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	100	120	140	180
40	0,1	0,3		
80		0,3	0,1	
120			0,1	0,1

Варіант 18

Задача 1. Серед 12 деталей 6 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ и дисперсія $D(X)=0,16$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 11. На буровій ділянці працюють 13 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 520 більше, ніж на 95.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -4, \\ \frac{1}{2}x + 2, & \text{якщо } -4 < x \leq -2; a = -5, b = -3. \\ 1, & \text{якщо } x > -2. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	80	120	160	200
40	0,1	0,1	0,1	
80		0,4	0,1	
120			0,1	0,1

Варіант 19

Задача 1. Серед 11 деталей 6 якісних. Вибрали 4 деталі. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,4$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (6, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 4.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 39 і 6. На буровій ділянці працюють 12 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 460 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 12, \\ \frac{1}{4}x - 3, & \text{якщо } 12 < x \leq 16; a = 0, b = 14. \\ 1, & \text{якщо } x > 16. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	10	50	90	130
30	0,2	0,3		
60		0,2	0,1	
90			0,1	0,1

Варіант 20

Задача 1. Серед 10 деталей 6 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (7, 2) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 2 і середнє квадратичне відхилення 3.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 37 і 10. На буровій дільниці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової дільниці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 75.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{x^2}{16}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4; a = 1, b = \frac{3}{2}. \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	30	60	90	120
50	0,1	0,2		
100		0,3	0,2	
150			0,1	0,1

Варіант 21

Задача 1. Серед 10 деталей 7 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ и дисперсія $D(X)=0,16$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (3, 10) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 11. На буровій ділянці працюють 13 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 520 більше, ніж на 95.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 8, \\ \frac{1}{4}x - 2, & \text{якщо } 8 < x \leq 12; a = 0, b = 10. \\ 1, & \text{якщо } x > 12. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	50	100	150	200
20	0,2	0,2		
40		0,2	0,2	
60			0,1	0,1

Варіант 22

Задача 1. Серед 10 деталей 5 якісних. Вибрали 4 деталі. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,4$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,5$ і дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (2, 4) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 3 і середнє квадратичне відхилення 4.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 39 і 6. На буровій ділянці працюють 12 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 460 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 10, \\ \frac{1}{2}x - 5, & \text{якщо } 10 < x \leq 12; a = 0, b = 11. \\ 1, & \text{якщо } x > 12. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	60	70	80	90
160	0,1	0,3	0,1	
200		0,2	0,1	
240			0,1	0,1

Варіант 23

Задача 1. Серед 12 деталей 8 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,5$ и дисперсія $D(X)=1,5$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(-1, 2)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 1 і середнє квадратичне відхилення 2.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 37 і 10. На буровій ділянці працюють 11 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 75.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \frac{x}{16}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 16; a = -2, b = 8. \\ 1, & \text{якщо } x > 16. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	30	60	90	120
100	0,1	0,3		
150		0,2	0,2	
200			0,1	0,1

Варіант 24

Задача 1. Серед 8 деталей 3 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 2 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ і дисперсія $D(X)=0,16$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(-2, 3)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 1 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 11. На буровій ділянці працюють 13 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 520 більше, ніж на 95.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 6, \\ \frac{1}{3}x - 2, & \text{якщо } 6 < x \leq 9; a = 0, b = 8. \\ 1, & \text{якщо } x > 9. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	90	120	150	180
50	0,2	0,3		
70		0,2	0,1	
90			0,1	0,1

Варіант 25

Задача 1. Серед 10 деталей 6 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 4 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,5$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,7$ и дисперсія $D(X)=0,49$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (2, 13) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 10 і середнє квадратичне відхилення 4

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 30 і 5. На буровій ділянці працюють 7 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 210 більше, ніж на 50.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 5, \\ \frac{1}{5}x - 1, & \text{якщо } 5 < x \leq 10; a = -1, b = 3. \\ 1, & \text{якщо } x > 10. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	80	120	160	200
40	0,3	0,3		
80		0,1	0,1	
120			0,1	0,1

Варіант 26

Задача 1. Серед 10 деталей 8 якісних. Вибрали 8 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 5 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,25$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=5$ і дисперсія $D(X)=3$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (5, 14) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 9 і середнє квадратичне відхилення 5.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 31 і 6. На буровій ділянці працюють 8 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 250 більше, ніж на 60.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -3, \\ \frac{1}{3}x + 1, & \text{якщо } -3 < x \leq 0; a = -5, b = -1. \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	100	150	200	250
60	0,2	0,3		
120		0,2	0,1	
180			0,1	0,1

Варіант 27

Задача 1. Серед 12 деталей 4 якісних. Вибрали 5 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,8$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,4$ і дисперсія $D(X)=0,64$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(-4, 1)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання -2 і середнє квадратичне відхилення 2 .

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 34 і 8 . На буровій ділянці працюють 9 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 300 більше, ніж на 70 .

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -20, \\ \frac{1}{5}x + 4, & \text{якщо } -20 < x \leq -15; a = -25, b = -17. \\ 1, & \text{якщо } x > -15. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	50	100	150	200
30	0,3	0,1	0,1	
70		0,2	0,1	
110			0,1	0,1

Варіант 28

Задача 1. Серед 12 деталей 8 якісних. Вибрали 9 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,75$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=1,2$ і дисперсія $D(X)=0,12$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал (1, 6) нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 4 і середнє квадратичне відхилення 2.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 36 і 7. На буровій ділянці працюють 8 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 280 більше, ніж на 60.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -10, \\ \frac{1}{5}x + 2, & \text{якщо } -10 < x \leq -5; a = -15, b = -7. \\ 1, & \text{якщо } x > -5. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	40	80	120	160
50	0,2	0,2	0,1	
100		0,2	0,1	
150			0,1	0,1

Варіант 29

Задача 1. Серед 10 деталей 6 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,7$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=2,6$ и дисперсія $D(X)=0,84$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(-3, -1)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання -2 і середнє квадратичне відхилення 3 .

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 36 і 8 . На буровій ділянці працюють 9 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 320 більше, ніж на 80 .

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -2, \\ \frac{1}{2}x + 1, & \text{якщо } -2 < x \leq 0; a = -3, b = -1. \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	30	60	90	120
150	0,3	0,1		
170		0,2	0,2	
190			0,1	0,1

Варіант 30

Задача 1. Серед 10 деталей 5 якісних. Вибрали 7 деталей. Знайти:

1) Ймовірність того, що серед вибраних деталей 3 неякісних; 2) Розподіл випадкової величини X – числа якісних деталей серед вибраних; 3) Знайти $M(x)$ і $D(x)$ -математичне сподівання та дисперсію.

Задача 2. Дискретна випадкова величина X приймає тільки два значення: x_1 і x_2 , причому $x_1 < x_2$. Відомо: $P(X=x_1)=0,6$ – ймовірність того, що X набуде значення, рівне x_1 ; математичне сподівання $M(X)=0,7$ и дисперсія $D(X)=0,06$. Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини X . Зробити перевірку розв'язку задачі. З цією метою за знайденим законом розподілу випадкової величини X підрахувати $M(X)$ і $D(X)$.

Задача 3. Знайти ймовірність попадання у заданий інтервал $(-1, 2)$ нормально розподіленої випадкової величини X , якщо відоме її математичне сподівання 1 і середнє квадратичне відхилення 2.

Задача 4. Змінна продуктивність бурового станка в кар'єрі розподілена за нормальним законом з параметрами 40 і 9. На буровій ділянці працюють 10 станків. Визначити ймовірність того, що змінна продуктивність бурової ділянці не відрізняється від змінного завдання 400 більше, ніж на 90.

Задача 5. Випадкову величину X задано функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$. Знайти щільність ймовірності, математичне сподівання, дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функції. Знайти $P(a \leq x \leq b)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -36, \\ \frac{x}{9} + 4, & \text{якщо } -36 < x \leq -27; a = -40, b = -30. \\ 1, & \text{якщо } x > -27. \end{cases}$$

Задача 6. Заданий закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини у вигляді таблиці. Необхідно визначити закони розподілу компонент цієї випадкової величини. Знайти числові характеристики цих компонент. Знайти кореляційний момент, коефіцієнт кореляції. Визначити умовні закони розподілу компонент. Побудувати поле кореляції і лінії регресії для кожної компоненти.

$y_k \backslash x_i$	10	70	130	190
80	0,2	0,1	0,2	
160		0,2	0,1	
240			0,1	0,1

Приклади тестових завдань

Визначити правильну властивість інтегральної функції розподілу $F(x)$:

- A. $-1 \leq F(x) \leq 1$
- B. $0 \leq F(x) \leq 1$
- C. $-\infty \leq F(x) \leq 1$
- D. $-\infty \leq F(x) \leq +\infty$

Яка з формул правильно встановлює зв'язок між диференціальною функцією розподілу і інтегральною функцією розподілу:

- A. $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$
- B. $F(x) = \int_x^{\infty} f(t) dt$
- C. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
- D. $F(x) = f'(x)$

Виберіть правильну формулу, що відображає властивості щільності розподілу:

- A. $\int_{-\infty}^x f(x) dx = 1$
- B. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- C. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0$
- D. $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$

Визначити правильну властивість диференціальної функції розподілу $f(x)$:

- A. $-1 \leq f(x) \leq 1$
- B. $0 \leq f(x) \leq 1$
- C. $-\infty \leq f(x) \leq 1$
- D. $0 \leq f(x) \leq +\infty$

Якщо до випадкової величини X додати число 9, тоді значення дисперсії:

- A. не зміниться
- B. збільшиться в три рази
- C. збільшиться в 81 разів
- D. збільшиться в дев'ять разів

Визначити правильну властивість інтегральної функції розподілу неперервної випадкової величини:

- A. функція неперервна
- B. функція спадає
- C. функція необмежена
- D. функція від'ємна

Яка з формул правильно обчислює ймовірність попадання X в заданий інтервал (α, β) :

- A. $P(\alpha < x < \beta) = F(\beta)$
- B. $P(\alpha < x < \beta) = F(\alpha) - F(\beta)$
- C. $P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
- D. $P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(-\alpha)$

Додаток

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,71	0,2611	1,41	0,4207	2,22	0,4868
0,01	0,0040	0,72	0,2642	1,42	0,4222	2,24	0,4875
0,02	0,0080	0,73	0,2373	1,43	0,4236	2,26	0,4881
0,03	0,0120	0,74	0,2703	1,44	0,4251	2,28	0,4887
0,04	0,0160	0,75	0,2734	1,45	0,4265	2,30	0,4893
0,05	0,0199	0,76	0,2764	1,46	0,4279	2,32	0,4898
0,06	0,0239	0,77	0,2794	1,47	0,4292	2,34	0,4904
0,07	0,0279	0,78	0,2823	1,48	0,4306	2,36	0,4909
0,08	0,0319	0,79	0,2852	1,49	0,4319	2,38	0,4913
0,09	0,0359	0,80	0,2881	1,50	0,4332	2,40	0,4918
0,10	0,0398	0,81	0,2910	1,51	0,4345	2,42	0,4922
0,11	0,0438	0,82	0,2939	1,52	0,4357	2,44	0,4927
0,12	0,0478	0,83	0,2967	1,53	0,4370	2,46	0,4931
0,13	0,0517	0,84	0,2995	1,54	0,4382	2,48	0,4934
0,14	0,0557	0,85	0,3023	1,55	0,4394	2,50	0,4938
0,15	0,0596	0,86	0,3051	1,56	0,4406	2,52	0,4941
0,16	0,0636	0,87	0,3078	1,57	0,4418	2,54	0,4945
0,17	0,0675	0,88	0,3106	1,58	0,4429	2,56	0,4948
0,18	0,0714	0,89	0,3133	1,59	0,4441	2,58	0,4951
0,19	0,0753	0,90	0,3159	1,60	0,4452	2,60	0,4953
0,20	0,0793	0,91	0,3186	1,61	0,4463	2,62	0,4956
0,21	0,0832	0,92	0,3212	1,62	0,4474	2,64	0,4959
0,22	0,0871	0,93	0,3238	1,63	0,4484	2,66	0,4961
0,23	0,0910	0,94	0,3264	1,64	0,4495	2,68	0,4963
0,24	0,0948	0,95	0,3289	1,65	0,4505	2,70	0,4965
0,25	0,0987	0,96	0,3315	1,66	0,4515	2,72	0,4967
0,26	0,1026	0,97	0,3340	1,67	0,4525	2,74	0,4969
0,27	0,1064	0,98	0,3365	1,68	0,4535	2,76	0,4971
0,28	0,1103	0,99	0,3389	1,69	0,4545	2,78	0,4973
0,29	0,1141	1,00	0,3413	1,70	0,4554	2,80	0,4974
0,30	0,1179	1,01	0,3438	1,71	0,4564	2,82	0,4976
0,31	0,1217	1,02	0,3461	1,72	0,4573	2,84	0,4977
0,32	0,1255	1,03	0,3485	1,73	0,4582	2,86	0,4979

0,33	0,1293	1,04	0,3508	1,74	0,4591	2,88	0,4980
0,34	0,1331	1,05	0,3531	1,75	0,4599	2,90	0,4981
0,35	0,1368	1,06	0,3554	1,76	0,4608	2,92	0,4982
0,36	0,1406	1,07	0,3577	1,77	0,4616	2,94	0,4984
0,37	0,1443	1,08	0,3599	1,78	0,4625	2,96	0,4985
0,38	0,1480	1,09	0,3621	1,79	0,4633	2,98	0,4986
0,39	0,1517	1,10	0,3643	1,80	0,4641	3,00	0,49865
0,40	0,1554	1,11	0,3665	1,81	0,4649	3,20	0,49931
0,41	0,1591	1,12	0,3686	1,82	0,4656	3,40	0,49966
0,12	0,1628	1,13	0,3708	1,83	0,4664	3,60	0,499841
0,43	0,1664	1,14	0,3729	1,84	0,4671	3,80	0,499928
0,44	0,1700	1,15	0,3749	1,85	0,4678	4,00	0,499968
0,45	0,1736	1,16	0,3770	1,86	0,4686	4,50	0,499997
0,46	0,1772	1,17	0,3790	1,87	0,4693	5,00	0,499997
0,47	0,1808	1,18	0,3810	1,88	0,4699		
0,48	0,1844	1,19	0,3830	1,89	0,4706		
0,49	0,1879	1,20	0,3849	1,90	0,4713		
0,50	0,1915	1,21	0,3869	1,91	0,4719		
0,51	0,1950	1,22	0,3883	1,92	0,4726		
0,52	0,1985	1,23	0,3907	1,93	0,4732		
0,53	0,2019	1,24	0,3925	1,94	0,4738		
0,54	0,2054	1,25	0,3944	1,95	0,4744		
0,55	0,2088	1,26	0,3962	1,96	0,4750		
0,56	0,2123	1,27	0,3980	1,97	0,4756		
0,57	0,2157	1,28	0,3997	1,98	0,4761		
0,58	0,2190	1,29	0,4015	1,99	0,4767		
0,59	0,2224	1,30	0,4032	2,00	0,4772		
0,60	0,2257	1,31	0,4049	2,02	0,4783		
0,61	0,2291	1,32	0,4066	2,04	0,4793		
0,62	0,2324	1,33	0,4082	2,06	0,4803		
0,63	0,2357	1,34	0,4099	2,08	0,4812		
0,64	0,2389	1,35	0,4115	2,10	0,4821		
0,65	0,2422	1,36	0,4131	2,12	0,4830		
0,66	0,2454	1,37	0,4147	2,14	0,4838		
0,67	0,2486	1,38	0,4162	2,16	0,4846		
0,68	0,2517	1,39	0,4177	2,18	0,4854		
0,69	0,2549	1,40	0,4192	2,20	0,4861		
0,70	0,2580						

Література

1. Андрухаев Х.М. Сборник задач по теории вероятностей / Х.М. Андрухаев. – М.: «Просвещение», 1985.–165с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа, 2003.– 479с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман.– М. : Высшая школа, 1999.– 400с.
4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер.– М.: ЮНИТИ-ДАНА,2003.-543 с.
5. Красс М.С. Основы математика и ее приложения в экономическом образовании / М.С. Красс, Б.П.Чупрынов.–М.: Дело, 2000.– 688с.
6. Рудавський Ю.К.,Збірник задач з теорії ймовірностей. Навч. посібник / Ю.К.Рудавський,П.П.Костробій,І.Я.Олексів.–Львів: «Львівська політехніка», 2000. – 242с.
7. Серебrenиков В.М. Математика для економістів:теорія ймовірностей і математична статистика. Розділ «Випадкові події»: навчально-методичний посібник для студентів денної та заочної форм навчання / В.М. Серебrenиков, Т.В. Квітка; М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. вищої мат. та інформ. систем. – Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2018. – 105 с.
8. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика: навч.посібн. для студ. ден. форми навчання економ. спец. / Фортуна В.В., Бескровний О.І.; - М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. вищої та прикладної математики. – Львів: «Магнолія 2006», 2013. - 647с.

Навчальне видання

Серебренников Вадим Михайлович

Квітка Тетяна Володимирівна

Копайгора Ольга Константинівна

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

**МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ:
ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА
СТАТИСТИКА**

(Розділ «Випадкові величини»)

Навчально-методичний посібник

розділ «Випадкові величини»

Формат 60x84/8. Ум. др. арк.

Донецький національний університет

економіки і торгівлі імені

Михайла Туган-Барановського

50042, Дніпропетровська обл.,

м. Кривий Ріг, вул. Курчатова, 13.

Свідоцтво суб'єкту видавничої
справи ДК № 4929 від 07.07.2015 р.