МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

Т.В. Квітка

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Навчальний посібник
розділ «Елементи лінійної алгебри
з використанням пакетів математичних програм
Mathcad та *MS EXCEL*»

Кривий Ріг

2018 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький національний університет економіки і торгівлі
імені Михайла Туган-Барановського

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

Т.В. Квітка

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Навчальний посібник
розділ «Елементи лінійної алгебри
з використанням пакетів математичних програм
Mathcad та *MS EXCEL*»

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики та
інформаційних систем
Протокол № 6
від “21” листопада 2018 р.

Схвалено навчально-методичною радою
ДонНУЕТ ім. М. Туган-Барановського
Протокол № 3
від “31” січня 2019 р.

Кривий Ріг
2018 р

УДК 519.61 +672

Рекомендовано до видання науково-методичною радою Донецького національного університету економіки і торгівлі ім. Михайла Туган-Барановського (протокол № 3 від 31 січня 2019р.)

Рецензенти:
Бондаревський С.Л., кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електромеханіки ДВНЗ Криворізький національний університет.

Тернов С.О., кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, в.о. завідувача кафедри вищої математики та інформаційних систем Донецького національного університету економіки і торгівлі торгівлі ім. М. Туган-Барановського.

Квітка Т.В.
Вища математика для економістів. Розділ «Елементи лінійної алгебри з використанням пакетів математичних програм *Mathcad* та *MS EXCEL*» [Текст]: навчальний посібник для студентів денної та заочної форм навчання / Т.В. Квітка; М-во освіти і науки України, Донец. нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського, каф. вищої мат. та інформ. систем. – Кривий Ріг: ДонНУЕТ, 2018. – 86 с.

Навчальний посібник містить як класичний підхід до вивчення розділу «Елементи лінійної алгебри», так і вивчення способів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою пакетів математичних програм *Mathcad* та *MS EXCEL*, що відповідає сучасним вимогам до фахівців. У навчальному посібнику містяться теоретичні відомості з кожної теми, контрольні питання, приклади розв’язування задач з поясненнями, задачі для самостійного виконання, 30 варіантів індивідуальних та тестових завдань. Рекомендується для використання у процесі навчання вищої математики при вивченні змістового модуля «Елементи лінійної алгебри».
Наведено список рекомендованої літератури.

УДК 519.61 +672

Зміст

Вступ. ……………………………………………………………………………6

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри ……………………………………..…8

1.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), основні поняття і означення …………………………………………………………………....8

1.2. Розв'язування СЛАР методом Гаусса ……………………………..…9

1.3. Визначники другого та третього порядків, їх властивості ……………...14

1.4. Мінори. Алгебраїчні доповнення. Теореми про визначники. ……………17

1.5. Розв'язування СЛАР за формулами Крамера ……………………..…...22

1.6. Поняття матриці, основні види матриць ……………………………25

1.7. Лінійні операції над матрицями ……………………………………..29

1.8. Множення матриць ………………………………………………...…30

1.9. Визначник добутку матриці ………………………………………..…32

1.10. Обернена матриця. Теорема про обернену матрицю ……………………34

1.11. Запис СЛАР у матричній формі. Розв'язування СЛАР матричним способом. ……………………………………………………………...38

1.12. Ранг матриці. Мінор матриці. …………………………………..… 42

1.13. Елементарні перетворення матриць. Теорема про елементарні перетворення. ……………………………………………………………47

1.14. Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій сумісності СЛАР. …………….. 49

Розділ 2. Розв'язування СЛАР за допомогою пакетів *Mathcad та MS EXCEL*..52

2.1. Розв'язування СЛАР за допомогою пакету *Mathcad.* ………………………52

2.1.1. Розв'язування СЛАР за допомогою обчислювального блоку функцій Given/Find. ………………………………………………………………..53

2.1.2. Розв'язуваня СЛАР за допомогою функції «lsolve». ……………………55

2.1.3. Розв'язуваня СЛАР за формулами Крамера. ……………………………57

2.1.4. Матриці. Лінійні операції над матрицями. Добуток матриць у *Mathcad*. ………………………………………………………………..….59

2.1.5. Дослідження СЛАР на сумісність. ……………………………………61

2.2. Розв’язування СЛАР за допомогою пакету *MS EXCEL*. ……………..…63

2.2.1. Розв’язування СЛАР за формулами Крамера у пакеті *MS EXCEL*. … 63

2.2.2. Розв’язування СЛАР методом оберненої матриці у пакеті *MS EXCEL*. 66

Індивідуальні завдання. ………………………………………………….…71

Тести. ……………………………………………………………………………77

Література ……………………………………………………………………..…84

Вступ

Дисципліна «Вища математика» є фундаментальною. Її метою є формування у майбутніх спеціалістів базових математичних знань для розв’язування задач у професійній діяльності, умінь аналітичного мислення та математичного формулювання виробничих задач. В результаті вивчення дисципліни здобувач вищої освіти (ЗВО) повинен вміти володіти основами математичного апарату для ефективного вивчення інших дисциплін; аналізувати та формулювати постановку задачі з використанням математичних методів, володіти навичками розв’язування типових задач, самостійно працювати з навчальною, навчально-методичною літературою, вибудовувати план самостійної роботи над індивідуальними завданнями, залучати різноманітні ресурси для самоосвітньої діяльності, використовувати необхідні програмні продукти для аналізу та розв’язування задач.

На сучасному етапі рівень підготовки випускників закладів вищої освіти здебільшого визначається тим набором спеціалізованих інструментів, якими вони володіють на професійному рівні. Тому перед закладами вищої освіти на одне із перших місць виходить задача озброєння здобувачів вищої освіти, крім фундаментальних знань, технологіями які широко використовуються в бізнесі, науці та промисловості. Представниками таких інструментів є *Mathcad* та *MS EXCEL.*

Розділ вищої математики «Елементи лінійної алгебри», що вивчає різні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, є важливою основою для вивчення ряду математичних та економічних дисциплін. У запропонованому навчальному виданні розглядається як класичний підхід до вивчення розділу «Елементи лінійної алгебри», так і запропоновано вивчення способів розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою пакетів математичних програм *Mathcad* та *MS EXCEL*, що відповідає сучасним вимогам до фахівців.

Зміст навчального посібника відповідає робочій програмі вивчення дисципліни «Вища математика». В розділі «Елементи лінійної алгебри» кожна тема супроводжується достатньою кількістю розв’язаних прикладів, контрольними запитаннями, добіркою завдань для самостійного виконання, що формують певний стиль самоосвітньої діяльності студентів направлений на самостійне опрацювання матеріалу. Другий розділ «Розв’язування СЛАР за допомогою пакетів *Mathcad* та *MS EXCEL*» присвячений застосуванню цих популярних математичних пакетів до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, роботі з матрицями. Розглядаються різні функції пакетів для розв’язування поставлених задач. Кожен з параграфів супроводжується розібраними прикладами та завданнями для самостійного виконання. Наприкінці наведено комплекс індивідуальних завдань, які пропонується використовувати для самостійного розв’язування, що допоможе контролювати результати самостійної роботи та самоосвітньої діяльності. Також наведено приклад тесту, список використаної літератури.

Порядок поточного оцінювання знань ЗВО з дисципліни

Успішне виконання ЗВО завдань поточного контролю є обов’язковою умовою участі його в складанні екзамену. Об’єктом поточного контролю знань ЗВО є :

- ✓ контроль систематичності та активності роботи протягом семестру над вивченням програмного матеріалу дисципліни,
- ✓ виконання завдань для самостійного опрацювання,
- ✓ контроль за виконанням індивідуальних завдань (типових розрахунків).

Результати виконаної роботи подаються ЗВО в окремому зошиті.

Завдання з типових розрахунків виконуються ЗВО в позааудиторний час протягом вивчення дисципліни і здаються в указаний викладачем термін. До захисту типового розрахунку ЗВО допускається при умові правильного виконання всіх завдань.

Навчальний посібник буде корисним ЗВО усіх форм навчання при підготовці до аудиторних занять, у процесі самоосвіти та при підготовці до контрольних робіт та іспиту з навчальної дисципліни.

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри

1.1.Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), основні поняття і означення

Означення

Системою $\boldsymbol{m}$ лінійних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими: $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1),$$

де числа $\boldsymbol{a_{ij}}$ (i=1, 2, … m, j=1, 2, … n) біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа $\boldsymbol{b_i}$ — вільними членами системи (1).

Основні поняття

- ✓ Система рівнянь (1) називається ***однорідною,*** якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і ***неоднорідною,*** якщо хоч один з них відмінний від нуля.
- ✓ Множина чисел $\boldsymbol{a_1}$ $\boldsymbol{a_2}$, …, $\boldsymbol{a_n}$ називається ***впорядкованою,*** якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д.

  Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису ***a, b, c*** число ***a*** вважається першим, ***b*** — другим, ***c*** — третім, в запису ***b, a, c*** першим є число ***b,*** другим — число ***a*** третім — число ***c***.
- ✓ Упорядкований набір ***n*** чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ називається ***розв'язком системи (1),*** якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, …, $\boldsymbol{x_n}$ усі рівняння системи перетворюються на тотожності.

Таку систему чисел називають також ***n*-вимірним вектором,** або точкою *n*-вимірного простору.

- ✓ Система рівнянь називається ***сумісною,*** якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною,*** якщо вона не має жодного розв'язку.
- ✓ Сумісна система називається ***визначеною,*** якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір ***n*** чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, який перетворює всі рівняння системи ***(1)*** в тотожності.
- ✓ Сумісна система називається ***невизначеною,*** якщо вона має більше, ніж один розв'язок.
- ✓ Дві системи лінійних рівнянь називаються ***еквівалентними,*** якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків. Еквівалентні системи дістають, зокрема, внаслідок елементарних перетворень даної системи.

Елементарні перетворення

До елементарних перетворень відносять наступні операції:

1. перестановка рівнянь у системі;
2. множення будь-якого рівняння системи на дійсне число відмінне від нуля;
3. додавання до обох частин рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на деяке число λ.

1.2. Розв'язування СЛАР метолом Гаусса

Одним з найпоширеніших методів розв'язування систем лінійних рівнянь є метод послідовного виключення невідомих, або метод Гаусса. Цей метод запропонований К. Гауссом і ґрунтується на елементарних перетвореннях системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай маємо ***систему (1***), для спрощення задачі розглядатимемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Очевидно, що серед коефіцієнтів a_{ij} хоча б один відмінний від нуля. Якщо ж $a_{11} = 0$, то першим в системі (***1)*** запишемо те рівняння, в якому коефіцієнт при $\boldsymbol{x_{1n}}$ відмінний від нуля. Позначимо цей коефіцієнт через $a_{11}^{'}$.

Перетворимо систему ***(1),*** виключаючи $\boldsymbol{x_1}$ в усіх рівняннях, крім першого. Для цього помножимо перше рівняння на $-\frac{\boldsymbol{a_{21}}}{\boldsymbol{a_{11}}}$ і додамо до другого, потім помножимо перше рівняння на $-\frac{\boldsymbol{a_{31}}}{\boldsymbol{a_{11}}}$ і додамо до третього рівняння. Всі нові коефіцієнти позначимо $a_{ij}^{'}$, відповідно до їх положення у системі.

$$\begin{cases} a_{11}^{'}x_1 + a_{12}^{'}x_2 + a_{13}^{'}x_3 = b_1^{'} \\ \qquad\qquad a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 = b_2^{'} \\ \qquad\qquad a_{32}^{'}x_2 + a_{33}^{'}x_3 = b_3^{'} \end{cases} \quad (2)$$

У третьому рівнянні крім $\boldsymbol{x_1}$ слід також виключити і $\boldsymbol{x_2}$. Для цього за базове рівняння беремо друге рівняння системи (2) і помножимо його на $-\frac{\boldsymbol{a_{32}^{'}}}{\boldsymbol{a_{22}^{'}}}$ та додамо до третього. Всі нові коефіцієнти позначимо $a_{ij}^{''}$, відповідно до їх положення у системі. І отримаємо систему (3), яку будемо називати ступінчатою:

$$\begin{cases} a_{11}^{'}x_1 + a_{12}^{'}x_2 + a_{13}^{'}x_3 = b_1^{'} \\ \qquad\qquad a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 = b_2^{'} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{''}x_3 = b_3^{''} \end{cases} \quad (3)$$

Ступінчату систему (3) можна легко розв'язати починаючи з останнього рівняння: спочатку знайти $\boldsymbol{x_3}$: $x_3 = \frac{b_3^{''}}{a_{33}^{''}}$, отримане значення підставити у друге рівняння, з якого знайти $\boldsymbol{x_2}$: $x_2 = \frac{b_2^{'} - a_{23}^{'}\frac{b_3^{''}}{a_{33}^{''}}}{a_{22}^{'}}$, а потім $\boldsymbol{x_2}$ та $\boldsymbol{x_3}$ підставити в перше рівняння для знаходження $\boldsymbol{x_1}$:

$$x_1 = \frac{b_1^{'} - a_{13}^{'}x_3 - a_{12}^{'}x_2}{a_{11}^{'}} = \frac{b_1^{'} - a_{13}^{'}\frac{b_3^{''}}{a_{33}^{''}} - a_{12}^{'} \cdot \frac{b_2^{'} - a_{23}^{'}\frac{b_3^{''}}{a_{33}^{''}}}{a_{22}^{'}}}{a_{11}^{'}}.$$

Зауваження 1. Викладений нами метод послідовного виключення змінних називають ще алгоритмом Гаусса. Він складається з однотипних операцій і легко реалізується за допомогою сучасних математичних програм.

Зауваження 2. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гаусса зручніше приводити до трикутного чи трапецієподібного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи, тобто матрицю, утворену приєднанням до матриці її коефіцієнтів стовпця вільних членів. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку системи.

<u>Приклад</u>

Розв’язати СЛАР методом Гаусса: $\begin{cases} 2x-4y+3z=1 \\ x-2y+4z=3 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$

Розв'язування. Спочатку поміняємо місцями перше та друге рівняння, щоб коефіцієнт елемента $\boldsymbol{x}$ першого рівняння дорівнював 1. Одержимо:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 3x-y+5z=2 \end{cases}$$

Тепер перше рівняння помножимо на (-2) і додамо до другого (щоб одержати $a_{21}=0$), а потім помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до третього рівняння (щоб одержати $a_{31}=0$). Тоді будемо мати систему

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ \qquad -5z=-5 \\ \quad 5y-7z=-7 \end{cases}$$

Тепер друге рівняння поділимо на (-5), третє рівняння поділимо на 5 і поміняємо їх місцями. Одержимо систему трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x-2y+4z=3 \\ \quad y-\dfrac{7}{5}z=-\dfrac{7}{5} \\ \qquad z=1 \end{cases}$$

В третьому рівнянні знайдено $z=1$, підставимо його в друге рівняння для знаходження змінної $\boldsymbol{y}$:

$$y = -\frac{7}{5} + \frac{7}{5} \cdot z,$$

$$y = -\frac{7}{5} + \frac{7}{5} \cdot 1,$$

$$y = 0$$

У перше рівняння підставляємо знайдені $\boldsymbol{y}$ та $\boldsymbol{z}$, для знаходження $\boldsymbol{x}$:

$$x = 3 + 2y - 4z$$

$$x = 3 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1$$

$$x = -1$$

Отже, система має єдиний розв'язок (-1,0,1).

<u>Приклад 2</u>

Розв’язати СЛАР методом Гаусса: $\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$

Розв’язання: Скористаємось ***зауваженням 2*** і наступну систему будемо розв’язувати записавши розширену матрицю системи, яка складається з коефіцієнтів системи та вільних членів, що записуються у відповідних рядках і стовпцях, при цьому вільні члени відділимо вертикальною рискою.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Виконуємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці даної системи для приведення матриці до ступінчатої форми: додамо перше і друге рівняння системи, результат записуємо у другий рядок; перше рівняння системи множимо на (-2) та додаємо до третього рівняння системи в результаті отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Друге рівняння помножимо на (-1) і додамо до третього, отримуємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

При розв’язуванні всі отримані матриці записуються у рядок і поєднуються значком еквівалентності (~), таким чином запис розв’язування буде виглядати так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

З останньої матриці ступінчатої форми записують ступінчату систему, яка еквівалентна заданій:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ \qquad y - z = 2 \\ \qquad\quad z = 2 \end{cases}$$

В останньому рівнянні $z = 2$.

З другого рівняння $y = z + 2$,

$y = 2 + 2$.

$y = 4$.

З першого рівняння $x = -1 + y - 2z$,

$x = -1 + 4 - 2 \cdot 2$.

$x = -1$.

Відповідь: (-1; 4; 2).

Контрольні питання

1. Що називається системою ***n*** лінійних рівнянь з ***m*** невідомими?
2. Яка система називається однорідною?
3. Яка СЛАР називається неоднорідною?
4. Що називається розв’язком СЛАР?
5. Яка система рівнянь називається сумісною (несумісною)?
6. Яка система рівнянь називається визначеною (невизначеною)?
7. Які СЛАР називають еквівалентними?
8. Перелічить елементарні перетворення СЛАР.
9. У чому полягає розв’язування СЛАР методом Гаусса?

Завдання для самостійного розв’язування:

Розв’язати СЛАР методом Гаусса:

$$1.\begin{cases} 2x-2y-z=3, \\ 3x+4y-5z=1, \\ -5x-4y+3z=-15. \end{cases} \qquad 2.\begin{cases} 4x+4y+z=-27, \\ -5x+5y+4z=-1, \\ 2x-y-3z=-5. \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} -4x-3+2z=-12, \\ -5x-4y+5z=-22, \\ -2x+3y-z=-9. \end{cases} \qquad 4.\begin{cases} 2x-y+5z=-2, \\ 4x+y+5z=12, \\ 4x-4y-5z=22. \end{cases}$$

1.3. Визначники другого та третього порядків, їх властивості

Означення 3

Значення виразу вигляду $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$ (4)

називають визначником другого порядку.

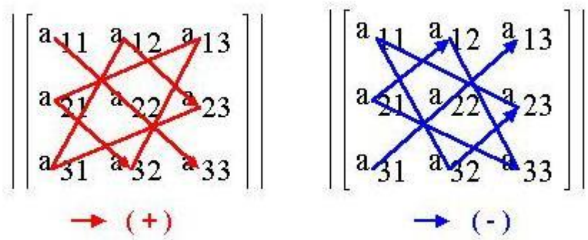
Означення 4

Визначником третього порядку називається число, яке ставиться у відповідність матриці і обчислюється за правилом:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33} \quad (5)$$

Запам'ятовувати правило обчислення визначника краще за схемою:



Такий спосіб обчислення визначника називають правилом Сарюса.

<u>Приклад 3</u>

Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2 + 2\cdot1\cdot3 + 2\cdot4\cdot1 - 3\cdot5\cdot1 - 4\cdot1\cdot3 - 2\cdot2\cdot2 =$$

$$= 30 + 6 + 8 - 15 - 12 - 8 = 44 - 35 = 9.$$

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпцями (транспонувати):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника містить тільки нулі, то визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник містить два рядки (стовпці) з рівними відповідними елементами, то він дорівнює нулю.

5. Спільний множник елементів одного рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Якщо елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якшо кожен елемент i-го рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі визначників, у одного з яких i-м рядком (стовпцем) є перший доданок, а другого – другий доданок:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{12} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{12} & a_{23} \\ a_{31} & b_{12} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне і те саме число відмінне від нуля.

Приклади

Обчислити визначники, користуючись їх властивостями:

1) $$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -10 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{відповідні елементи другого і третього} \\ \text{рядків пропорційні з коефіцієнтом } (-2), \\ \text{то за властивістю 6:} \quad \Delta = 0 \end{bmatrix} = 0$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{всі елементи другого стовпця дорівнюють нулю,} \\ \text{отже за властивістю 3 і визначник} \quad \Delta = 0 \end{bmatrix} = 0$$

3) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{відповідні елементи першого і третього стовпців} \\ \text{рівні між собою, отже за властивістю 4:} \quad \Delta = 0 \end{bmatrix} = 0$$

4) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 15 & 9 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 18 \cdot (15 + 2 + 2 - 5 - 2 - 6) = 18 \cdot (19 - 13) = 18 \cdot 6 = 108.$

5) Перевіримо властивість 8 на визначнику отриманому після винесення спільних множників із визначника прикладу 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$$

Після множення прешого рядка визначника на (-1) і додавання його до другого рядка і такої ж операції з третім рядком, отримуємо визначник у якого під головною діагоналлю стоять нулі. Отриманий визначник легко обчислюється. Порівнявши результати обчислення визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, бачимо, що вони рівні. Отже ми переконались у справедливості властивості 8.

Завдання: Властивості 1,2,3,7 пропонуємо перевірити самостійно.

1.4. Мінори. Алгебраїчні доповнення. Теореми про визначники.

Нехай маємо визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Означення:

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ визначника третього порядку називається визначник другого порядку, який утворюється з заданого визначника в результаті викреслення $\boldsymbol{i}$ – рядка і $\boldsymbol{j}$ – стовпця.

Означення:

Алгебраїчним доповненням $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (7)$$

Приклад:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Приклад:

Для визначника $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{21}.

Для спрощення обчислень викреслюємо 2 рядок і 1 стовпець заданого визначника: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 2) = -(18 - 8) = -10.$$

Зауваження

Знаки алгебраїчних доповнень залежать від положення елемента, тому корисно запам'ятати таблицю знаків: $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

Теореми про визначники

Терема 1 (про розклад визначника)

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}. \quad (8)$$

Доведемо теорему:

Запишемо розклад визначника за формулою (5)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} =$$

[згрупуємо доданки за елементами першого рядка]

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{вирази у дужках є алгебраїчними доповненнями елементів} \\ \text{першого рядка: } A_{11},\ A_{12},\ A_{13} \text{ відповідно, тому можна записати}\end{array}\right]$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Теорему доведено для першого рядка, аналогічно можна довести теорему для елементів інших рядків і стовпців. Пропонуємо виконати це самостійно.

Теорема 2 (анулювання)

Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Розглянемо суму добутків елементів першого рядка на алгебраїчні доповнення елементів другого рядка:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = -a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) -$$

$$-a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{31}a_{12} = 0.$$

Теорема 3 (заміщення)

Якщо алгебраїчні доповнення одного рядка (стовпця) помножити на деякі числа b_1, b_2, b_3, то отримаємо новий визначник у якому цими числами замінені елементи відповідного рядка (стовпця):

$$b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + b_3 \cdot A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Приклади

1. Обчислити визначник за теоремою про розклад, розклавши визначник за елементами першого рядка: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Запишемо елементи першого рядка: $a_{11} = 2,\ a_{12} = 5,\ a_{13} = 1;$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів першого рядка:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$

$A_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

Підставимо елементи першого рядка та отримані алгебраїчні доповнення в теорему про розклад визначника (8) і отримаємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3-2) - 5 \cdot (9-8) + 1 \cdot (3-4) = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -4$$

2. Обчислити визначник за теоремою про розклад, розклавши визначник за елементами першого стовпця: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (1-8) - 5 \cdot (-2-4) - 3 \cdot (-8-2) =$$

$$= 3 \cdot (-7) - 5 \cdot (-6) - 3 \cdot (-10) = -21 + 30 + 30 = 39.$$

3. Обчислити визначник розклавши за елементами другого рядка і перевірити правильність обчислень розклавши за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Знайдемо визначник по розкладу за елементами другого рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 18 + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 13 = -54 - 4 - 13 = -71.$$

4. Обчислимо визначник, розклавши за елементами третього стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 9 - 1 \cdot 13 + 4 \cdot (-10) = -18 - 13 - 40 = -71.$$

Контрольні питання

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Намалюйте схему обчислення визначника за правилом Саррюса.
4. Наведіть властивості визначників.
5. Що називається мінором визначника третього порядку?
6. Що називається алгебраїчним доповненням елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$?
7. Сформулюйте теорему про розклад визначника і запишіть формулу.
8. Сформулюйте теорему анулювання.
9. Сформулюйте теорему заміщення і запишіть формулу.

Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити визначники за означенням:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

2. Обчислити визначники за теоремою про розклад:

   1. За елементами будь-якого рядка

4) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

   2. За елементами будь-якого стовпця

7) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

3. Знайти алгебраїчні доповнення елементів визначника та виконати перевірку за теоремою анулювання:

10) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

4. Обчислити визначники використовуючи їх власттивості

11) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -8 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 13) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \\ 4 & -12 & 6 \end{vmatrix}$

1.5. Розв'язування СЛАР за формулами Крамера

Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Визначник СЛАР, що складається з коефіцієнтів при невідомих позначаємо Δ і називаємо головним визначником системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Будуємо допоміжні визначники системи замінюючи стовпці коефіцієнтів при невідомих вільними членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Для знаходження невідомих використовуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \qquad (10)$$

Дослідження СЛАР :

1. Якщо визначник системи (1) $\Delta \neq 0$, то система має рішення и при тому єдине, яке може бути знайдене за формулами Крамера.

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; y = \frac{\Delta y}{\Delta}; z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

2. Якщо $\Delta = 0$, але хоча б один з $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – відмінний від нуля, то система (1) несумісна.
3. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta x = \Delta x = \Delta x = 0$, то система має безліч розв'язків.

<u>Приклад</u>

Розв'язати СЛАР за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -1 \\ -x + 3y - 3z = 4 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Розв'язання:

Складаємо і обчислюємо головний визначник СЛАР:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 6 + 3 - 4 = 5,$$

Складаємо і обчислюємо допоміжні визначники СЛАР:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = -3 + 15 - 2 = 10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 10 + 1 - 6 = 5,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2) = 2 - 9 + 2 = -5.$$

Знаходимо невідомі за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad x = \frac{10}{5}; \qquad x = 2;$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad y = \frac{5}{5}; \qquad y = 1;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}; \qquad z = \frac{-5}{5}; \qquad z = -1;$$

Перевірка: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 4 - 3 - 2 = -1 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = -2 + 3 + 3 = 4 \\ 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 2 - 1 - 2 = -1 \end{cases}$

Відповідь: (2; 1; -1)

Контрольні питання

1. Що називається визначником СЛАР?
2. Теорема про розклад визначника.
3. Теорема анулювання.
4. Теорема заміщення .
5. Як утворюються допоміжні визначники?
6. Формули Крамера.
7. Дослідження СЛАР за допомогою формул Крамера.

Завдання для самостійного виконання

Розв’язати СЛАР за формулами Крамера

1. $\begin{cases} 5x - 7y = 3, \\ 6x + 5y = 17; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -9x + 4y = 11, \\ 2x - 7y = 13; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 2y = -6, \\ -5x + 4y = 15; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + y - 3z = -34, \\ -5x - 2y + 2z = 41, \\ 2x - 4y - 3z = 1. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 5x + 4y + 4z = -3, \\ -5x - 3y + 4z = -1, \\ 5x - 2y - 2z = -21 \end{cases}$

$$6.\begin{cases}3x-2y+4z=31,\\4x+2y-2z=10,\\-3x-5y+2z=1.\end{cases}\qquad 7.\begin{cases}-5x-y-4z=44,\\2x+3y-4z=13,\\-2x+5y+2z=5.\end{cases}$$

1.6. Поняття матриці, основні види матриць.

Означення Матрицею розміру $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ називається сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить $\boldsymbol{m}$ рядків і $\boldsymbol{n}$ стовпців.

Ми будемо записувати матрицю у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

або скорочено

$A=\|a_{ij}\|,\ (i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$; а також $A=\|a_{ij}\|m,n.$

Числа $\boldsymbol{a}_{ij}$ які утворюють дану матрицю, називаються її елементами. Перший індекс елемента вказує номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Якщо дві матриці мають однакову кількість рядків і стовпців, то вони називаються матрицями однакового розміру.

Для матриць однакового розміру встановлюється поняття їх рівності: якщо $A = ||a_{ij}||$, $B = ||b_{ij}||$, то рівність $A = B$ означає, що $a_{ij} = b_{ij}$ при всіх i, j.

- ✓ Матриця, яка складається з одного рядка, називається матрицею рядком, або вектор-рядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

- ✓ Матриця, що має один стовпець називається, матрицею стовпцем або вектор-стовпцем.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- ✓ Матриця, яка складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто будь-яке число можна розглядати як матрицю, що має один рядок і один стовпець.
- ✓ Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулеві, називають нульовою матрицею і позначають через $\boldsymbol{O}$.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається квадратною.

Квадратну матрицю, яка складається з n рядків і n стовпців, називають матрицею n-го порядку і позначають $A = \|a_{ij}\|_n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ✓ Сукупність елементів квадратної матриці, які розташовані на лінії, що сполучає лівий верхній кут з правим нижнім, називається головною діагоналлю.
- ✓ Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі, називаються діагональними матрицями і записуються так:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- ✓ Якщо всі елементи a_{ij} діагональної матриці дорівнюють один одному, то матриця називається скалярною. Вона має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & a \end{pmatrix}.$$

- ✓ Якщо a = 1, то скалярна матриця називається одиничною і позначається буквою ***E***.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Іноді для запису елементів одиничної матриці використовують символ Кронекера:

$$\begin{cases} 1, \text{ якщо } i = j, \\ 0, \text{ якщо } i \neq j, \end{cases}$$

Тоді $E = \|\delta_{ij}\|$.

- ✓ Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, що знаходяться вище (або нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулеві.

Зокрема, матриця

$$
B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

називається правою, або верхньою трикутною матрицею, а матриця

$$
C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}
$$

називається лівою, або нижньою трикутною матрицею.

Транспонування матриці

Матриця $A^T = (a_{ij})^T$називається транспонованою щодо матриці $A = (a_{ij})$ якщо її елементи $a_{ij}^T = a_{ij}$

Операція переведення матриці A в транспоновану A^T називається транспонуванням.

Отже, ***транспонування матриці*** - це зміна місцями рядків і стовпців зі збереженням їх нумерації.

Приклад

Транспонуємо матрицю $\boldsymbol{A}$:

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}
$$

Для цього замінюємо відповідні рядки стовпцями і отримуємо транспоновану матрицю $\boldsymbol{A^T}$:

$$
A^T = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}
$$

Якщо $A = A^T$, то матриця A називається симетричною.

Наприклад, симетричною є матриця:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7. Лінійні операції над матрицями

До лінійних операцій над матрицями належить їх додавання і множення матриці на число.

Сумою A+B двох матриць A та B називається матриця C=(c_{ij}), елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B.

Нехай матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакового розміру. Додавати можна матриці тільки однакового розміру.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ ***на число α називається матриця, елементи якої отримуються із відповідних елементів матриці A множенням на число α:***

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha a_{ij})$$

Матриця (-1)*A* = -*A* є протилежною до матриці *A*. Вона має ту властивість, що $A + (-A) = O$.

Сума матриць *A* і -*B* називається різницею матриць *A* і *B* та позначається *A* - *B*.

Операції додавання матриць і множення на число мають наступні властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + 0 = A$;
4. $A + (-A) = 0$;
5. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$:
6. $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;
7. $\alpha (\beta A) = (\alpha\beta) A$;
8. $1 \cdot A = A$

1.8. Множення матриць

Добуток $A \times B$ матриці *A* на матрицю *B* визначається тільки за умови, що кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*. Такі матриці називаються узгодженими.

Нехай дані матриця *A* розміру $m \times n$ і матриця *B* розміру $n \times p$:

$$A = (a_{ij}),\ B = (b_{jk}),$$

Означення

Добутком $A \times B$ матриць $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{jk})$, записаних у визначеній послідовності (*A* — перша, *B* — друга), називається матриця $C = (c_{ik})$, елементи c_{ik} якої визначаються за таким співвідношенням:

$$C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}\ , \text{ де } i = \overline{1, m}\ ,\ k = \overline{1, p}\ .$$

де $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,p}.$

Отже, елементи матриці-добутку визначаються так: елемент c_{jk}, що знаходиться на перетині i-го рядка і k-го стовпця матриці C, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B.

Відзначимо, що добуток двох прямокутних матриць це прямокутна матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другої матриці.

Приклад

Знайдемо добуток матриць $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$ та $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot4+2\cdot1 & 1\cdot5+3\cdot6+2\cdot2\\ 4\cdot3+5\cdot4+(-2)\cdot1 & 4\cdot5+5\cdot6+(-2)\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 27\\ 30 & 46\end{pmatrix}$$

З означення добутку матриць зрозуміло, що з можливості множення матриці A на B не випливає можливість множення B на A. Так для матриць

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ та $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5 & -2\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ добуток $A\times B$ існує, а добуток $B\times A$ неможливий, оскільки матриці B та A неузгодженні, тому що кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A.

Добутки $A{\times}B$ *і* $B{\times}A$ одночасно існують, якщо A і B квадратні матриці одного і того ж порядку.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$; $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 7 & 1\end{pmatrix}$ знайти $A\cdot B$ та $B\cdot C$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3+14 & 2+2\\ 9+28 & -6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 4\\ 37 & -2\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-3-6 & -6+8\\ 7-3 & 14+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 2\\ 4 & 18\end{pmatrix}$$

$A\cdot B\neq B\cdot A$ – добуток некомутативний!

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 0\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{B}=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & 2 & -1\\ \text{-}1 & 2\text{-}1 & -3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}4+8+3 & 5+4-6 & -6+2+9\\ 16+15+0 & 20+10+0 & -8-5+0\\ 28-9-1 & 35-6+2 & -14+3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 3 & 5\\ 31 & 30 & -13\\ 18 & 31 & -14\end{pmatrix}$$

1.9. Визначник добутку матриці

Теорема: визначник добутку двох квадратних матриць n-го порядку дорівн ює добутку їх визначників, тобто $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}; \qquad \det\text{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

Перевіримо для матриць другого порядку

$$\det(A\cdot B)=\det\left(\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12}\\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}a_{12}\cdot b_{21} & a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11} & a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix}+$$

$$+\det\begin{pmatrix}a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}\\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}\end{pmatrix}=\underbrace{a_{11}\cdot b_{11}\cdot a_{21}\cdot b_{12}}_{0}+\underbrace{a_{12}\cdot b_{21}\cdot a_{22}\cdot b_{22}-a_{12}\cdot b_{22}\cdot a_{22}\cdot b_{21}}_{0}+$$

$$+\underbrace{a_{11}\cdot b_{11}\cdot a_{22}\cdot b_{22}-a_{12}\cdot b_{22}\cdot a_{21}\cdot b_{11}}_{b_{11}b_{22}(a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})}+\underbrace{a_{12}\cdot b_{21}\cdot a_{21}\cdot b_{12}-a_{11}\cdot b_{12}\cdot a_{22}\cdot b_{21}}_{b_{21}b_{12}(a_{12}\cdot a_{21}-a_{11}\cdot a_{22})}=$$

$$=b_{11}b_{22}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}-b_{21}b_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\det A\cdot(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})=\det A\cdot\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=\det A\cdot\det B.$$

<u>Контрольні питання:</u>

1. Що називається матрицею?
2. Яка матриця називається прямокутною?
3. Яка матриця називається квадратною?
4. Яка матриця називається матрицею-стовпцем?
5. Яка матриця називається матрицею рядком?
6. Яка матриця називається діагональною?
7. Яка матриця називається одиничною?
8. Яка матриця називається нульовою?
9. Які лінійні операції виконуються над матрицями?
10. Який механізм виконання лінійних операцій над матрицями?
11. Властивості лінійних операцій над матрицями.
12. Добуток матриць.
13. Властивості добутку матриць.
14. Визначник добутку матриць.
15. Теорема про визначник добутку матриць.

Завдання для самостійного виконання:

1. Задано матриці *A, B, C* знайдіть значення виразів:

   3A; B-2A; A+3B; C+2A-B; 2C-A

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть добутки матриць *A і B*, якщо вони існують:

   $$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix};$$

   $$2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

   $$3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

   $$4)\ A = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Для чисел $\alpha =$ день тижня, $\beta =$7-день тижня та матриць *A і B* перевірити властивості лінійних операцій над матрицями.

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Для чисел $\alpha =$ день тижня, $\beta =$7-день тижня та матриць *A і B* перевірити властивості добутку матриць.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти визначники добутків матриць з завдання 2, якщо вони існують.

1.10. Обернена матриця. Теорема про обернену матрицю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нехай A — квадратна матриця.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця A називається *виродженою,* якщо $\det A = 0$, і *невиродженою,* якщо $\det A \neq 0$.

Теорема: Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця А була невиродженою.

Необхідність: Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $A A^{-1} = E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, тому $\det A \neq 0$.

Достатність: Нехай $\det A \neq 0$, тоді матриця A має обернену матрицю A^{-1} причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (1) і (2) дорівнюють матриці, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже, $A^{-1}A = A A^{-1} = E$.

Покажемо, що A^{-1} — єдина обернена матриця. Нехай A'' — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' - A''.$$ ●

При знаходженні оберненої матриці слід дотримуватись наступної послідовності дій:

1. Обернена матриця існує тільки до квадратної невиродженої матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тому обчислюємо визначник матриці $\det A$ і впевнюємося, що $\det A \neq 0$.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ і складемо матрицю $\tilde{A}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо матрицю $\tilde{A}^T$ транспоновану до матриці $\tilde{A}$, для цього поміняємо рядки та стовпці місцями

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

4. Знайдемо обернену матрицю за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Зробимо перевірку $A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад: Знайти матрицю , обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 42 - 2 + 18 = -14.$

Матриця A є невиродженою, тому існує матриця A^{-1} обернена до матриці A.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10;$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9;$ $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -8;$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -26;$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 22;$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 10;$

Складемо матрицю $\tilde{A}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & -6 \\ -8 & 3 & 2 \\ -26 & 22 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Знайдемо матрицю $\tilde{A}^T$ транспоновану до матриці $\tilde{A}$

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -26 \\ -9 & 3 & 22 \\ -6 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

4. Знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10 & -8 & -26\\ -9 & 3 & 22\\ -6 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

5. Зробимо перевірку

$$A^{-1}\cdot A=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10 & -8 & -26\\ -9 & 3 & 22\\ -6 & 2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10-24 & -20-32+52 & 70+8-78\\ -9+9 & 18+12-44 & -63-3+66\\ -6+6 & 12+8-20 & -42-2+30\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-14 & 0 & 0\\ 0 & -14 & 0\\ 0 & 0 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{14} & \frac{8}{14} & \frac{26}{14}\\ \frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{22}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{10}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{7} & \frac{4}{7} & \frac{13}{7}\\ \frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{11}{7}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7}\end{pmatrix}.$$

1.11. Запис СЛАР у матричній формі. Розв'язування СЛАР матричним способом.

Якщо позначити

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_n\end{pmatrix},$$

то згідно з правилом множення матриць та умовою рівності матриць одержимо запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3)$$

у матричній формі:

$A \times X = B$ (4)

Якщо матриця А квадратна порядку ***n*** і її визначник Δ(А) не дорівнює нулю, тоді існує обернена до А матриця A^{-1}, тому можна рівність (4) помножити на A^{-1} зліва. Одержимо:

$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$ (5)

За означенням оберненої матриці маємо:

$$A^{-1} \times A = E$$

тому (5) прийме вигляд:

$$E \times X = A^{-1} \times B$$

Але множення матриці-стовпця ***X*** на матрицю ***E*** не змінює ***X***, тобто $E \times X = E$. Таким чином, одержуємо формулу:

$X = A^{-1} \times B$ (6)

за якою і знаходять розв'язок системи (3) матричним методом.

Отже, матричний метод можна застосовувати у випадку, коли квадратна матриця А має не рівний нулю визначник.

<u>Порада:</u> Для розв'язування неоднорідної системи ***n*** лінійних алгебраїчних рівнянь з ***n*** невідомими матричним методом доцільно здійснювати такий порядок дій:

1) записати основну матрицю системи A і знайти її визначник ΔA, якщо $\Delta A = 0$, то система розв'язку не має;

2) якщо $\Delta A \neq 0$, тоді знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці A;

3) помножити обернену матрицю A^{-1} на матрицю-стовпець вільних членів системи. Одержаний при цьому стовпець згідно з формулою (6) і буде розв’язком системи.

<u>Приклад:</u> Знайти розв'язок заданої системи матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \quad - \quad 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв’язування. Основною матрицею заданої системи буде матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матриця-стовпець невідомих $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

матриця-стовпець вільних членів $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Запишемо систему у матричній формі (4):

$$A \times X = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 1 + 2 = 6$$

Транспонуємо матрицю A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Для запису оберненої матриці A^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці A^T:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже обернена матриця системи

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Тепер за формулою (6) знаходимо розв'язок заданої системи:

$$X = A^{-1} \times B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \quad + \ 0 \cdot (-1) \ + \quad 2 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + \ (-3) \cdot (-1) \ + \ 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: *(1;1;1).*

<u>Контрольні питання:</u>

1. Яка матриця називається оберненою?
2. Яка матриця називається невиродженою?
3. Яка матриця називається одиничною?
4. Теорема про обернену матрицю.
5. Алгоритм знаходження оберненої матриці.
6. Матрична форма запису СЛАР.
7. Розв'язування матричного рівняння.
8. Розв'язування СЛАР матричним способом.

<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

1. Знайти обернені матриці до матриць:

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

6. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -6 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв’язати СЛАР матричним способом:

1. $\begin{cases} -2x-2y-z=3, \\ -3x+4y-5z=1, \\ 5x-4y+3z=-15. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2x-2y-z=-9, \\ -3x+4y-5z=-10, \\ 5x-4y+3z=-15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x-3y-2z=-2, \\ 2x+5y-2z=29, \\ 5x+5y+z=41. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} -5x-2y-4z=-2, \\ -5x-4y-3z=1, \\ 4x+3y+4z=-2. \end{cases}$

1.12. Ранг матриці. Мінор матриці.

Нехай ***A*** - матриця розміру ***m*** х ***n.*** Виберемо в ній довільно ***к*** рядків і ***к*** стовпців. Елементи, які знаходяться на перетині вибраних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю ***k-го*** порядку.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>Означення:</u> Мінором порядку ***k*** матриці ***A*** називається визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині вибраних довільно ***k*** рядків та ***k*** стовпців.

Наприклад, у матриці

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

виберемо перший, другий і третій рядки та перший, третій і четвертий стовпці. Визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

є одним із мінорів 3-го порядку матриці ***B.*** Мінором 2-го порядку є, наприклад, визначник

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$. Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку.

Очевидно, що матриця ***A*** розміру ***m***×***n*** має мінори будь-якого порядку від 1-го до ***k***-го, де ***k*** = min(***m, n***)***.*** Серед усіх відмінних від нуля мінорів матриці ***A*** ***є*** хоча б один мінор, порядок якого буде найбільшим.

<u>Означення:</u> Рангом матриці називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Якщо ранг матриці ***A*** дорівнює r, то це означає, що матриця ***A*** має відмінний від нуля мінор порядку r, але будь-який мінор, порядок якого більший за r, дорівнює нулю.

Ранг матриці ***A*** позначимо символом: ***Rg(A).*** Очевидно, що завжди виконується співвідношення

$$0 \leq Rg(A) \leq \min(m, n).$$

Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

має єдиний мінор четвертого порядку, який дорівнює нулю.

Серед мінорів третього порядку є мінор

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

Розглянемо тепер ті <u>властивості рангу матриці</u>, які спрощують його обчислення.

- ***<u>Властивість 1.</u>*** При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

- ***<u>Властивість 2.</u>*** Ранг матриці не зміниться, якщо переставити її рядки (стовпці).

- ***<u>Властивість 3.</u>*** Ранг матриці не зміниться, якщо помножити всі елементи її рядка (стовпця) на відмінне від нуля число.

• ***Властивість 4.*** Ранг матриці не зміниться, якщо до одного з її рядків (стовпців) додати інший рядок (стовпець), помножений на деяке число.

• ***Властивість 5.*** Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), що дорівнює нулю.

Перш ніж сформулювати наступну властивість, введемо поняття лінійної комбінації вектор-стовпців (вектор-рядків). Розглянемо $\boldsymbol{k}$ вектор-стовпців вигляду

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \dots \\ x_{ni} \end{pmatrix}, \quad (i = \overline{1,k}).$$

Помножимо кожен вектор-стовпець $\boldsymbol{X_i}$ на деяке число $\boldsymbol{\Lambda_I}$ $(i = \overline{1,k})$. і додамо їх. Тоді отримаємо вектор-стовпець

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{1i} \\ \boldsymbol{x}_{2i} \\ \dots \\ \boldsymbol{x}_{mi} \end{pmatrix},$$

або

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\lambda}_1\mathbf{X}_{1+}\, \boldsymbol{\lambda}_2\mathbf{X}_{2+\,\dots\,+}\, \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{k}}\, \mathbf{X}_{\boldsymbol{k}} \qquad (7)$$

Одержаний вектор-стовпець ***У*** називається **лінійною комбінацією** вектор-стовпців $\boldsymbol{X_i}$ $(i = \overline{1,k})$, а числа $\boldsymbol{\lambda_i}$ $(i = \overline{1,k})$ — коефіцієнтами лінійної комбінації.

Рівність (7) еквівалентна системі рівнянь

$$y_s = \lambda_1 x_{si} + \lambda_2 x_{s2} + \ldots + x_{sk}, \qquad (8)$$

де $s = \overline{1,n}$

Вектор-стовпці $X_1, X_2, \ldots, X_к$ називаються **лінійно залежними,** якщо існують такі числа $ά_i$ $(i = \overline{1,k})$, що справджується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i = \mathbf{0}, \qquad (9)$$

де $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0,$ — нульовий вектор-стовпець.

Вектор-стовпці, які не є лінійно залежними, називаються ***лінійно незалежними.*** Іншими словами, вектор-стовпці X_I $(i = \overline{1,k})$ лінійно незалежні, якщо рівність (9) можлива лише

якщо $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0,$ тобто всі коефіцієнти $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,k})$.

Теорема встановлює зв'язок між поняттями лінійної комбінації і лінійної залежності.

Теорема: Для того щоб вектор-стовпці X_I $(i = \overline{1,n})$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один із них був лінійною комбінацією інших.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай вектор-стовпці X_i $(i = \overline{1,n})$ лінійно залежні. Тоді згідно з означенням існують такі числа »!, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, a_n$, які не всі одночасно дорівнюють нулеві, що

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n = O.$$

Припустимо, що відмінним від нуля є коефіцієнт α_1 Помноживши обидві частини останньої рівності на число $-\frac{1}{\alpha_1}$, отримаємо

$$-X_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) X_n = O,$$

або

$$X_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) X_n,$$

а це співвідношення означає, що вектор-стовпець $\boldsymbol{X_1}$ є лінійною комбінацією решти вектор-стовпців.

Достатність. Нехай, наприклад, вектор-стовпець $\boldsymbol{X_1}$ є лінійною комбінацією решти вектор-стовпців, тобто

$$X_1 = \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_n X_n.$$

Звідси отримуємо:

$$O = (-1)X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n,$$

а це означає, що вектор-стовпці лінійно залежні

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \neq 0\right).$$

- ***<u>Властивість 6.</u>*** Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців)

1.13. Елементарні перетворення матриць. Теорема про елементарні перетворення.

До елементарних перетворень відносять такі перетворення матриць:

- ✓ Перестановка двох довільних рядків (стовпців) місцями;
- ✓ Множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
- ✓ Додавання до елементів одного (рядка) стовпця відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число відмінне від нуля.

<u>Означення:</u> Дві матриці називаються еквівалентними, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою скінченої кількості елементарних перетворень.

Якщо матриці А та В еквівалентні, то це записується так: ***A ~ B***

<u>Теорема про елементарні перетворення:</u>

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, тобто якщо ***A ~ B***, то ***R(A)= R(B).***

<u>Означення</u> *Канонічною називається матриця, в якій напочатку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць (кількість яких може дорівнювати нулеві), а всі інші елементи дорівнюють нулеві.*

За допомогою елементарних перетворень кожну матрицю можна привести до канонічної. Ранг канонічної матриці дорівнює кількості одиниць на її головній діагоналі.

<u>Приклад</u>

Звести до канонічного вигляду матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

і знайти її ранг.

Віднімемо від другого рядка матриці ***A*** перший рядок і поміняємо ці рядки місцями:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Тепер від другого та третього рядків віднімемо перший, помножений відповідно на 2 і 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо від третього рядка другий. Отримаємо матрицю:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця ***B*** еквівалентна матриці ***A,*** оскільки одержана з неї за допомогою скінченої кількості елементарних перетворень.

Очевидно, що ***R*(*B*)** = 2, а отже, і ***R*(*A*)** = 2. Матрицю ***B*** легко привести до канонічної. Віднімаючи перший стовпець, помножений на відповідне число, від усіх наступних, перетворимо в нуль усі елементи першого рядка, крім першого; елементи інших рядків не зміняться. Потім, віднімаючи другий стовпець, помножений на відповідне число, від наступних, перетворимо в нуль усі елементи другого рядка, крім другого, і отримаємо канонічну матрицю

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

1.14. Теорема Кронекера-Капеллі. Критерій сумісності СЛАР.

Нехай задано систему ***m*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Складемо основну матрицю системи ***A***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

і розширену матрицю ***B*** даної системи:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Вичерпну відповідь на запитання про існування розв’язку системи дає теорема Кронекера-Капеллі. Наводимо її без доведення.

<u>Теорема.</u> Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система мав єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший числа невідомих, то система мав безліч розв'язків.

<u>Приклад:</u>

Дослідити на сумісність систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \\ 2x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Оскільки ранг основної матриці *r **(A)*** = 2, а ранг розширеної матриці *r**(B)***= 3 (перевірте), то задана система рівнянь несумісна.

Контрольні питання:

1. Що називається мінором матриці?
2. Що називається рангом матриці?
3. Властивості рангу матриці.
4. Лінійна залежність (незалежність) стовпців матриці.
5. Елементарні перетворення матриць.
6. Теорема про елементарні перетворення.
7. Теорема Кронекера-Капеллі.

Завдання для самостійного виконання:

Дослідити СЛАР на сумісність, у випадку сумісності розв'язати:

1. $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ -6x+4y=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+3y=4, \\ 10x+6y=8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y-4z=1, \\ 3x-2y-z=0, \\ 4x-y-4z=-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+4y-z=-2, \\ x-y+3z=5, \\ 4x+3y+2z=7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y-z=-1, \\ 5x+3y+3z=-2, \\ 3x+2y+4z=-1. \end{cases}$

Розділ 2. Розв'язування СЛАР за допомогою пакетів Mathcad та MS EXCEL

2.1. Розв'язування СЛАР за допомогою пакету Mathcad

Mathcad – одна з найефективніших математичних програм, що є потужним, простим і універсальним середовищем для розв'язування задач у різних галузях науки, техніки, фінансів та економіки, математики та статистики. Пакет дозволяє виконувати як числові розрахунки будь-якого рівня складності, так і символьні (аналітичні). Також даний пакет має широкі графічні можливості, що дозволяє побудувати традиційні типи графіків, поверхні, лінії рівня, тощо.

Особливістю *Mathcad* є те, що це єдина система у якій опис розв'язування математичних задач задається за допомогою звичайних математичних формул і знаків, математичні вирази, що обробляються програмою, майже точно повторюють звичайну математичну символіку, але при зміні у виразі даних, автоматично відбувається перерахунок всіх виразів та перебудова графіків.

Інтерфейс програми є зручним, оскільки користувач працює з аркушем програми як з аркушем паперу, на якому записуються формули, математичні вирази, нотатки-пояснення. Програма містить у собі довідкові вказівки з великою кількістю прикладів, що робить оволодіння програмою досить зручним.

Багато задач економіки зводиться до розв'язування систем рівнянь. Розглянемо способи розв'язування СЛАР за допомогою функцій програми *Mathcad.*

2.1.1. Розв'язування СЛАР за допомогою обчислювального блоку функцій Given/Find

Блок функцій Given/Find у перекладі Дано/ Знайти дозволяє розв'язувати СЛАР записавши умову у вигляді матриць та виконувати перевірку правильності розв'язування та обчислювати нев'язки.

Блок функцій Given/Find складається з трьох послідовних частин:

- Given – ключове слово;
- Система, що записується за допомогою логічних операторів у вигляді рівностей, можливо і нерівностей;
- Find$(x_1; x_2; \dots x_n)$ – вбудована функція для розв'язування системи рівнянь відносно невідомих $(x_1; x_2; \dots x_n)$.

У першому рядку визначаємо матрицю системи ***a*** та матрицю-стовпець вільних членів ***b***.

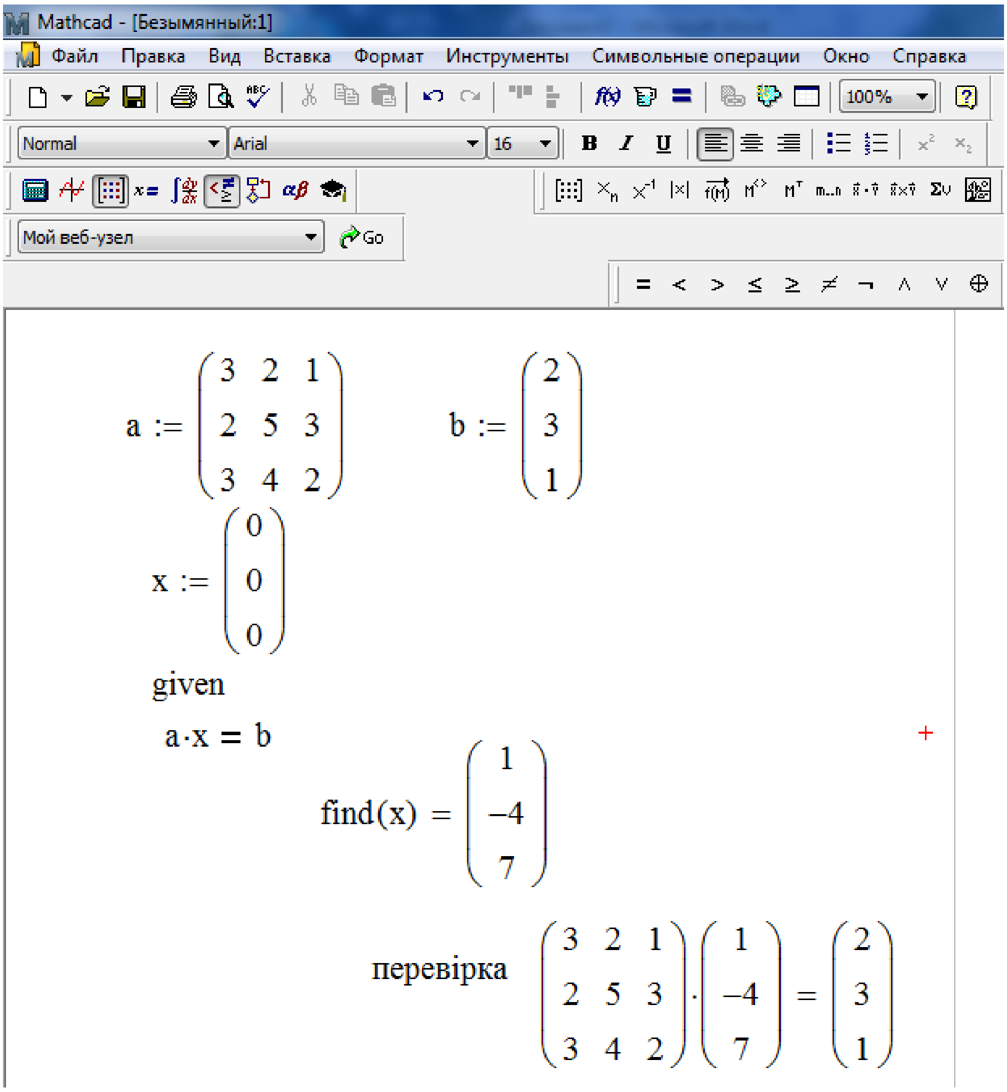
Важливо! При використанні обчислювального блоку Given/Find всім невідомим потрібно присвоювати початкові значення, тому всім елементам стовпця невідомих ***x*** присвоюємо значення 0 та записуємо у другому рядку. Саме матриця-стовпець невідомих є аргументом вбудованої функції Find(x), що розв'язує систему. В третьому рядку записуємо Given, в четвертому матричний запис СЛАР з використанням операторів булевих функцій. В п'ятому рядочку записуємо Find(x) і знак дорівнює з панелі інструментів «Калькулятор», відповідь виводиться автоматично. Перевірку виконуємо нижче перемножаючи матриці $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$.

Розглянемо застосування блоку функцій Given/Find на прикладі.

$$\begin{cases} 3x + 2y + \ \ z = 2 \\ 2x + 5y + 3z = 3 \\ 3x + 4y + 2y = 1 \end{cases}$$

Складаємо головну матрицю системи ***a*** та матрицю-стовпець вільних членів ***b***, всім елементам стовпця невідомих ***x*** присвоюємо значення 0 та записуємо у другому рядку.

На рис.   Показано розв'язування в Mathcad.



Завдання для самостійного виконання:

Виконати розв'язок за допомогою обчислювального блоку функцій Given/Find:

1. $3x + 2y + 4z = -9;$

   $2x - 2y + 5z = 2;$

   $4x - y + 4z = -11.$

2. $4x + 4y + z = -27;$

   $-5x + 5y + 4z = -1;$

   $2x - y - 3z = -5.$

3. $4x + y - 3z = -34;$

   $-5x - 2y + 2z = 41;$

   $2x - 4y - 3z = 1.$

4. $5x + 4y + 4z = -3;$

   $-5x - 3y + 4z = -1;$

   $5x - 2y - 2z = -21.$

2.1.2. Розв'язуваня СЛАР за допомогою функції «lsolve»

Розв'язувати СЛАР можна за допомогою вбудованої функції *lsolve.* Для цього систему рівнянь слід записати у матричній формі $A \cdot x = b$:

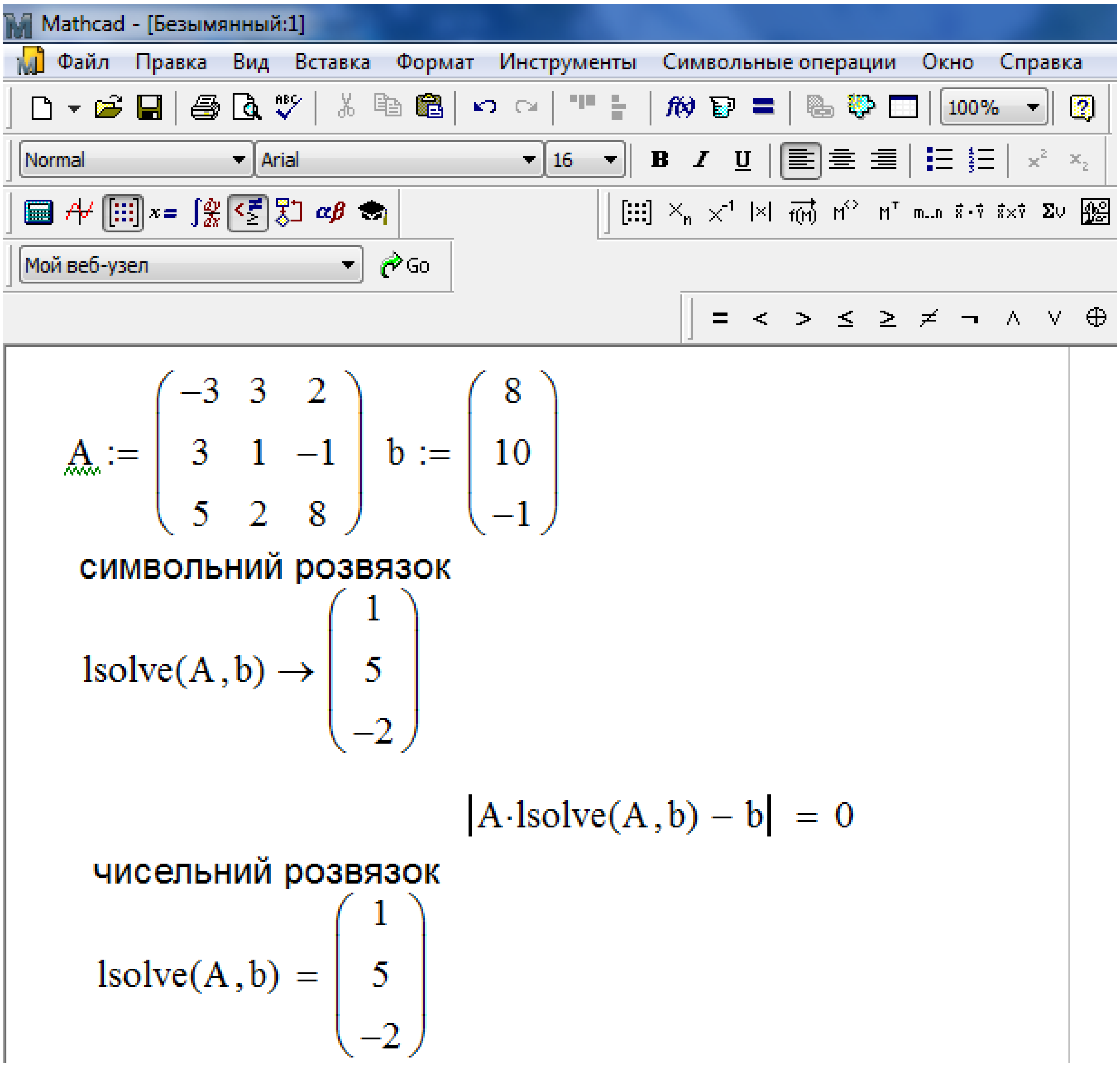
- *lsolve(A,b)* – вектор ров'язку СЛАР,
- A – матриця системи,
- b – матриця-стовпець вільних членів.

Функції *lsolve* використовує алгоритм розв'язування СЛАР Гаусса. Розв'язок системи рівнянь можна отримати як у чисельному так і у символьному вигляді. Для отримання розв'язку у символьному вигляді після функції *lsolve(A,b)* слід поставити стрілку з панелі інструментів «Обчислення», для отримання чисельного розв'язку – слід поставити дорівнює з панелі інструментів «Обчислення» або «Калькулятор». Також обчислюємо абсолютну величину нев'зки: $|A \cdot \mathrm{lsolve}(A, b) - b| = 0$

Розглянемо розв'язування системи $\begin{cases} -3x + y + 2z = 8 \\ 3x + y - z = 10 \\ 5x + 2y + 8z = -1 \end{cases}$ за допомогою функції *lsolve*.

За допомогою присвоювання записуємо матрицю $\boldsymbol{A}$ системи рівнянь та матрицю-стовпець вільних членів $\boldsymbol{b}$. У другому рядку записуємо функцію *lsolve(A,b)* і, в залежності від того в якому вигляді потрібно отримати розв'язок, знак дорівнює або стрілку. У третьому рядку обчислюємо абсолютну величину нев'язки.

Приклад запису в *Mathcad* подано на рис.



<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

Виконати розв'язок за допомогою функції «lsolve»

1.
$$\begin{aligned} 3x - 5y + z &= -17; \\ 2x - 5y + 3z &= -6; \\ 3x - 4y - 2z &= -25. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 18; \\ 2x - 3y + 3z &= 8; \\ -4x - y - 5z &= -28. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 3x - 3y + 4z &= 8; \\ 2x - 3y - 3z &= 33; \\ 3x - 3y - 2z &= 32. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} -2x + 3y - 3z &= 2; \\ -3x - 2y + 5z &= 19; \\ 5x + 3y - 4z &= -27. \end{aligned}$$

2.1.3. Розв'язуваня СЛАР за формулами Крамера

Нагадаємо, що система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_1 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Розв'язується за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

Задаємо сортування orgin=1. Вводимо основну матрицю системи *a* та матрицю стовпець вільних членів *b* за допомогою панелі інструментів «Вектор і матриця».

Обчислюємо значення визначника за допомогою функції «визначник» панелі інструментів «Вектор і матриця», ставимо стрілку і тиснемо enter.

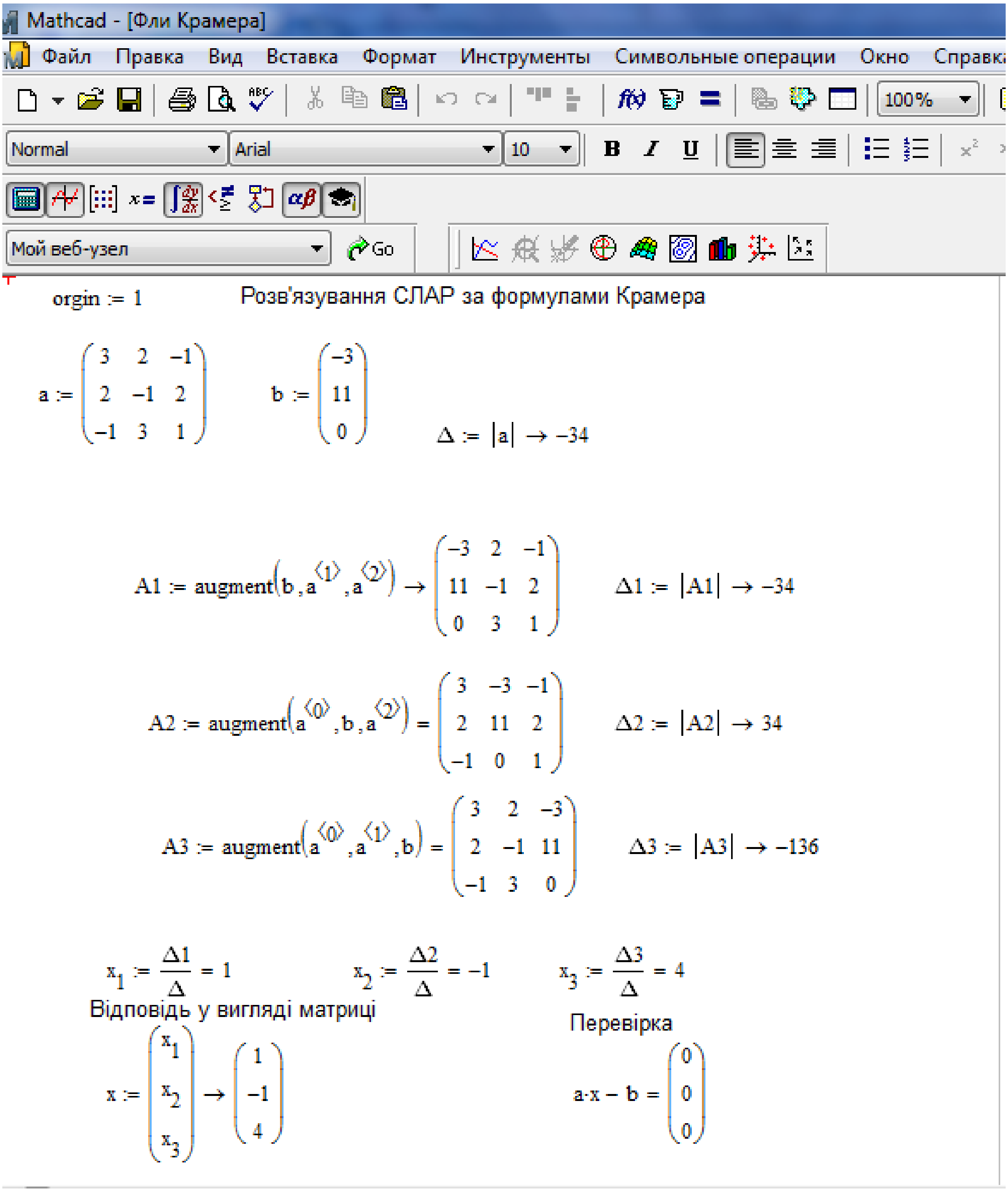
Для знаходження допоміжних визначників скористаємось функцією злиття матриць augment(A, B, C, ...). Місця A, B, C заповнюємо потрібними стовпцями, згідно правил знаходження допоміжних визначників. Для кожного з визначників обчислюємо його значення. Далі використовуємо формули Крамера та виконуємо перевірку.

Розв'яжемо СЛАР за формулами Крамера за допомогою *Mathcad*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Записи на аркуші програми ведемо послідовно і логічно, як у зошиті, користуючись звичними математичними позначеннями, також на аркуші ведемо пояснення і нотатки. Розв'язок записуємо у вигляді матриці-стовпця. Виконуємо перевірку: перемноживши головну матрицю системи ***a*** на матрицю-стовпець розв'язків ***x*** і віднявши матрицю-стовпець вільних членів ***b***.

Приклад розв’язування наведено на рис.



<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

Розв'язати за формулами Крамера:

1.
$$\begin{cases} 3x - 5y + z = -17; \\ 2x - 5y + 3z = -6; \\ 3x - 4y - 2z = -25. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 18; \\ 2x - 3y + 3z = 8; \\ -4x - y - 5z = -28. \end{cases}$$

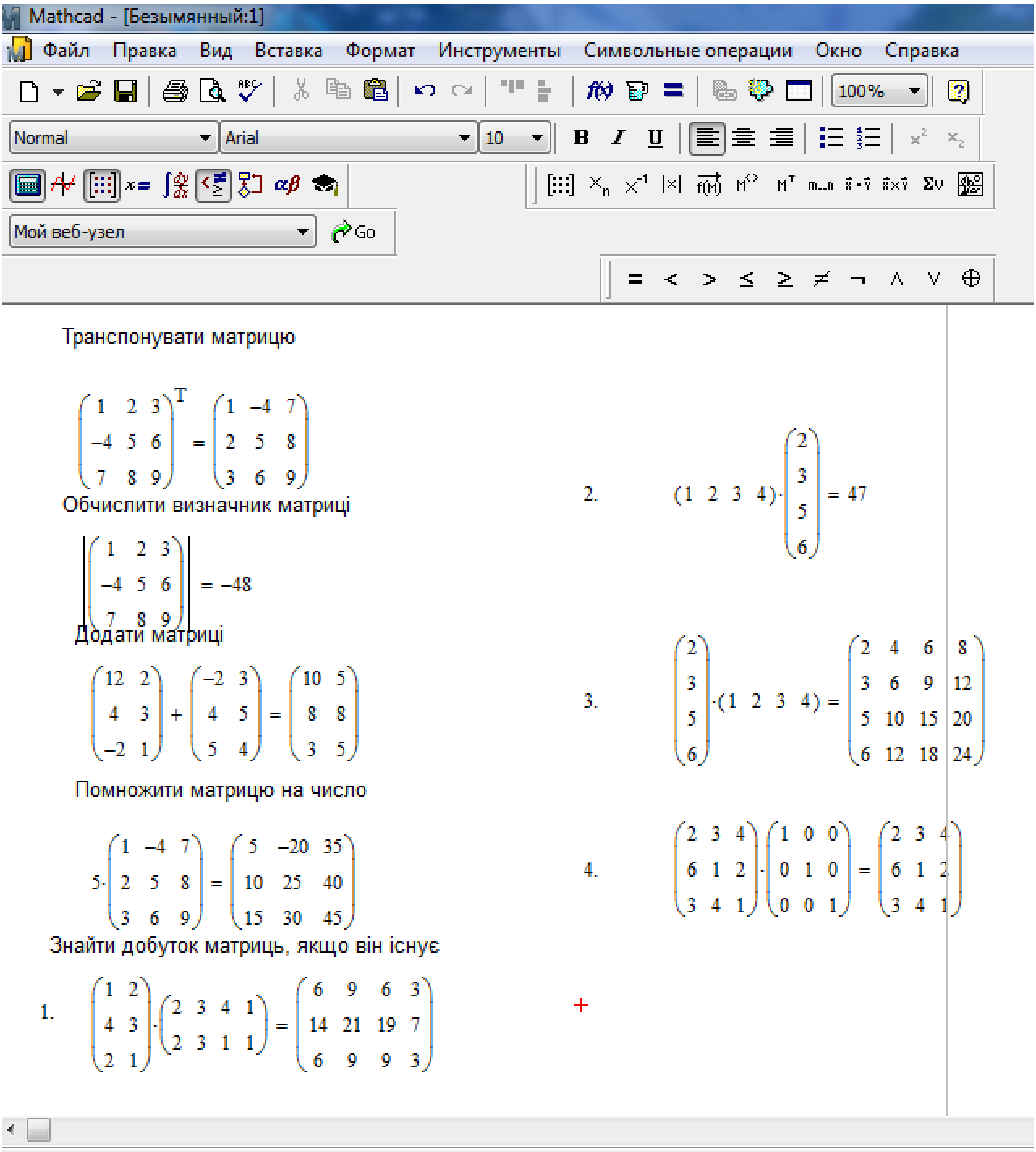
3.
$$\begin{cases} 3x - 3y + 4z = 8; \\ 2x - 3y - 3z = 33; \\ 3x - 3y - 2z = 32. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} -2x + 3y - 3z = 2; \\ -3x - 2y + 5z = 19; \\ 5x + 3y - 4z = -27. \end{cases}$$

2.1.4. Матриці. Лінійні операції над матрицями. Добуток матриць у Mathcad.

За допомогою панелі інструментів «Вектори та матриці» виконати завдання:

1. Записати матриці розміру 3*3, 2*3, 4*3,5*5
2. Для квадратних матриць обчислити визначники
3. Транспонувати квадратні матриці
4. Перевірити властивості визначників
5. Виконати лінійні операції над матрицями, перевірити властивості
6. Обчислити добутки матриць, якщо вони існують
7. Перевірити властивості добутку матриць



<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

1. Задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Обчислити: *A+B; 2B-A; AC; CB; BC.*

2. Для матриць A і B, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

довести, що $(A + 2B)^2 = A^2 + 2(AB + BA) + 4B^2$, та знайти значення виразів.

3. Для квадратних матриць обчислити визначники
4. Транспонувати квадратні матриці
5. Виконати лінійні операції над матрицями, перевірити властивості.
6. Обчислити добутки матриць, якщо вони існують
7. Перевірити властивості добутку матриць

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

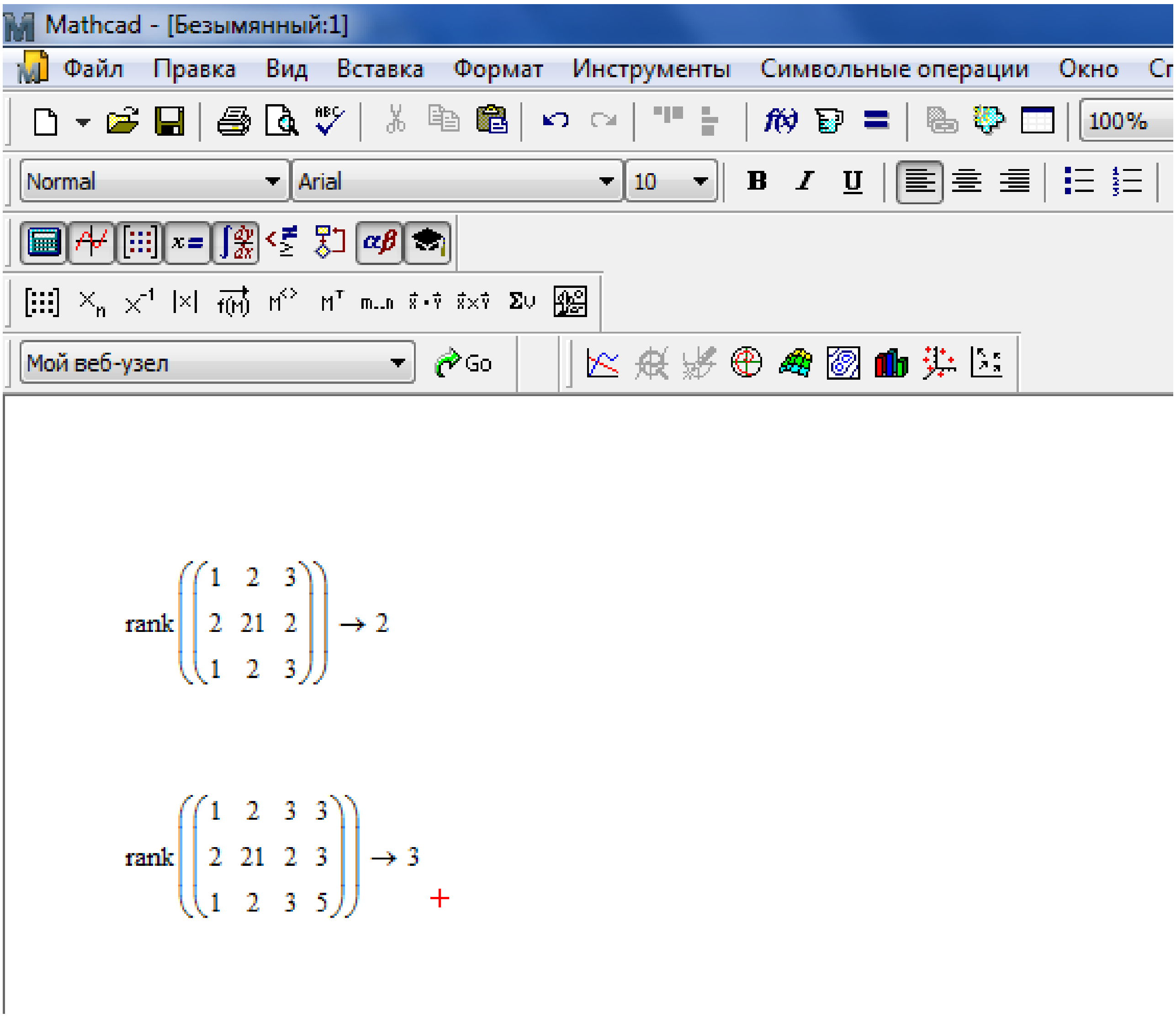
2.1.5. Дослідження СЛАР на сумісність

За допомогою програми *Mathcad* можна дослідити СЛАР на сумісність за теоремою Кронекера-Капеллі. Визначити ранг матриці можливо за допомогою функції *rank(_)*. Для цього натискаємо на панелі інструментів «Вставка функції» *f(x),* обираємо категорію функції «Вектори і матриці» та ім’я функції *rank(_),* вводимо в місце заповнювач матрицю, тиснемо стрілку і отримуємо значення рагу матриці. Таку ж послідовність дій виконуємо для розширеної матриці. Далі за теоремою робимо висновок про сумісність СЛАР.

Приклад: Дослідити СЛАР на сумісність:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 21y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

За допомогою програми *Mathcad* знайдемо ранг основної матриці системи та розширеної матриці системи.



R(A)=2, R(B)=3 отже R(A)< R(B).
Робимо висновок про несумісність СЛАР.

<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

Визначити ранг матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Дослідити СЛАР на сумісність:

$$1.\ \begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=3, \\ x_1+3x_2-5x_3=0, \\ 2x_1+x_2-8x_3=4. \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=4, \\ 3x_1-4x_2+2x_3=2. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

2.2. Розв'язування СЛАР за допомогою пакету MS EXCEL

MS EXCEL – табличний процесор, програма для роботи з електронними таблицями, створена корпорацією Microsoft для Microsoft Windows, Windows NT та Mac OS. Програма входить до складу офісного пакету Microsoft Office.

В *MS EXCEL* легко створювати електронні таблиці на основі шаблонів або самостійно, виконувати розрахунки на основі вбудованих формул, представляти данні за допомогою графіків, діаграм, таблиць.

MS EXCEL має дуже широкий «Майстер функцій», який, зокрема, можна використовувати для розв'язування СЛАР. Розглянемо його використання для розв'язування СЛАР за формулами Крамера та матричним способом (методом оберненої матриці).

2.2.1. Розв'язування СЛАР за формулами Крамера у пакеті MS EXCEL

Розв'язування СЛАР за формулами Крамера потребує оволодіння наступними операціями в пакеті *MS EXCEL*: введення масиву (матриці), знаходження значення визначника, ділення.

Під масивом у табличному процесорі розуміють простий блок ячейок (єдиний прямокутний діапазон), дані в якому однакові по призначенню. Даними масиву можуть бути константи (масив констант) або формули.

Масив констант може бути представлений у явному виді (наприклад, {1;2;3: 4;5;6: 7;8;9}). При введенні масиву констант варто використовувати крапку з комою для поділу значень в одному рядку і двокрапку для поділу рядків.

Для введення формули масиву необхідно виділити діапазон для формули масиву, ввести формулу і натиснути:

Ctrl + ⇑ + ↵ або ↵, а потім F2, Ctrl + ⇑ + ↵ (⇑ - Shift, ↵ - Enter)

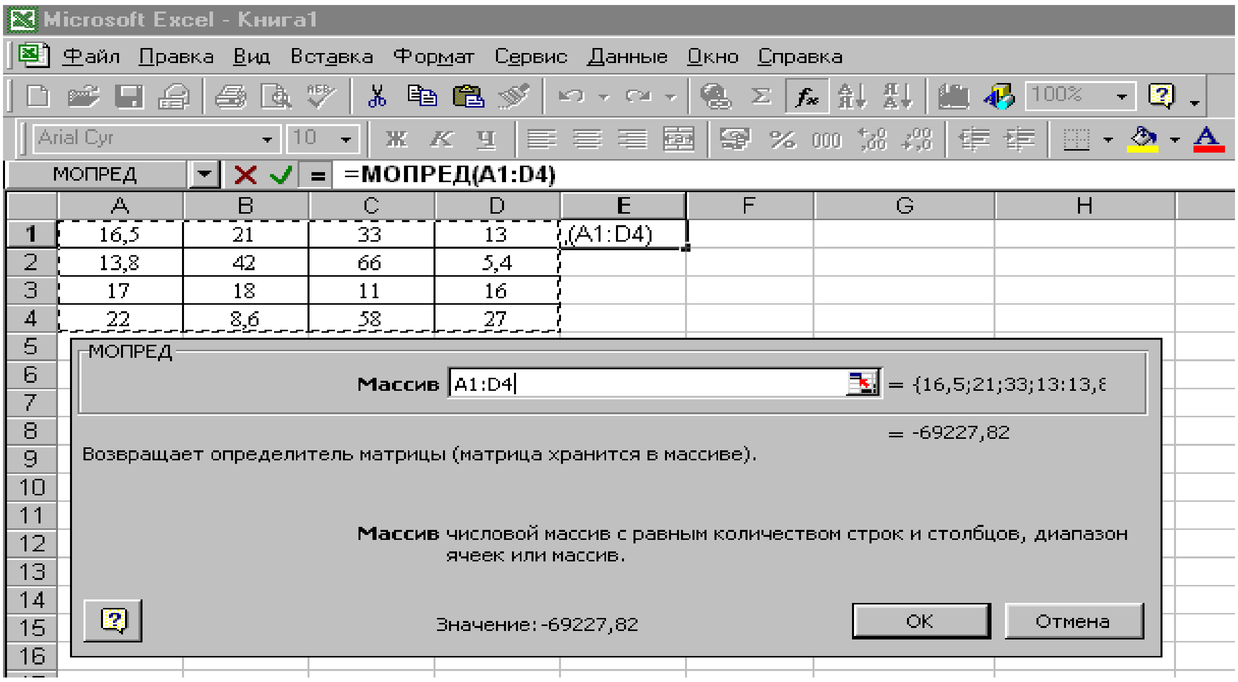
<u>Зауваження: </u>зміна даних в одній з ячейок масиву є неприпустимим.

Задля розв'язування СЛАР за формулами Крамера у пакеті *MS EXCEL* можна скористатись «Майстром функцій» у якому обираємо категорію «Математичні» та функцію «МОПРЕД», що повертає значення визначника квадратної матриці. Таким чином можна обчислити головний Δ та допоміжні Δ_{x_1}, $\Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ визначники системи рівнянь, та обчислити значення змінних за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \ .$$

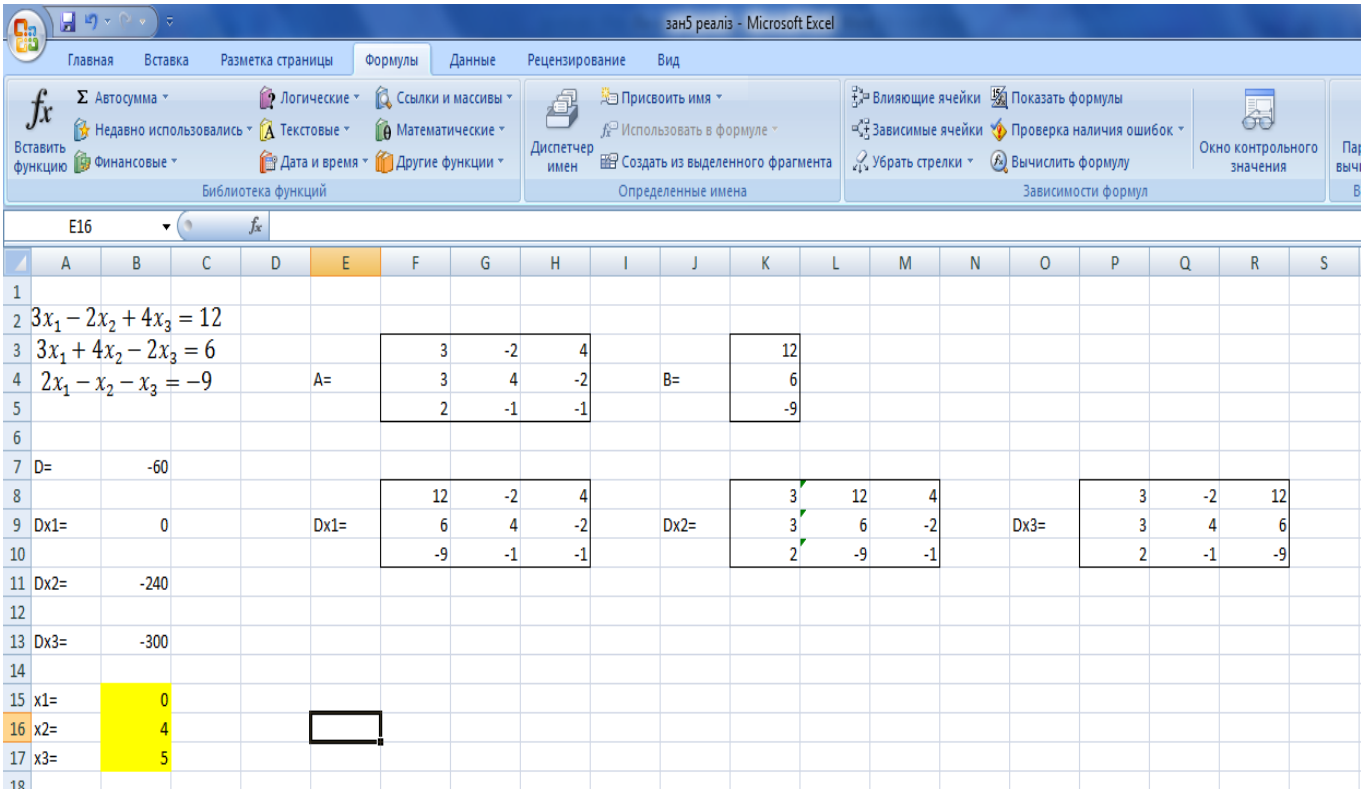
Послідовність застосування функції МОПРЕД для визначника четвертого порядку, що розміщений в ячейках A1:D4:

Установлюємо курсор у ячейку E1, виконуємо $\mathbf{f_x}$ → **Математичні** → **МОПРЕД** і вводимо значення параметра A1:D4

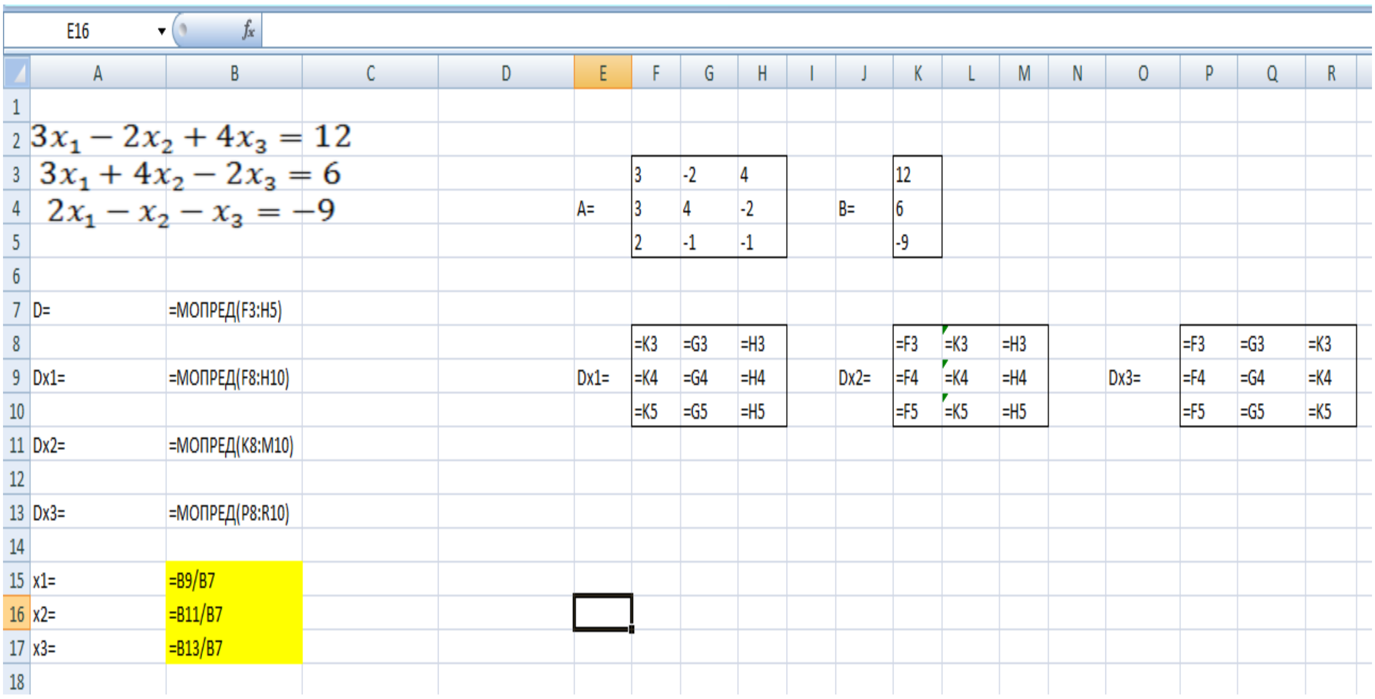


натискаємо **↵.** Результат (у ячейці E1).

Розв’язування СЛАР можна побачити у вікні програми:



Застосування функцій можна побачити на лістингу:



Завдання для самостійного виконання:

Обчислити визначники засобами *MS EXCEL*

1. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$;   2. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$;   3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.   5. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язати СЛАР за формулами Крамера засобами *MS EXCEL:*

1. $\begin{cases} 2x-2y-z = 3, \\ 3x+4y-5z = 1, \\ -5x-4y+3z = -15. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -x-y-4z = -10, \\ x-3y-3z = -2, \\ -3x-4y-4z = 6. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x-4y+2z = 5, \\ 2x+y+4z = 9, \\ 5x-2y-y = 3. \end{cases}$

2.2.2. Розв'язування СЛАР методом оберненої матриці у пакеті MS EXCEL

Розв'язування СЛАР за допомогою методу оберненої матриці потребує оволодіння наступними операціями в пакеті *MS EXCEL*: введення масиву (матриці), знаходження оберненої матриці, множення матриць.

З введенням масиву, ми познайомились в попередньому пункті. Тут у вигляді масиву буде відображатись матриця системи та матриця-стовпець вільних членів.

Розв'язування СЛАР за допомогою методу оберненої матриці в пакеті *MS EXCEL* проводимо в три кроки: знаходження оберненої матриці A^{-1}, перевірка правильності її знаходження за означенням $A \cdot A^{-1} = E$, множення оберненої матриці на стовпець вільних членів $X = A^{-1} \cdot B$. Розглянемо відповідні функції програми.

Функція МОБР категорії "Математичні"

<u>Призначення.</u> Визначення оберненої матриці.

Формат: МОБР(масив), де масив := діапазон | масив констант | ім'я діапазону.

Масив - це числовий масив з рівною кількістю рядків і стовпців.

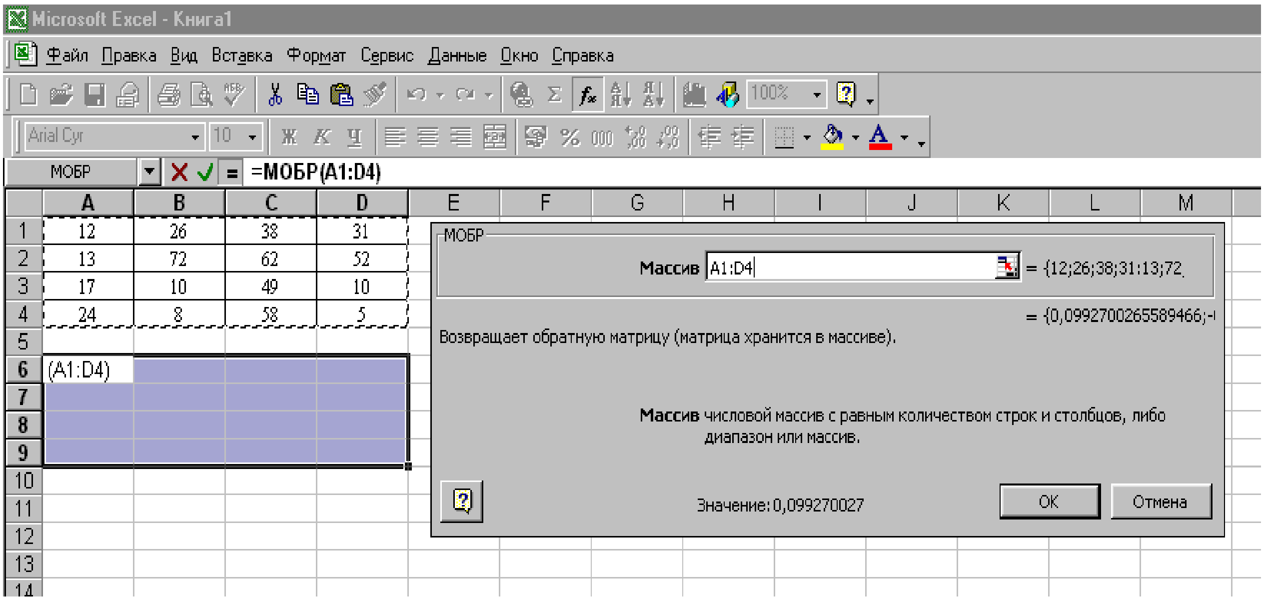
Масив може бути заданий як діапазон ячейок, наприклад A1:C3; як масив констант, наприклад {1;2;3: 4;5;6: 7;8;9} або як ім'я діапазону або масиву.

Функція МОБР повертає <u>значення помилки #ЗНАЧ!,</u> якщо яка-небудь з ячейок у масиві порожня або містить текст, а також якщо масив має нерівне число рядків і стовпців.

Формули, що повертають масиви, повинні бути введені як формули масиву.

Послідовність застосування функції МОБР для матриці заданої в масиві A1:D4

Виділяємо блок комірок A6:D9, виконуємо $\mathbf{f_x}$ → **Математичні** → **МОБР** і вводимо аргумент A1:D4



натискаємо **Ctrl** + ⇑ + ↵. Результат:

	A	B	C	D
6	0,09927	-0,01385	-0,36461	0,257797
7	-0,03678	0,031966	-0,08168	0,058931
8	-0,04264	0,003546	0,161087	-0,09471
9	0,076941	-0,0258	0,012182	-0,03313

Функція МУМНОЖ категорії "Математичні"

Призначення. Визначення добутку матриць. Результатом є масив з таким же числом рядків, як масив1 і з таким же числом стовпців, як масив2.

Формат: МУМНОЖ(масив1;масив2), де масив := діапазон | масив констант | ім'я діапазону.

Кількість стовпців аргументу масив1 повинний бути таким же, як кількість рядків аргументу масив2, і обидва масиви повинні містити тільки числа.

Якщо хоча б одна з ячейок в аргументах порожня або містить текст або якщо число стовпців в аргументі масив1 відрізняється від числа рядків в аргументі масив2, то функція МУМНОЖ повертає значення помилки #ЗНАЧ!. Масив а, що є добутком двох масивів b і c визначається в такий спосіб:

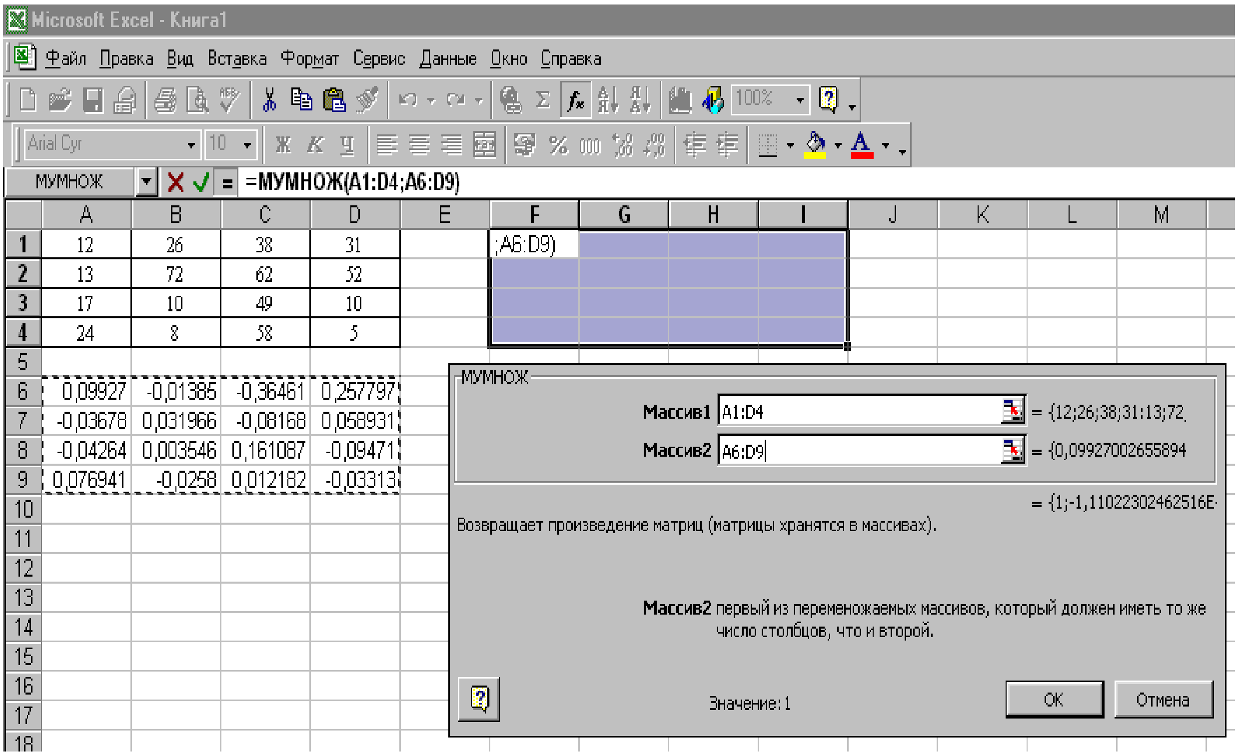
$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj},$$

де i - це номер рядка, а j - це номер стовпця.

Формули, що повертають масиви, повинні бути введені як формули масиву.

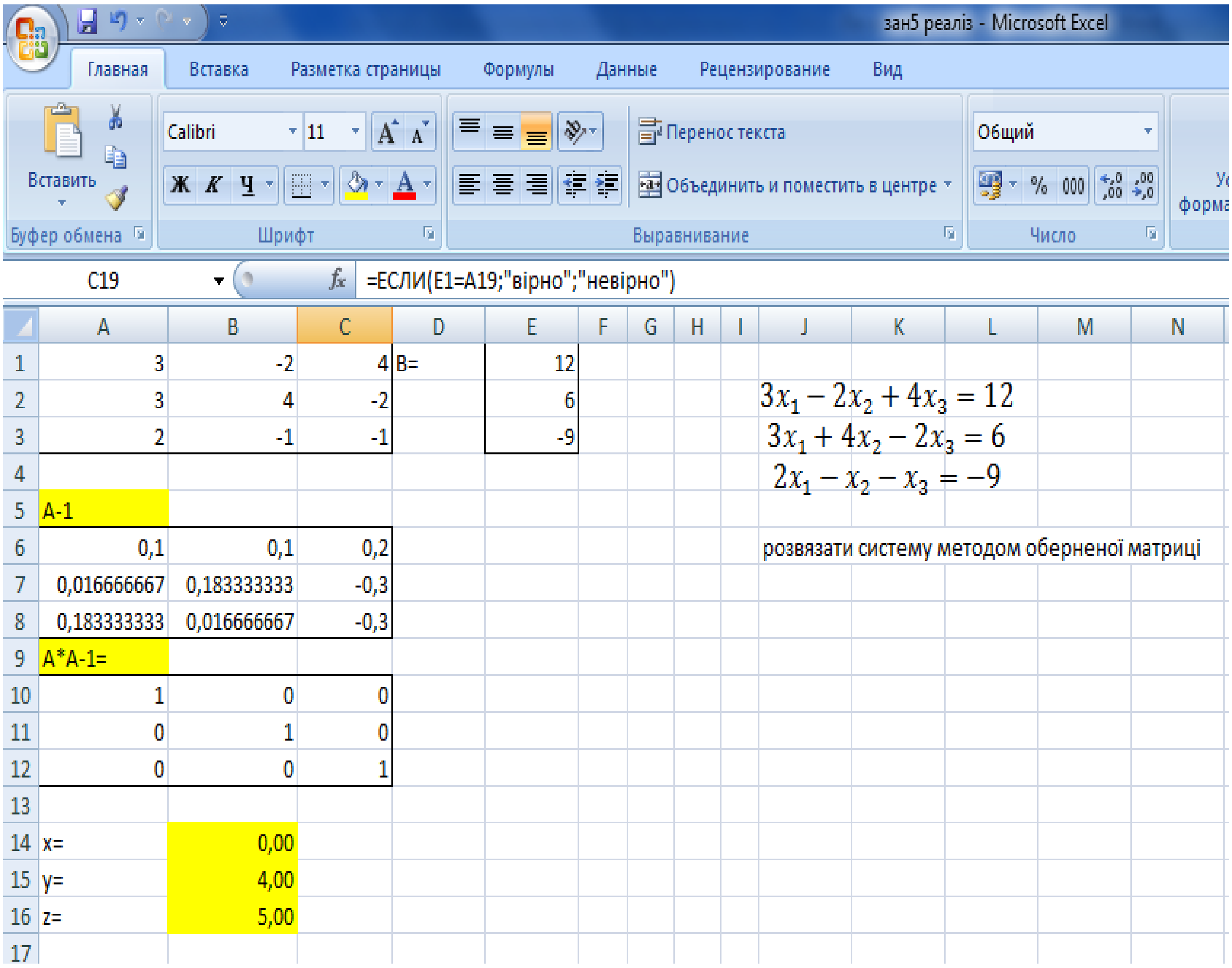
Послідовність застосування функції МУМНОЖ:

Виділяємо блок комірок F1:I4, виконуємо $\mathbf{f_x}$ → **Математичні** → **МУМНОЖ** і вводимо в якості параметрів A1:D4, а потім - A6:D9:

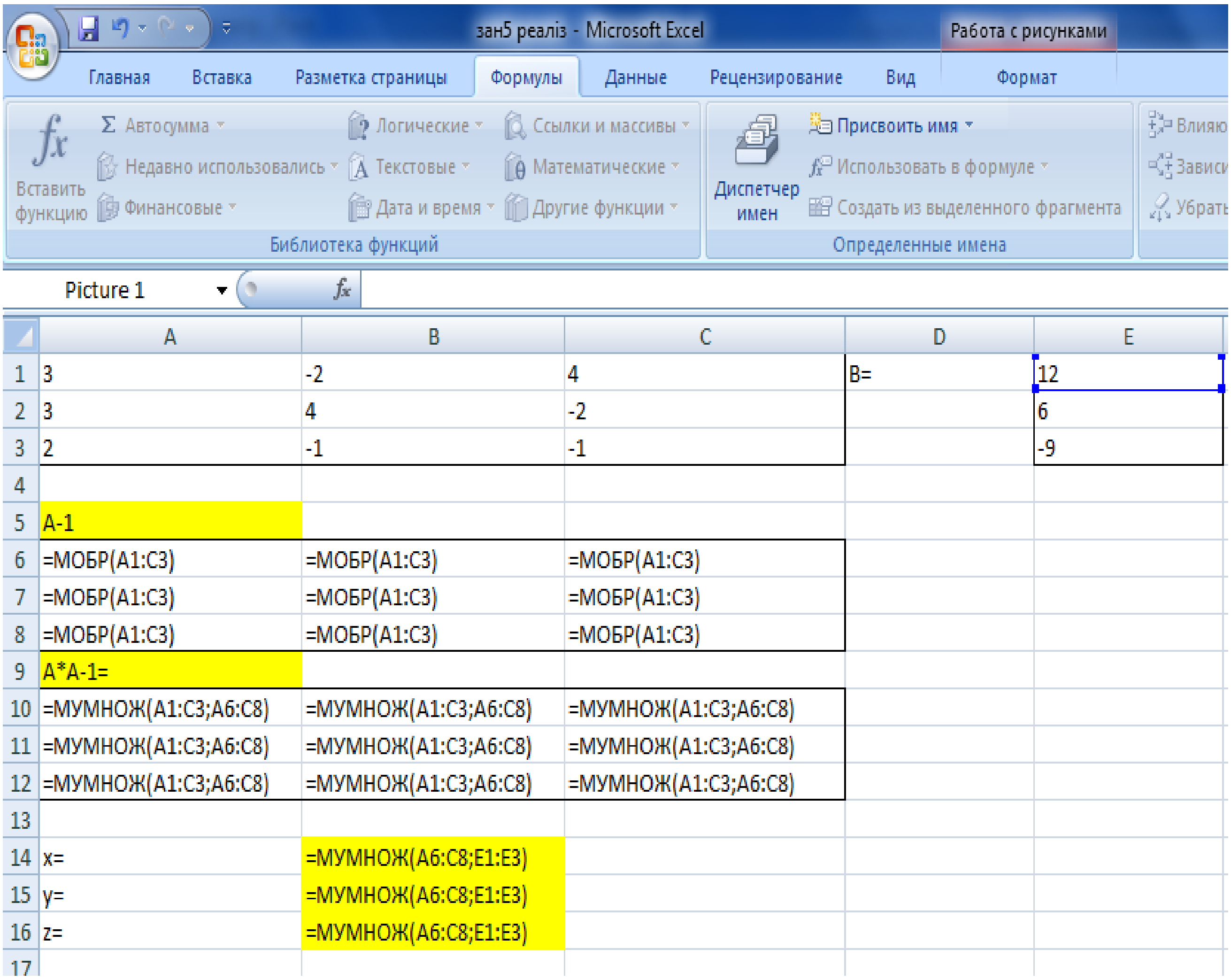


натискаємо **Ctrl** + ⇑ + ↵.

Розглянемо приклад розв'язування СЛАР методом оберненої матриці у вікні програми:



Лістінг розв’язку:



	A	B	C	D	E
1	3	-2	4	B=	12
2	3	4	-2		6
3	2	-1	-1		-9
4					
5	A-1				
6	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)		
7	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)		
8	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)	=МОБР(A1:C3)		
9	A*A-1=				
10	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)		
11	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)		
12	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)	=МУМНОЖ(A1:C3;A6:C8)		
13					
14	x=	=МУМНОЖ(A6:C8;E1:E3)			
15	y=	=МУМНОЖ(A6:C8;E1:E3)			
16	z=	=МУМНОЖ(A6:C8;E1:E3)			
17					

<u>Завдання для самостійного виконання:</u>

Розв’язати СЛАР методом оберненої матриці засобами *MS EXCEL:*

$$1.\begin{cases} 4x+5y-2z=9, \\ 6x+7y+3z=10, \\ 10x+12y+z=15. \end{cases} \quad 2.\begin{cases} 4x+4y+z=-27, \\ -5x+5y+4z=-1, \\ 2x-y-3z=-5. \end{cases} \quad 3.\begin{cases} -4x-3y+2z=-12, \\ -5x-4y+5z=-22, \\ -2y+3y-z=-9. \end{cases}$$

Індивідуальні завдання

Індивідуальні завдання виконуються ЗВО згідно варіанта, що присвоюється викладачем, у окремому зошиті і здаються на перевірку згідно встановлених робочою програмою термінів. Завдання, що розв'язуються на комп'ютері, здаються у вигляді робочого файлу та підтверджуються роздруківкою з лістингом. Індивідуальне завдання вважається виконаним, якщо воно захищено.

Задача 1. Розв'язати СЛАР трьома способами:

1) методом Гаусса;
2) за формулами Крамера;
3) методом оберненої матриці.

1. $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3=-2 \\ x_1-3x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+5x_2-7x_3=1 \end{cases}$	**2.** $\begin{cases} 3x_1-5x_2+x_3=16 \\ 4x_1+x_2-x_3=-1 \\ -2x_1-2x_2+5x_3=17 \end{cases}$	**3.** $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=6 \\ 5x_1+2x_2-3x_3=-5 \\ -4x_1+x_2+4x_3=2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x_1+4x_2-x_3=3 \\ 4x_1-2x_3=-14 \\ 3x_1-3x_2+5x_3=3 \end{cases}$	**5.** $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-3 \\ -x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3=-1 \end{cases}$	**6.** $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+2x_3=-4 \\ 3x_1+x_2-x_3=2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2 \\ -x_1+2x_2+3x_3=-5 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$	**8.** $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=4 \\ 5x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+3x_3=-5 \end{cases}$	**9.** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3=4 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-3 \\ 2x_1+x_2+x_3=3 \\ 3x_1-4x_2-x_3=-4 \end{cases}$	**11.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ 3x_1-4x_2+2x_3=4 \end{cases}$	**12.** $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$
13. $\begin{cases} 7x_1-x_2+5x_3=0 \\ x_1+5x_2-x_3=12 \\ 2x_1+4x_2+x_3=9 \end{cases}$	**14.** $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3=9 \\ 6x_1+3x_2+2x_3=10 \end{cases}$	**15.** $\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_3=0 \\ x_1+4x_2-x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=3 \end{cases}$
16. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+7x_3=6 \\ 2x_1+5x_2-x_3=9 \\ 4x_1-2x_2+3x_3=-3 \end{cases}$	**17.** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$	**18.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=12 \\ -3x_1+x_2+2x_3=2 \\ 5x_1-4x_2+x_3=12 \end{cases}$
19. $\begin{cases} x_1-2x_2+5x_3=-19 \\ 3x_1+2x_2-x_3=15 \\ 2x_1+x_2-3x_3=13 \end{cases}$	**20.** $\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3=-2 \\ x_1-3x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+5x_2-7x_3=1 \end{cases}$	**21.** $\begin{cases} 3x_1-x_2+4x_3=-6 \\ 5x_1+2x_2-3x_3=10 \\ -4x_1+x_2+4x_3=2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \\ 4x_1 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$	**23.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 14 \end{cases}$	**24.** $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -4 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 14 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$
25. $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$	**26.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -10 \end{cases}$	**27.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$
28. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 7x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$	**29.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	**30.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Задача 2.Дослідити СЛАР на сумісність, у разі сумісності розв’язати.

$$1.\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \qquad 2.\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$3.\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \qquad 4.\quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$5.\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases} \qquad 6.\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \qquad 8.\quad \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases} \qquad 10.\quad \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

Задача 3. Розв'язати СЛАР за допомогою *Mathcad.*

1. Виконати розв'язок за допомогою обчислювального блоку функцій Given/Find ;
2. Виконати розв'язок за допомогою функції «lsolve» (вибір варіанта за формулою: ***v=N+2***) ;
3. Виконати розв'язок СЛАР за формулами Крамера в *Mathcad*(вибір варіанта за формулою: ***v=N+4***) .

1. $7x + 4y - z = 13;$ $3x + 2y + 3z = 3;$ $2x - 3y + 4z = -10.$

2. $x + 4y - z = -9;$ $4x - y + 5z = -2;$ $3x + 3y - 7z = -9.$

3. $3x + 2y + 4z = -9;$ $2x - 2y + 5z = 2;$ $4x - y + 4z = -11.$

4. $4x + 4y + z = -27;$ $-5x + 5y + 4z = -1;$ $2x - y - 3z = -5.$

5. $4x + y - 3z = -34;$ $-5x - 2y + 2z = 41;$ $2x - 4y - 3z = 1.$

6. $5x + 4y + 4z = -3;$ $-5x - 3y + 4z = -1;$ $5x - 2y - 2z = -21.$

7. $4x + 4y - 4z = 4;$ $-5x - y + 3z = 11;$ $-5x + 3y - 2z = 21.$

8. $2x - 5y - 5z = -1;$ $-5x - 3y + z = 26;$ $5x - 2y - 2z = -13.$

9. $3x + 3y + 3z = -27;$ $-2x - 5y + 5z = -2;$ $-2x + 2y + z = -17.$

10. $4x + 4y - 5z = -17;$ $-5x - 3y + 2z = -4;$ $-4x + 4y + 3z = -9.$

11. $4x - 2y - 3z = -13;$
$2x + 5y + 3z = -32;$
$-4x - 2y - 5z = 25.$

12. $3x - y + 5z = -10;$
$4x + 5y + 4z = -19;$
$4x + 4y - 2z = 14.$

13. $3x - 4y - 3z = 21;$
$-5x + 5y - 2z = -44;$
$3x - 2y + z = 23.$

14. $5x + 2y - 3z = -37;$
$-5x + 2y + z = 21;$
$2x + 4y + z = -20.$

15. $3x - 2y + 4z = 31;$
$4x + 2y - 2z = 10;$
$-3x - 5y + 2z = 1.$

16. $-3x - y - 5z = 1;$
$-4x + 3y + 5z = 16;$
$3x - 5y - 4z = -7.$

17. $5x - 3y - 2z = -2;$
$2x + 5y - 2z = 29;$
$5x + 5y + z = 41.$

18. $-3x + 4y + z = 1;$
$-4x - y - 5z = 33;$
$2x - 4y - 3z = 9.$

19. $3x - 2y + 3z = -15;$
$-3x - 3y - 4z = 5;$
$-4x - 4y - 3z = -5.$

20. $-3x + y - 5z = 2;$
$4x + 5y - 5z = 7;$
$2x - 3y + 2z = 12.$

21. $-5x - y - 4z = 44;$
$2x + 3y - 4z = 13;$
$-2x + 5y + 2z = 5.$

22. $2x + 3y - 4z = -3;$
$5x - 5y + 5z = 40;$
$2x + y + 5z = 31.$

23. $-5x - 2y - 4z = -2;$
$-5x - 4y - 3z = 1;$
$4x + 3y + 4z = -2.$

24. $-3x - 5y + 3z = 31;$
$-5x + 2y + 2z = 3;$
$-3x + 3y + 5z = -11.$

25. $3x - 5y + z = -17;$
$2x - 5y + 3z = -6;$
$3x - 4y - 2z = -25.$

26. $4x - y + 2z = 18;$
$2x - 3y + 3z = 8;$
$-4x - y - 5z = -28.$

27. $3x - 3y + 4z = 8;$
$2x - 3y - 3z = 33;$
$3x - 3y - 2z = 32.$

28. $-2x + 3y - 3z = 2;$
$-3x - 2y + 5z = 19;$
$5x + 3y - 4z = -27.$

29. $-2x + 5y - 2z = -24;$
$-4x - 2y + 3z = 7;$
$2x + y - 5z = -7.$

30. $2x - 2y - z = 3;$
$3x + 4y - 5z = 1;$
$-5x - 4y + 3z = -15.$

Задача 4. За умовою ***задачі 3*** розв’язати СЛАР засобами *MS EXCEL:*

1) За формулами Крамера (вибір варіанта за формулою: ***v=N+3***);

2) Методом оберненої матриці (вибір варіанта за формулою: ***v=N+5***).

Тести

1.

Визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) $ad+bc$; б) $bc-ad$; в) $ad-bc$; г) $ac-bd$;
д) інша відповідь.

2.

Який з наведених нижче добутків не входить у визначник третього порядку:

а) $a_{13}a_{21}a_{32}$; б) $a_{12}a_{21}a_{32}$; в) $a_{12}a_{23}a_{31}$;
г) $a_{11}a_{22}a_{33}$; д) інша відповідь.

3.

Добутки $a_{12}a_{23}a_{31}$ і $a_{13}a_{21}a_{32}$ входять у визначник третього порядку із знаками відповідно

а) "-" і "+"; б) "+" і "-"; в) "+" і "+";
г) "-" і "-"; д) інша відповідь.

4.

Які з наведених нижче тверджень є правильними?

1) Визначник дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення.
2) Спільний множник елементів головної діагоналі виноситься за знак визначника.
3) Визначник, який містить два пропорціональні рядки, дорівнює нулю.
4) Визначник не зміниться, якщо в ньому поміняти місцями два стовпці.

а) 1 і 4; б) 2 і 3; в) 1 і 3;
г) 1 і 2; д) інша відповідь.

5.

. Матриці A та B називаються переставними, якщо:

а) $A+B=B+A$; б) $AB=BA$; в) $A=B$; г) $AB=E$; д) інша відповідь.

6.

. Квадратна матриця називається невиродженою, якщо:

а) її визначник не дорівнює нулю;
б) її визначник дорівнює нулю;
в) всі елементи на головній діагоналі не дорівнюють нулю; г) всі її елементи не дорівнюють нулю;
д) інша відповідь.

7. . Визначник матриці існує, якщо вона є:

а) довільною; б) тільки матрицею-стовпцем;
в) тільки матрицею-рядком; г) тільки квадратною;
д) інша відповідь.

8.

. Для квадратної матриці A оберненою називається матриця A^{-1} така, що:

а) $A^{-1}=-A$; б) $AA^{-1}=A^{-1}A=E$; в) $A+A^{-1}=E$; г) $A-A^{-1}=E$; д) інша відповідь.

9.

. При множенні матриці на число на нього потрібно помножити:

а) всі елементи одного рядка;

б) всі елементи одного стовпця;

в) всі елементи одного рядка і одного стовпця;

г) всі елементи матриці;

д) інша відповідь.

10.

Систему лінійних рівнянь можна розв'язати за правилом Крамера, якщо її матриця:

а) квадратна вироджена;

б) квадратна невироджена; в) довільна;

г) тільки трикутна; д) інша відповідь.

11.

Систему лінійних рівнянь з n невідомими можна розв'язати матричним методом, якщо її матриця A:

а) квадратна вироджена; б) квадратна невироджена;

в) розміру $m \times n$ $(m \neq n)$ з $r(A) = n$;

г) розміру $m \times n$ $(m \neq n)$ з $r(A) < n$; д) інша відповідь.

12.

При множенні визначника на число:

а) всі його елементи множаться на це число;

б) всі елементи довільного рядка або стовпця множаться на це число;

в) його діагональні елементи множаться на це число;

г) один з його елементів множиться на це число;

д) інша відповідь.

13.

. Якщо всі елементи визначника третього порядку Δ помножити на число m, то одержаний визначник дорівнюватиме:

а) $m\Delta$; б) $m^9\Delta$; в) $m^3\Delta$; г) $m^2\Delta$;

д) інша відповідь.

14.

Які з наведених нижче тверджень не є правильними?

1) Визначник, всі елементи якого дорівнюють 1, дорівнює 1.
2) Визначник, який містить нульовий рядок, дорівнює нулю.
3) Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого стовпця додати відповідні елементи іншого стовпця, помножені на одне і те ж число.
4) Визначник змінить знак, якщо в ньому поміняти місцями перший рядок і перший стовпець.

а) 1 і 4; б) 2 і 4; в) 1 і 3;

г) 2 і 3; д) інша відповідь.

15.

Які з наведених нижче тверджень не є правильними?

1) Визначник змінить знак, якщо в ньому поміняти місцями два стовпці.
2) Якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

3) Визначник не зміниться, якщо до всіх елементів деякого рядка додати 1.

4) Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця на їх алгебраїчні доповнення.

а) 1 і 4; б) 2 і 4; в) 1 і 3; г) 2 і 3;
д) інша відповідь.

16

Матриці A та B мають однакову розмірність 4×2. Над ними можна провести операцію:

а) відняти; б) перемножити B на A;
в) перемножити A на B;
г) поділити A на B; д) інша відповідь.

.

17.

Для квадратної матриці A обернена існує тоді і тільки тоді, коли:

а)всі її елементи ненульові;
б)всі елементи на головній діагоналі ненульові;
в) $\det A \neq 0$; г) всі елементи першого рядка ненульові;
д) інша відповідь.

18.

Рангом матриці називається:

а) кількість мінорів, відмінних від нуля;

б) найвищий з порядків мінорів, відмінних від нуля;
в) кількість ненульових діагональних елементів;
г) кількість ненульових елементів;
д) інша відповідь.

19.

Неквадратні матриці A і B однакової розмірності можна:

а) додати; б) перемножити A на B;

в) додати A і B^T; г) поділити A на B;

д) інша відповідь.

20.

При множенні матриці на число на нього потрібно помножити:

а) всі елементи одного рядка;

б) всі елементи одного стовпця;

в) всі елементи одного рядка і одного стовпця;

г) всі елементи матриці;

д) інша відповідь.

21.

Визначник добутку матриць дорівнює:

а)сумі їх визначників; б)добутку їх визначників;

в)більшому з їх визначників;

г)меншому з їх визначників; д) інша відповідь.

22.

Система лінійних рівнянь називається невизначеною, якщо:

а) вона має єдиний розв'язок;

б) вона не має жодного розв'язку;

в)вона має більше, ніж один розв'язок;

г)всі вільні члени дорівнюють нулю;

д) інша відповідь.

23.

Які з наступних тверджень є правильним? Величина визначника квадратної матриці не зміниться, якщо:

1) матрицю транспонувати;
2) поміняти місцями два рядки;
3) до елементів деякого стовпця додати відповідні елементи іншого стовпця, помножені на одне і те ж число;
4) домножити будь-який рядок на -1;

а) 1 і 2; б) 2 і 3; в) 3 і 4;
г) 1 і 3; д) інша відповідь.

24.

Система m лінійних рівнянь називається несумісною, якщо вона:

а) має безліч розв'язків; б) має m розв'язків;
в) має єдиний розв'язок;
г) не має жодного розв'язку; д) інша відповідь.

25.

Система лінійних рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок, якщо:

а) $r(A)=r(\bar{A})=n$; б) $r(A)<r(\bar{A})=n$; в) $r(A)=r(\bar{A})<n$;
г) $r(A)<r(\bar{A})<n$; д) інша відповідь.

Література

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. –М.: Наука, 1982.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. –К.: Вища школа, 1993.
3. Лавріненко Н.М., Латинін С.М., Возняк А.О. Вища математика. Ч.1: навч. посібн. Для студ.техн. спец. – Донецьк, 2010. 600с.
4. Фортуна В.В., Бескровний О.І. Вища та прикладна математика. Л.: Магнолія, 2006, 2013. 647с.
5. Вища математика: підручник у 2 кн. За редакцією Кулініча Г.Л. –К.: Либідь, 2000.
6. Возняк А.О., Тернов С.О.Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». ДонНУЕТ – Кр.Ріг, 2016. 115с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.: в 3 ч. –М.: Высш. шк., 1990.
8. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. сборник индивидуальных заданий по высшей математике. в 3 ч. –Минск: Высш. шк., 1990.
9. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: підручник у 2 ч. –К.: 2002.
10. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. –К.: Либідь, 1996.
11. В.В. Липовик, О.В. Максимов, В.Д. Радовський Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії / навчальний посібник – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2005- 272с.
12. Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. –М.: Высш. шк., 1972.
13. Тернов С.О., Копайгора О.К. Табличний процесор Microsoft Excel: скорочений курс. Навчальний посібник – Кривий Ріг : [ДонНУЕТ], 2018. – 236 с.

14. Макаров Е. Инженерные расчеты в *Mathcad* 15.[учебный курс]. СПб: Питер, 2011. 400с.

Навчальне видання

Квітка *Тетяна Володимирівна*

Кафедра вищої математики та інформаційних систем

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

розділ «Елементи лінійної алгебри з використанням пакетів математичних програм *Mathcad* та *MS EXCEL*»

Навчальний посібник

Підпісано до друку…..

Формат 84x108 1/32. Ум. друк. арк. .

Тираж _____ пр. Зам. № __

Донецький національний університет економіки і торгівлі імені

Михайла Туган-Барановського,

вул. Трамвайна, 16, м. Кривий Ріг, 50000

ДК № 4929 від 07. 07. 2015 р.